Bender · Schreiber

Operative Genese der Geometrie

Peter Bender · Alfred Schreiber

Operative Genese der Geometrie

— Reprint —

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Erstveröffentlichung: 1985 Hölder-Pichler-Tempsky (Wien) und B. G. Teubner (Stuttgart); Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 12.

Reprint:
Bender, P.; Schreiber, A.: »Operative Genese der Geometrie«

Umschlaggestaltung: Teresa Merino
Druck und Verlag: epubli GmbH, Berlin
www.epubli.de

ISBN 978-3-8442-2454-2

INHALTSVERZEICHNIS

TEIL I
ANWENDUNGEN IN DER PRAXIS UND DIDAKTISCHE STRUKTURIERUNG

Der folgende Text ist ein Wiederabdruck der erstmals 1985 erschienenen Ausgabe als Band 12 der Schriftenreihe Didaktik der Mathematik (Universität für Bildungswissenschaften, Klagenfurt), herausgegeben von Willibald Dörfler und Roland Fischer.

Auf Seite 464 findet sich ein kurzer Nachtrag mit Hinweisen auf einige Beiträge zu Fragen des operativen Aufbaus der Geometrie nach 1985.

Teil I

Anwendungen in der Praxis und didaktische Strukturierung

»*O speculatore delle cose, non ti laldare di conoscere le cose che ordinariamente per se medesima la nature conduce. Ma rallegrati di conoscere il fine di quelle cose che son disegnate dalla mente tua.*«

»O du Erforscher der Dinge, rühme dich nicht, die Dinge zu kennen, welche die Natur gewöhnlich durch sich selbst vollbringt. Freue dich dagegen, den Zweck jener Dinge zu kennen, die von deinem eigenen Geist entworfen sind.«

LEONARDO DA VINCI. G. 47r

VORBEMERKUNGEN

Hintergrund und Quintessenz

Im Frühjahr 1977 faßten wir den Plan, gemeinsam einmal eine didaktische Auswertung der Literatur zu versuchen, die sich mit den operativen Aspekten der Geometrie in Anknüpfung an Hugo Dingler beschäftigt. Dingler war es ja, der in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts die (euklidische) Geometrie neubegründen wollte, indem er den Grundbegriffen durch das Explizieren von Herstellvorschriften einen operativen Sinn verlieh. Seit den 60er Jahren hat dann vor allem Paul Lorenzen dieses Programm weiterentwickelt und im Rahmen einer von ihm so genannten Protophysik präzisiert - ein Vorhaben, das bei weitem noch nicht abgeschlossen ist und, wie schon das Dinglersche selbst, gewiß noch verschiedentlich modifiziert und eingeschränkt werden muß. Vereinzelt hat man auf die didaktische Bedeutung dieser Arbeiten hingewiesen, allerdings ohne hinlängliche Konkretion. Diese Konkretion war und ist unser Ziel. Angesichts des kargen Feldes planten wir ursprünglich nur einen Aufsatz. Im Laufe der Zeit wurden es dann doch mehrere; hinzu kamen eine Reihe von Vorträgen, Veranstaltungen in der Lehreraus- und -fortbildung, Diskussionen und Erfahrungen mit Kollegen, Studenten und - in Unterrichtsversuchen - mit Schülern, was unser Geometriekonzept immer wieder und auf jeweils neue Weise förderte. So konnten wir (ab 1978) das inzwischen beträchtlich angewachsene Material allmählich zu einer Monographie verarbeiten. Diese wurde von beiden Verfassern in gemeinsamer Arbeit angefertigt; wir haben miteinander den Aufbau geplant, den Inhalt produziert und diskutiert, und das Manuskript geschrieben.

Das vorliegende zweiteilige Werk behandelt die genetischen Grundlagen und den Unterricht von Geometrie in einem einheitlichen Rahmen. Diesen liefert unsere Auffassung, wonach geometrische Begriffe vornehmlich im Zusammenhang zweckgerichteter praktischer Handlungen herausgebildet werden. Damit gehen wir über eine wie auch immer geartete Abstraktion der Ideen aus Erfahrungsgegebenheiten weit hinaus. Wir betrachten Begriffe der Geometrie keineswegs als bloße Nachbilder bereits vorhandener, sondern vielmehr als Vorbilder erst noch zu realisierender Formen; deren Herstellung dient in der Regel der Erfüllung zweckgebundener Funktionen in der Praxis. Das ist im großen und ganzen der Inhalt dessen, was wir hier als operative Auffassung der Geometrie bezeichnen und im Buch selbst genauer entwickeln und begründen wollen.

Die Quintessenz unserer Auffassung bildet das Prinzip der operativen Begriffsbildung, das der Leser in Abschnitt 1.3 nachlesen kann. Allerdings ist das ein hochgradiges Konzentrat und kann daher ebensowenig das Studium des Ganzen ersetzen wie der Brühwürfel die Brühe. Das Prinzip ist didaktischer Natur und aus einer Synthese des operativen Geometrieverständnisses mit dem genetischen Prinzip gewonnen. Um Struktur, Sinn und Gehalt dieser Synthese zu beschreiben und zu erläutern, haben wir ein vergleichsweise breites Geflecht aus pädagogischen, erkenntniskritischen, metatheoretischen, anthropologischen, technologischen und praktischen Themenfäden gewirkt. In solcher Form hoffen wir, speziell der Mathematik-Didaktik einige neue Erkenntnisse und Anregungen, die Geometrie und ihren Unterricht betreffend, zuzuführen. Zweifellos verdanken wir den Kern der operativen Auffassung dem Werk Hugo Dinglers. Bis zu einem gewissen Grade stellen wir uns damit aber auch in eine didaktische Tradition, wie sie schon nach 1890 von E. Zeißig in seiner "Formenkunde" oder von H. Kempinsky in seiner "Lebensvollen Raumlehre" (1920) gepflegt wurde. Auch dort leiten oder begleiten Zwecke ganz ausdrücklich die Begriffsentwicklung, und dementsprechend wird Geometrie aufgefaßt als Erschließung der räumlichen Wirklichkeit. Immerhin erschien Kempinskys sehr unterrichtsnahes, auf die Volksschule zugeschnittenes Werk 1952 noch in zehnter Auflage, geriet dann aber wohl in Vergessenheit, als man im Zuge von Reformen zunächst Abbildungsgeometrie und dann auch endliche Miniaturgeometrien zu pflegen begann. Gegenwärtig wird zum Teil wieder daran gedacht, die Geometrie weniger in einen deduktiven Kontext einzuzwängen und mehr innerhalb einer offenen, beziehungsreichen Raumerkundung zu entwickeln (H. Freudenthal). Das bedeutet keineswegs, wir hingen einem 'altmodischen' Konzept an. Gerade die Mathematik-Didaktik erfährt zunehmend das Kurzlebige einiger ihrer Moden sowie die Notwendigkeit, die eigene Geschichte wahrzunehmen und das in ihr Überlieferte gründlicher als bisher aufzuarbeiten.

Wie der Text zu lesen ist

Wir präsentieren unseren Text in zwei Teilen nach folgendem Gliederungsgedanken: Teil I, "Anwendungen in der Praxis und didaktische Strukturierung", behandelt die operative Begriffsbildung in der Geometrie unter mehr 'materialen' Gesichtspunkten, d.h. er enthält Beispiele praktischer Anwendungen und die didaktischen Erläuterungen dazu. Teil II, "Didaktische Grundlagenfragen und logisches Verständnis", versorgt den Leser nicht nur mit der zugehörigen Methodologie, sondern vertieft auch die inhaltlichen Probleme und Aspekte der Geometriegenese. - Den Minimalanteil, den die pädagogische Auswertung von dieser 'Theorie' benötigt, vermitteln wir dem Leser aber bereits in Teil I auf mehr intuitiver Grundlage, dabei knapp und in erster Näherung. Das hat mindestens zwei Vorteile: Der erste Teil wird in hinreichendem Maße unabhängig vom zweiten. Und der gesamte Text erhält (durch schrittweise vertiefende Wiederaufnahme) das, was man heute in der Didaktik eine 'spiralige Struktur' nennt.

Nun zu den Kapiteln von Teil I im einzelnen (zu den Kapiteln 5 - 10 vgl. die Vorbemerkungen zu Teil II).

Kapitel 1 gibt einen einführenden Überblick über unsere Theorie der Geometrie - so weit wie dies für das Verständnis des didaktischen Prinzips der operativen Begriffsbildung notwendig erscheint. Das Kapitel kann nicht überschlagen werden, und es dürfte auch solchen Lesern zugänglich sein, die keinerlei Vorkenntnisse aus Philosophie oder Grundlagen der Geometrie mitbringen. Wer auf genauere Begründungen und Details neugierig ist, findet diese im zweiten Teil. Hierauf aufbauend entwickeln wir in ihren Grundzügen eine operative Geometrie-Didaktik (Kapitel 3) und konkretisieren sie anhand einiger Unterrichtsbeispiele (Kapitel 4) - ein Vorhaben, für das auch künftig noch manches zu tun übrig bleibt.

Eine gewisse Sonderstellung, auch vom Umfang her, nimmt Kapitel 2 ein. Wir haben es eigentlich nicht für eine zusammenhängende, sondern eher für eine mit dem übrigen nach Bedarf gemischte Lektüre eingerichtet. Es bietet weniger Diskurs, dafür aber Möglichkeiten zum Nachschlagen, Querfeldein-Lesen und Stöbern. Seine Beispielsammlung sollte zwar nicht vollständig sein, aber immerhin doch eine gewisse Systematik enthalten. Vielleicht ist manchem auch das noch zu viel, etwa mit der Begründung, solche Funktionsanalysen technischer und Alltagsgegenstände (wie Tischplatte, Wälgerholz, Schraubenmutter, Korkenzieher, Archimedische Schnecke usw.) lägen einfach auf der Hand. Gewiß, wir könnten - wie Kempinsky oder Freudenthal dies im übrigen völlig zurecht getan haben - dem Leser (und insbesondere dem um Material bemühten Lehrer) vorschlagen, einfach in seinem alltäglichen Umfeld die Augen offen zu halten, sich in bewußtem Sehen zu üben und so zu einem Repertoire von Beispielen geometrisch-funktioneller Formerkundung zu gelangen. Dies ist auf alle Fälle wünschenswert, im allgemeinen jedoch für den 'Anfänger' schwieriger als man glauben möchte. Ganz abgesehen davon, daß es auch anspruchsvollere Beispiele gibt, entstehen Schwierigkeiten vorwiegend dadurch, daß man scheinbar Selbstverständliches und in langer Erfahrung Vertrautes von neuem durchdenken und rekonstruieren muß. Wir haben dies an uns selbst erfahren und, teilweise extrem, bei Studenten, die anfänglich große Hemmungen zeigten, sich ernsthaft auf Überlegungen einzulassen wie die, weshalb Räder kreisförmig oder Blumentöpfe kegelstumpfförmig seien, und ähnliches mehr. Im Hintergrund raunte dabei überdies ständig die Frage: Was hat das alles mit Geometrie oder gar mit Geometrie-Unterricht zu tun? - Das zweite Kapitel soll nicht nur das aufklären, sondern darüber hinaus mit seinen Beispielen auch Material bereithalten, in dem man nachschlagen oder Anregungen suchen kann.

Für wen der Text geschrieben ist

Wir müssen schließlich noch auf die Frage eingehen, an wen wir uns mit diesem Buch richten.

Mögliche Adressaten sind

(1) Studenten für das Lehramt in Mathematik,

(2) Mathematiklehrer aller Schulstufen, die Anregungen für ihren Geometrie-Unterricht suchen,

(3) Dozenten aller Hochschulen, die sich für didaktische Fragen der Geometrie (und der Technik als geometrischer Praxis) interessieren (Mathematik- und Technik-Didaktiker, Mathematiker),

(4) mathematisch oder wissenschaftstheoretisch orientierte Philosophen mit Gebieten wie Philosophie der Mathematik oder der Physik, Technikphilosophie, 'Protophysik',

und allgemein natürlich jeder, der sich für den Unterricht und/oder die (philosophischen) Grundlagen der Geometrie interessiert. Hierzu bedarf es noch einer zweifachen Erklärung:

Erstens: Sicherlich richtet sich das Buch - vor allem mit Teil I - an Lehrer und solche, die es werden wollen, obwohl es weder ein Lehrbuch der Geometrie noch eine methodische Unterrichtsanleitung darstellt. Nicht zuletzt richtet es sich, zusammen mit Teil II, aber auch an Leser, die ein Allgemeininteresse an Geometrie, ihren Grundlagen und ihrer Vermittlung haben oder die sich mit Wissenschaftsphilosophie oder -geschichte beschäftigen. Natürlich hoffen wir auch, spezialisierteren Interessen an Aufbau und Eigenart der 'operativen Geometrie' etwas bieten zu können. Es ist dabei unter anderem eine Absicht unseres aspekteverbindenden Vorgehens, dem Leser auch den Zusammenhang zwischen den spezielleren und allgemeineren Interessengebieten zu vermitteln. Daß dies nicht durch Verabreichung 'elementarisierter' Schonkost zu erzielen ist, liegt auf der Hand.

Zweitens: Wir legen hier einen weiteren Begriff von Didaktik zugrunde, als das vielleicht landläufig geschieht. Didaktik umfaßt als Wissen über den Erwerb von Wissen immer auch ein bestimmtes metatheoretisches und historisches Verständnis der Wissensinhalte. Natürlich ist vom Lehrer solches 'Meta-Wissen' nicht seinerseits an Lernende einfach weiterzureichen; auch ist es keine vage Überwölbung des Stoffes, sondern vielmehr eine Bedingung für eine bewußter sehende und flexiblere

Einstellung des Lehrers zum Stoff. Wir müssen zugeben, daß hier ein Problem der Lehrer(aus)bildung liegt, das im allgemeinen noch weitgehender Klärung bedarf, insbesondere was Struktur und Vermittlung dieses Wissenschaftsverständnisses selbst angeht. Andererseits weiß man inzwischen sehr wohl, wie bedenklich sich didaktische Konzepte und Maßnahmen auswirken können, in denen solche allgemeineren Verständnisprobleme nicht genügend berücksichtigt werden. Die sog. Mengenlehre in der Schule ist dafür ein Beispiel. Daraus zu lernen bedeutet für uns allerdings, auch unsere operative Interpretation der Geometrie nicht mit einem reduzierten Programm an die Öffentlichkeit zu bringen. Zugespitzter gesagt, erschien es uns als sachlich und gerade auch pädagogisch wenig angemessen, das operative Konzept von seinen geschichtlichen Motiven abzuschneiden sowie aus seinen übrigen vielfältigen externen Beziehungen herauszulösen, um es auf pädagogischen Sonderbeeten zwecks Züchtung von Sonderformen anzupflanzen.

1. DIE BEGRIFFE DER GEOMETRIE

Geometrie zu lernen und zu betreiben bedeutet größtenteils, geometrische Begriffe zu erwerben und mit ihnen umzugehen. Eine Didaktik der Geometrie muß daher vorab Antworten auf folgende Fragen suchen: Was ist das Besondere an den Begriffen der Geometrie im Vergleich zu Begriffen überhaupt? Welche Rolle spielen sie in der menschlichen Erkenntnis? Inwiefern und warum passen sie auf die Wirklichkeit? Wie werden sie gebraucht, und wie kann und sollte man sie erwerben?

Diese Fragen sind alles andere als leicht, auch schmecken sie ein wenig nach Philosophie. Der Leser, zumal wenn er sich nicht für Wissenschafts- oder Grundlagentheorie interessiert, kann sich gleichwohl auf unseren Versuch einlassen, eine (vorläufige) Antwort auf einige jener Fragen zu finden. Wir jonglieren mit keinerlei Spezialwissen, und unser Standpunkt ist der des gewöhnlichen Alltagswissens. Zudem fassen wir uns kurz, allerdings werden die Dinge auch nur in erster Näherung gesagt. Der tiefer eindringende Kritiker kann zu den ihm fehlenden Einzelheiten in Teil II nachlesen.

1.1. Was ist ein Punkt?

Angesichts dieser Frage zerfällt der angesprochene Personenkreis in zwei Klassen. Die erste Klasse besteht aus denen, die in einer Vorlesung oder in einem Buch über Geometrie bereits erfahren haben, daß die Frage 'sinnlos' ist oder daß ein Mathematiker sie sich nicht zu stellen braucht. Grundsätzlich ist es natürlich verdächtig, wenn jemand ein Problem löst, indem er es zum Scheinproblem erklärt. Allerdings gibt es in diesem Fall einen Grund: Wenn wir Lehrsätze der Geometrie beweisen, müssen wir wohl wissen, daß durch zwei Punkte eine Gerade geht; daß zwei Geraden sich in höchstens einem Punkt schneiden; daß drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte eine Ebene festlegen, und ähnliches mehr. Aber niemals sind wir genötigt, ein Wissen darüber, was ein Punkt sei, zu investieren. Man könnte zugespitzt sagen: Nicht auf die Begriffe selbst kommt es an, sondern auf die Beziehung zwischen ihnen.

Demgegenüber scheinen die Personen der zweiten Klasse einer eher naiven oder, weniger wohlwollend betrachtet, verbohrten Auffassung anzuhängen. Besonders der Laie glaubt häufig, in der Mathematik würden alle Begriffe exakt definiert, erst recht in der Geometrie, dem traditionellen Muster an Strenge und Genauigkeit. Fragen wir z.B.: Was ist ein Kreis? - Ein Kreis ist die Gesamtheit aller Punkte einer Ebene, die von einem festen Punkt denselben Abstand haben. - Die Definition ist einwandfrei; allerdings kommen in ihr weitere Begriffe vor: Abstand, Ebene und auch der besagte Punkt. Also muß doch definiert werden, was ein Punkt oder was eine Ebene ist?

Euklid, das prominenteste Mitglied unserer zweiten Klasse, gab vor rund 23 Jahrhunderten in seinen "Elementen" folgende Erklärung: Ein Punkt ist, was keine Teile hat. Eine ebene Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.- Diese ziemlich vagen Aussagen hat man oft belächelt. Sie sind ja keine Definitionen, wie sie sonst in der Mathematik üblich sind. Außerdem kann man sie bei der Begründung geometrischer Lehrsätze nicht gebrauchen. Aber vielleicht haben sie und ähnliche Erklärungen eine ganz andere Aufgabe?

In der Tat. Für die altgriechischen Geometer und ihre wissenschaftlichen Nachfahren in zwei Jahrtausenden nach ihnen war Geometrie gleichbedeutend mit Lehre von Figuren und figürlichen Beziehungen im wirklichen Raum. Sprach man von Punkten, Linien und Flächen, so dachte man an entsprechende reale Objekte, die unabhängig vom menschlichen Denken und Bewußtsein existieren. Unterschiedliche Auffassungen konnte es lediglich über die Art dieser Realität geben (ob ideell oder materiell). Nimmt man aber einen realen Inhalt der geometrischen Begriffe an, dann muß auch die Frage erlaubt sein, welche Vorstellung man mit ihm verbinden soll.

So gesehen ist also die Frage "Was ist ein Punkt?" keineswegs eine Scheinfrage. Und dies wird noch deutlicher, wenn wir die zuerst genannte Auffassung einmal genauer betrachten. Danach brauchen wir, streng genommen, nicht zu wissen, was mit den einzelnen Begriffen gemeint ist, sondern nur, nach welchen Regeln wir sie gebrauchen. Es gibt zwei Arten von Gebrauchsregeln: Definitionen und Axiome. Das obige Beispiel des Kreisbegriffs zeigt, daß in Definitionen immer wieder neue Begriffe auftauchen, die selbst noch nicht definiert sind. Eine gewisse Auswahl von Begriffen, System der Grundbegriffe genannt, muß demnach undefiniert zurückbleiben. Die Beziehungen zwischen diesen formuliert man in Form von Axiomen. Es ist dann im Prinzip gleichgültig, was man unter 'Punkt', 'Gerade', 'Ebene' und den übrigen Grundbegriffen versteht, wenn nur bei diesem Verständnis - oder wie man auch sagt: bei dieser Interpretation - die Axiome erfüllt sind. Auf solche Weise wird aus der klassischen Axiomatik Euklids die formale Axiomatik David Hilberts, der sie um 1900 in seinen "Grundlagen der Geometrie" zur Vollendung gebracht hat.

Hilberts Standpunkt, manchmal auch als Formalismus bezeichnet, ist die geeignete Grundlage für das mathematische Studium von Axiomensystemen, insbesondere bei Fragen der Abhängigkeit gewisser Axiome von den übrigen. Kurz, der Formalismus erfüllt seinen Zweck bei der Analyse formaler Systeme (Kalküle). Eine darüber weit hinausgehende Aufgabe ist es, ein angemessenes Verständnis von Mathematik als einer menschlichen Erkenntnistätigkeit zu entwickeln. Natürlich war sich Hilbert darüber im klaren, daß der formalistische Standpunkt wenig hilfreich ist, wenn wir uns etwa die Fragen stellen: Wie kommen wir auf dieses oder jenes Axiom? Und was berechtigt uns zu seiner Annahme? Welches ist allgemein die Quelle geometrischer Erkenntnis? - Damit stehen wir übrigens schon recht nahe bei den didaktischen Problemen der Begriffsbildung und der Aneignung geometrischer Begriffe.

Das Nachdenken über diese Fragen hat eine philosophisch geprägte Tradition und kreist vor allem um einen Begriff: Anschauung. Philosophen neigten meist dazu, sich mehr oder weniger komplizierte Theorien der Anschauung auszudenken. Demgegenüber verweisen Geometer lieber auf ihren sinnvollen Gebrauch. Einer von ihnen, Oskar Perron, präsentiert in seiner "Nichteuklidischen Elementargeometrie der Ebene" (1962) die folgende parodistisch anmutende, von ihm als "höchst undogmatisch" bezeichnete Definition: "Ein Punkt ist genau das, was der intelligente, aber harmlose, unverbildete Leser sich darunter vorstellt. Und die Definition für die Gerade lautet genau so. Noch einfacher ist die Definition der Ebene, ... unsere Ebene ist einfach die Schultafel oder das Blatt Papier, worauf wir die Figuren zeichnen." (S.11).

Dies ist natürlich auch nicht die Art von Definition, die man in der Mathematik gewöhnlich benutzt, und so wird der intelligente Leser fragen: Was versteht Perron unter einem intelligenten (aber dabei harmlos gebliebenen) Leser? - Einen Teil der Antwort finden wir auf derselben Seite. Da ist die Rede von einem Menschen, der auf einem Blatt Papier gerade von krummen Linien unterscheiden kann und dem in der Schule Lineale und Häuserkanten den Begriff 'gerade' illustrierten.

Gewiß sind diese Beispiele Objekte der Anschauung, und es ist auch richtig, daß sich ohne anschauliche Grundlage Geometrie nicht sinnvoll betreiben läßt, jedenfalls nicht in Anwendung auf die räumliche Wirklichkeit. Aber wieso finden wir überhaupt geeignete Anschauungsobjekte? Weshalb passen unsere geometrischen Begriffe auf die Wirklichkeit? Häufig gibt man hierauf die Antwort: Unsere Begriffe passen auf die Wirklichkeit, weil wir sie ihr zuvor entnommen haben. - Wie geschieht aber dieses 'Entnehmen'? Ein Lineal und eine Häuserkante nehmen wir anschaulich wahr. Um beide als Gerade zu erkennen, müssen wir allerdings noch von ihren Unvollkommenheiten absehen (abstrahieren) und die ihnen gemeinsame Eigenschaft des Geradeseins herausheben. Haben zwei Dinge diese Eigenschaft gemein, so werden sie identifiziert. Das ist der Grundgedanke der sog. Abstraktionstheorie.

Die Abstraktion (abstraktive Begriffsbildung) spielt eine große Rolle in der Mathematik; aber sie hat auch ihre Grenzen. Im folgenden werden wir zeigen, daß ihre Anwendung auf die geometrischen Grundbegriffe oberflächlich bleibt. Abstraktion ist dann (im nächsten Abschnitt) durch ein anderes Verfahren zu ersetzen.

Der Mangel der Abstraktionstheorie (angewandt auf die Grundbegriffe der Geometrie) ist am klarsten zu erkennen, wenn wir uns zuvor einmal ansehen, wo sich die Abstraktion mit Erfolg einsetzen läßt. Als Beispiel diene der Aufbau der Arithmetik im Rahmen der naiven Mengenlehre. Ein solcher Aufbau führt den Begriff der natürlichen Zahl auf den der Menge zurück. Im vorigen Abschnitt waren Lineal, Häuserkante und ähnliches mehr Ausgangsmaterial für den Geradenbegriff; jetzt sind (endliche) Mengen das Ausgangsmaterial für den Zahlbegriff. Der Grundgedanke ist einfach: Zwei Mengen werden identifiziert, wenn sie gleichmächtig sind, d.h. die gleiche Anzahl von Elementen enthalten. Eine Zahl (genauer: Kardinalzahl) ist dann im Rahmen der Mengenlehre zu definieren als Klasse gleichmächtiger Mengen.

Hier liegt zunächst folgender Einwand nahe: Um zu wissen, was eine Zahl ist, müssen wir wissen, wann zwei Mengen gleichmächtig sind. Dazu ist jedoch festzustellen, ob sie die gleiche Anzahl von Elementen haben. Also benutzen wir doch schon den Zahlbegriff und haben uns insgesamt nur im Kreis bewegt? - Der Einwand ist soweit stichhaltig; er wird aber hinfällig, sobald die Gleichmächtigkeit von Mengen erklärt wird, ohne daß dabei die Elemente zu zählen sind. Das Verfahren findet sich heutzutage in jedem mathematischen Grundschulbuch: Wenn sich 34 Kinder auf 34 Stühle setzen und kein Stuhl frei bleibt, dann weiß man auch ohne Nachzählen, daß genausoviele Kinder da sind wie Stühle - oder im Mengenjargon: daß die Menge der Kinder zur Menge der Stühle gleichmächtig (d.h. umkehrbar eindeutig auf sie abbildbar) ist.

Kehren wir nun zurück zur Abstraktionstheorie der geometrischen Grundbegriffe. Ihr läßt sich ein ganz entsprechender Einwand entgegenhalten: Wenn wir Lineal und Häuserkante (als gerade) oder Blatt Papier und Schultafel (als eben) identifizieren, so müssen wir doch wissen, von welchen Eigenschaften wir absehen sollen. Ein Lineal und eine Schultafel ließen sich vielleicht identifizieren, weil beide aus Holz gemacht sind. Aber ein Lineal und eine Häuserkante? Wie findet man die ihnen gemeinsame Eigenschaft des Geradeseins, ohne den Begriff der Geraden nicht schon zu gebrauchen? Hier nützt auch die Feststellung nichts, daß beide (annähernd) die gleiche Form haben, denn es kommt ja darauf an, daß dies die Geradenform und nicht eine beliebige andere ist. Anders als bei den Zahlen ist bei den Formen das Problem der Identifizierung nicht in zufriedenstellender Weise zu lösen; an ihm scheitert die Abstraktionstheorie.

1.2. Begriffe werden verwirklicht

Daß geometrische Begriffe und räumliche Wirklichkeit etwas miteinander zu tun haben, ist sicher niemals ernsthaft bezweifelt worden. Aber wie wir gesehen haben, wird dieser Zusammenhang durch den Hinweis auf Anschauung und Abstraktion (aus der Anschauung) nur oberflächlich erklärt.

Eine einfache Unterscheidung hilft hier weiter: Objekte der Anschauung sind entweder natürlich oder künstlich. Natürliche Anschauungsobjekte für geometrische Grundformen sind z.B. Lichtstrahlen, Bahnen fallender Körper, eine stille Wasseroberfläche oder die Seitenflächen, Kanten und Ecken eines Kristalls. Die von Perron genannten Beispiele sind hingegen künstliche Objekte, von menschlicher Technik hervorgebrachte Dinge: Zeichnungen auf einem Blatt Papier, das Blatt Papier selbst, Lineale, Wandtafeln, Häuserkanten. Man könnte diese Reihe mühelos fortsetzen mit Tischplatten, Ziegelsteinen, Würfeln, Walzen, Schrauben und dgl. mehr. Die weitaus meisten Anschauungsbeispiele sind von dieser Art.

Natürliche Objekte als Anschauungsbeispiele bringen eine doppelte Schwierigkeit mit sich. 1. Wenn man erklären will, weshalb sie so und nicht anders geformt sind, dann braucht man dazu schon eine physikalische Theorie (z.B. des elektromagnetischen oder des Gravitationsfeldes, der inneren Struktur fester Körper usw.). 2. Bis zu einem gewissen Grade ist ihre Beschreibung willkürlich. Der Physiker kann seine Geometrie so einrichten, daß das Licht gerade Bahnen zurücklegt, aber auch so, daß die Bahnen gekrümmt erscheinen. Ferner ist eine größere Wasseroberfläche (als Äquipotentialfläche im Schwerefeld der Erde) kugelförmig und daher nur angenähert und mit einem systematischen Fehler eine Ebene. - Naturdinge verlangen naturwissenschaftliches Verständnis und das wiederum eine fertige Geometrie; wer aus ihnen bloße Anschauungsbeispiele für Formen macht, der steckt sie in eine häufig viel zu triviale Statistenrolle. Auch der Geometrie ist damit wenig gedient.

Ganz anders ist da die Lage bei den technischen Artefakten, den vom Menschen hergestellten Dingen. - Man sollte hier nicht gleich an die komplizierteren Apparate (wie Automotoren, Kühlschränke, Radios) denken; gerade die einfachsten Geräte und Gegenstände des alltäglichen Lebens (wie Mobiliar, Werkzeug, Zeichengerät) lassen erkennen, welche Bedeutung die grundlegenden Formen der Geometrie besitzen. Wie Naturdinge sind auch Artefakte nicht bloß Anschauungsbeispiele, auch bei ihnen wird man fragen, weshalb sie so und nicht anders geformt sind. Warum ist eine Tischplatte eben, ein Blatt Papier (oder Buch) rechteckig, der Rand einer Schraubenmutter (meistens) ein regelmäßiges Sechseck? Die Antworten auf solche Fragen sind wohl unterschiedlich, sie haben aber alle eines gemeinsam: sie greifen zurück auf den jeweilig praktischen Zweck des Gerätes. Ein praktischer Zweck verlangt die Erfüllung bestimmter Funktionen, und die erfordert wiederum die Entwicklung geeigneter Formen, zunächst begrifflich (auf dem 'Reißbrett') und dann in praktischer Herstellung (in der 'Werkstatt').

Um natürliche Phänomene zu verstehen, hat man Physik, Chemie oder Biologie zu betreiben, und geometrische Begriffe spielen dabei eben keine kleine Rolle; sie sind aber schon entwickelt, bevor wir mit ihnen die Wirklichkeit begreifen. Beim

Verständnis künstlicher Dinge hat man umgekehrt vorzugehen und nachzuvollziehen, wie ausgehend von einer Zweckanforderung eine Formidee zunächst herausgebildet und dann verwirklicht wird. Geometrische Begriffe und räumliche Wirklichkeit stehen somit in einer doppelten Beziehung:

- Wirkliches wird begriffen.
- Begriffe werden verwirklicht.

Beim ersten Teil schaffen wir durch Auswahl und Zusammenbau geeigneter Begriffe immer bessere Vorstellungen (Modelle, Theorien) der uns umgebenden Welt. - Beim zweiten realisieren wir an Körpern durch geeignete praktische Verfahren geometrische Formen (evtl. in wachsender Genauigkeit) zur Erfüllung vorgegebener Zwecke. - Auf fortgeschrittener Stufe sind die beiden Beziehungen nicht getrennt oder gegensätzlich, sondern gehören zu einer - wenigstens als Ziel gedachten - Einheit von wissenschaftlicher Erkenntnis und technischem Handeln, von Gnosis und Praxis. Unsere Aufgabe ist es jedoch, die Bildung geometrischer Begriffe in ihren Anfangsstufen zu verfolgen. Dabei tritt nun naturgemäß der zweite Teil des Wirklichkeitsbezuges in den Vordergrund. Denn zum einen liefert er die inneren Motive, aus denen heraus geometrische Begriffe gebildet werden; zum anderen läßt er besser verstehen, wieso diese Begriffe schließlich auf die Wirklichkeit passen. Es kann ja nicht verwundern, daß Begriffe auf eine Wirklichkeit passen, die künstlich, nämlich nach Maßgabe jener Begriffe, hergestellt worden ist. Man kann aus ihr mindestens das herausholen, was man in sie hineingesteckt hat. Anders bei den Naturerscheinungen - für diese Wirklichkeit gilt (nach einer berühmten Sentenz Einsteins), daß sich die Sätze der Mathematik, insofern sie sicher sind, nicht auf sie beziehen. Zumindest ist es immer wieder problematisch, ob und warum ein bestimmtes Begriffssystem auf die (natürliche) Wirklichkeit paßt. Hier trifft ein weiteres Wort Einsteins: Das Unbegreiflichste an der Natur ist ihre Begreifbarkeit.

Nunmehr ist auch klar, was wir an die Stelle der Abstraktionstheorie zu setzen haben: Es ist eine Lehre von der <u>ideativen Begriffsbildung</u> (oder kurz: <u>Ideation</u>), wonach geometrische Begriffe aus Zweckmotiven heraus entwickelt und dann mittels eines Herstellverfahrens in die Realität hineingetragen, besser noch: hineingeformt werden. Abstraktion ist ein Absehen von bestimmten Eigenschaften, die ein Ding besitzt. Ideation ist ein Hineinsehen von Eigenschaften, die ein Ding nicht - oder doch nur unvollkommen - besitzt. Das Hineinsehen läßt sich steigern zum Hineinformen, und dann nennen wir die Begriffsbildung <u>operativ</u>: Das Formen geschieht nach bestimmten <u>Handlungsvorschriften</u>, die wir auch Normen nennen. Wird ein Begriff operativ gebildet, so liegt sein Sinn, seine inhaltliche Grundlage in den Handlungen, die ihn verwirklichen, und den Zwecken, die damit erfüllt werden.

Unsere Philosophie scheint einleuchtend, ja geradezu selbstverständlich zu sein, jedenfalls auf dem Papier. Es kommt aber darauf an, sie anzuwenden, und das heißt: geometrische Begriffe auch tatsächlich operativ zu bilden. Daß dies im Unterricht nicht geschieht, beweist der übliche (auch von Perron empfohlene) Umgang mit Anschauungsbeispielen: man zeigt eine Tafel oder ein Blatt Papier, und darauf Punkte und Geraden. Punkte sind da, wo die Geraden sich schneiden, und die Geraden werden mit Lineal und Bleistift gezeichnet, die es im Schreibwarenladen zu kaufen gibt. Anschauung ist gut, aber bloßes Verweisen auf anschaulich Gegebenes gleicht dem Märchen vom Klapperstorch. - Nun, woher kommen die Lineale? Sie kommen aus der Fabrik, und dort werden sie - je nach Material - gegossen, geschnitten oder geschliffen - natürlich nach geraden Musterformen. Und wie sind die Musterformen entstanden? Vielleicht mit Hilfe anderer Musterformen, am Ende jedenfalls durch den Schnitt zweier ebener Flächen. Damit stellt sich dieselbe Frage für die Ebene. Man kann auf verschiedene Arten eine ebene Fläche herstellen, wenn bereits eine entsprechende Form zur Verfügung steht. Aber nicht alle Ebenen können durch Kopien gewonnen werden, und damit entsteht die Aufgabe ihrer <u>Ersterzeugung</u>. Diese Aufgabe ist nichts Mysteriöses, sie verlangt lediglich eine Verfahrensvorschrift, nach der man Ebenen herstellen kann, ohne dabei andere Ebenen zu benutzen.

Das Problem der Ebenen-Herstellung ist das eigentliche Lehrstück der operativen Begriffsbildung in der Geometrie, und wir wollen uns ihm daher möglichst unvoreingenommen nähern. Vielleicht denkt mancher Leser, es komme jetzt darauf an, ein möglichst trickreiches Herstellverfahren auszutüfteln; aber dem ist nicht so. Sicherlich wird man eine gute Methode stets willkommen heißen, und der Praktiker sucht verständlicherweise immer nach der besten. Aber selbst wenn unser bestes Verfahren schlechter wäre als nötig, z.B. schlechter als das tatsächlich bekannte, so könnte dies doch nichts an der Art und Weise ändern, in der die Idee der Ebene operativ zu bilden ist - und dies muß auch so sein, denn die <u>Idee</u> der Ebene besteht unabhängig von einem speziellen Verfahren zu ihrer Realisierung. Wer eine ebene Fläche herstellen will, der muß ja wissen, <u>was</u> er da tun will, d.h. er muß die Idee der Ebene schon besitzen oder ihren Inhalt sich nach und nach bewußt machen.

Wie schwer aller Anfang ist, zeigen die ältesten Schneidewerkzeuge der Menschheit oder die im alten Orient zum Bauen benutzten Steine. In jenen Zeiten hätte niemand eine vernünftige Glasscheibe, einen Ziegelstein heutiger Güte oder gar eine Billardkugel formen können. Dennoch waren solche Formen ansatzweise vorhanden, und spätestens in der Antike beherrschte man ihre Herstellung meisterhaft. Hier wählen wir einmal das Beispiel 'Tischplatte', um den Inhalt des Ebenenbegriffs ans Licht zu bringen. Wozu soll eine Tischplatte dienen? Als Eßstatt, auf die wir unser Geschirr stellen, und überhaupt als Ablagefläche für alle möglichen Gegenstände. Eine Tischplatte darf also keine Buckel oder Mulden haben, wir wollen die Dinge auf ihr beliebig plazieren oder herumschieben können; und soll sie gar als Schreibunterlage dienen, so darf sie auch nicht rauh sein, kurzum: Wir verlangen die Gleichartigkeit (Homogenität oder Ununterscheidbarkeit) aller ihrer Stellen. Die Größenordnung, in der wir die Stellen zum Vergleich wählen, richtet sich ganz nach dem praktischen Zweck. Darf die Platte nicht rauh sein, so müssen wir schon recht kleine Stellen betrachten. Entfällt schließlich jede einschränkende Bedingung für die Stellen, so ist ihre Gleichartigkeit nur noch mehr oder weniger unvollkommen zu verwirklichen - in hinreichend kleinen Bereichen gibt es dann doch stets wieder Unregelmäßigkeiten. Gleichwohl läßt sich die Ununterscheidbarkeit denken, sie ist dann aber wenigstens noch eine Norm für unser Handeln. Damit haben wir die Idee der Homogenität als einen wichtigen Teil des Ebenenbegriffs entwickelt:

Alle Stellen der Fläche sollen gleichartig sein, d.h. eine Eigenschaft, die einer Stelle der Fläche zukommt, kommt allen ihren Stellen zu.

Wir müssen dies zunächst noch ein wenig erläutern: Welche Eigenschaften soll man hier wählen? Nun, als erstes werden wir solche Eigenschaften ausschließen, die ganz offenkundig nicht die Form der Fläche betreffen, z.B. die Eigenschaft einer Stelle, rot zu sein, oder: aus Holz zu sein usw. Sodann ist Vorsicht geboten bei Eigenschaften, die einen Parameter enthalten, was in der Regel bedeutet, daß sie nur relativ zu einem Bezugssystem bestehen. Einfache Beispiele sind etwa die Eigenschaft einer Stelle, auf dem Erdäquator zu liegen, oder die, von irgendeiner fest gewählten Stelle den Abstand 10 cm zu besitzen. - Wie kann man dann aber ungleichartige Stellen einer Fläche unterscheiden? Nehmen wir etwa eine Konservendose, so springt doch der Unterschied zwischen Stellen auf der scharfen Kante und den übrigen Stellen der Oberfläche ins Auge. Durch folgenden einfachen Versuch (Abb.1) läßt sich der Unterschied aber auch 'geometrisch' fassen:

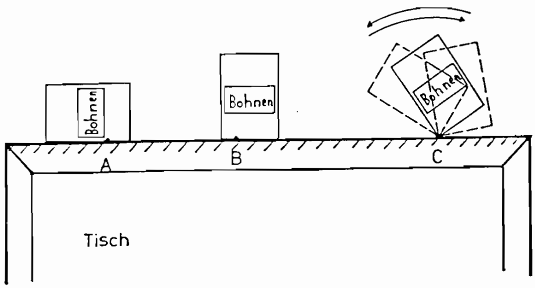


Abb. 1

Man legt oder stellt eine Dose auf einen Tisch, so daß eine gewisse Stelle A auf dem Mantel bzw. B auf dem Boden die Tischfläche berühren. Nun soll die Dose bewegt werden, wobei A bzw. B dauernd in der Tischfläche liegen. Dies ist nur möglich, wenn die Dose ihre Lage zum Tisch beibehält; und das ist offensichtlich beim Kantenpunkt C nicht der Fall.

Es gibt aber noch eine direktere und zudem allgemeinere Methode: Wir machen von den Stellen A, B und C kleine Gipsabdrücke. Der Abdruck von C paßt dann nicht auf A oder B, aber der Abdruck von A paßt auch nicht auf Boden oder Deckel. Man sieht: es gibt drei Sorten von Stellen auf einer Konservendose. - Mit diesem Verfahren lassen sich auch leicht Stellen auf einem Hühnerei unterscheiden (Abb.2).

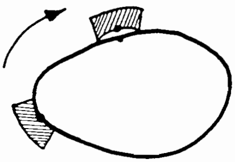


Abb.2

Eine mehr mathematische Version der Gipsabdrücke enthüllt uns schließlich diejenigen Typen von Flächen, die der Idee der Homogenität genügen. Es sind dies die <u>Ebene</u> sowie die Oberflächen von <u>Kugel</u> und (unendlichem Kreis-)<u>Zylinder</u>.

Beispielsweise genügt es demnach nicht, von einer Tischplatte zu verlangen, daß ihre Stellen gleichartig sind - sonst müßte man gegebenenfalls mit einer Kugelkalotte vorlieb nehmen. Es kommt also bei der Ebene zur Homogenität noch etwas hinzu: Eine Ebene zerteilt den Raum in zwei gleiche Teile, anders gesagt: ihre äußeren (nicht auf ihr liegenden) Stellen sind sämtlich gleichartig. Wir nennen dies gelegentlich ihre <u>äußere</u> Homogenität (im Unterschied zu der oben formulierten <u>inneren</u>). Die Oberflächen von Kugel und Zylinder besitzen nun in der Tat keine äußere Homo-

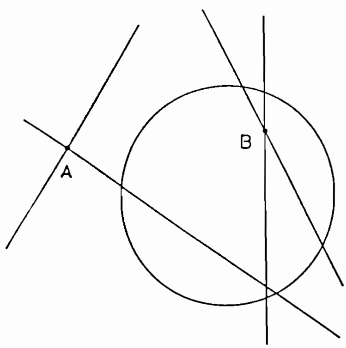


Abb.3

genität. Z.B. gilt für einen Punkt B im Kugelhohlraum, daß jede Gerade durch ihn auch die Kugelfläche schneidet; für einen Punkt A jenseits der Wand trifft dies jedoch nicht zu (Abb.3).- Gegenüber den Begriffsstipulationen in üblichen geometrischen Systemen hat die Idee der Homogenität, die ja zunächst außerhalb eines solchen Systems liegt, einen entscheidenden Vorzug: sie läßt sich unmittelbar verwirklichen. Das simpelste Verfahren, das schon die Steinzeitmenschen benutzten, ist das Behauen einer ungleichmäßigen Fläche. Brauchbare Homogenität erzielt man aber erst, indem man grob vorpräparierte Flächen gegeneinander abschleift. Schleifen schafft innere Homogenität. Probiert man es mit Blöcken aus Gips, Stein oder Glas, so entstehen leicht Kugelflächen. Will man hingegen Platten wirklich eben schleifen, so muß auch äußere Homogenität geschaffen werden; die Stellen auf P dürfen sich nicht von denen auf P unterscheiden: Ein Abdruck einer kleinen Umgebung von B muß auf A passen (Abb.4). Das erreicht man am leichtesten durch Hinzuziehen einer dritten Platte P , die man zwischendurch wiederholt an P und an P schleift. - Der Ursprung dieses Dreiplatten-Schleifverfahrens ist nicht mit Sicherheit geklärt. Englische Ingenieure und Mechaniker verwendeten es jedenfalls im 18. und 19. Jahrhundert zur Herstellung von Stahlebenen höchster Präzision.

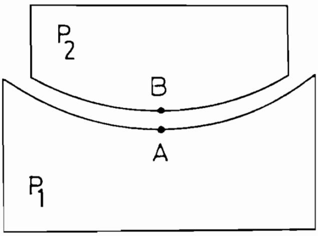


Abb.4

Wir sehen: die Idee der Homogenität läßt sich zwar unmittelbar verwirklichen, aber dennoch nicht auf einen Schlag. Zunächst benötigt man zumindest grobe Vorformen; dann erfolgt Ebenen-Urzeugung im Dreiplattenverfahren. Die technische Genauigkeit, die man durch solche Ebenen gewinnt, setzt man nun zur Entwicklung feinerer Kontroll- und Verbesserungsmethoden ein, wie sie heute gang und gäbe sind. Natürlich ist dies ein recht verwickelter technologischer Prozeß, der auch längere Zeit beansprucht. Er ist gekennzeichnet durch eine Folge von Genauigkeitsschichten, in der man sich der Idee der Ebene (oder Homogenität) so weit wie jeweils möglich annähert, ohne sie allerdings jemals wirklich zu erreichen. Dieses Ausschöpfen einer Idee nennen wir Exhaustion. Natürlich ist schon ein einzelner Herstellvorgang exhaustiv mit seiner Folge von grobem Vorformen, Abschleifen und Polieren.

Es ist das Prinzip der Exhaustion, das die Ideen der Geometrie in die Wirklichkeit einführt und dafür sorgt, daß die Geometrie auf diese Wirklichkeit paßt.

1.3. Das Prinzip der operativen Begriffsbildung

Unsere Betrachtungen über die Art, wie geometrische Begriffe operativ gebildet werden, wollen wir nun zu einer Kernaussage verdichten, die sich als didaktisches Prinzip verwenden läßt.

Zu diesem Zweck geben wir zunächst noch einmal eine knappe Zusammenfassung der vorangegangenen Überlegungen und illustrieren diese am Beispiel des Würfelbegriffs:

Geometrische Begriffe, vor allem Grundbegriffe, werden nicht durch Abstraktion, durch Absehen von gewissen Eigenschaften an realen Gegenständen gebildet, sondern durch Ideation, durch Hineinsehen bestimmter Eigenschaften in die Realität. Über ein Hineinsehen hinaus werden sie aber auch verwirklicht (z.B. die Idee des Hexaeders als Spielwürfel) und erhalten so eine inhaltliche (operative) Grundlage: nämlich in Gestalt von Normen, die in der Realität durchzusetzen und in Handlungsvorschriften umsetzbar sind (forme einen handlichen, kompakten Lehmklumpen zu einem Polyeder mit lauter rechten Winkeln und kongruenten Kanten!). Dabei sind Ideen keineswegs irgendwelche willkürliche Erfindungen; gelegentlich werden sie wohl durch Umweltphänomene angeregt, meistens entwickelt man sie jedoch zielstrebig, um gewisse Zwecke zu erfüllen, um Probleme des menschlichen Daseins zu lösen, um Bedürfnisse zu befriedigen (wie kann ein Apparat zur Erzeugung von Zufallsexperimenten aussehen, der leicht zu bedienen ist?). Wir wollen nur dann von geometrischen Ideen sprechen, wenn sie sich mit beliebiger Genauigkeit realisieren lassen oder mindestens so genau, daß die hinter ihnen stehenden Bedürfnisse befriedigt werden können (z.B. die Idee des Würfels). So ist gewährleistet, daß die geometrischen Ideen auf die Wirklichkeit passen, ohne ihr zu entstammen; daß das auf ihnen aufgebaute Begriffssystem der Geometrie tatsächlich die räumliche Wirklichkeit strukturiert und die Nutzung dieser Struktur ermöglicht.

Das Prinzip der operativen Begriffsbildung (POB) läßt sich nun folgendermaßen formulieren:

Geometrische Begriffe sind operativ zu bilden, d.h.: Von bestimmten Zwecken ausgehend werden Normen zur Herstellung von Formen entwickelt, die jene Zwecke erfüllen. Die Normen, zumeist Homogenitätsforderungen, werden in Handlungsvorschriften zu ihrer exhaustiven Realisierung umgesetzt und sind damit inhaltliche Grundlage der ihnen entsprechenden Begriffe.

Zum Verständnis des POB tut man gut, 'Begriffsbildung' recht weit zu fassen: Dazu gehört der Einbau eines Begriffs in ein Begriffssystem und damit die Fortentwicklung dieses Systems in Form von Sätzen über Begriffe; dazu gehören aber auch Anweisungen zum Begriffsgebrauch, Herstellvorschriften für zweckvolle Realisationen und nicht zuletzt das Lösen von Problemen mit geometrischen Begriffen.

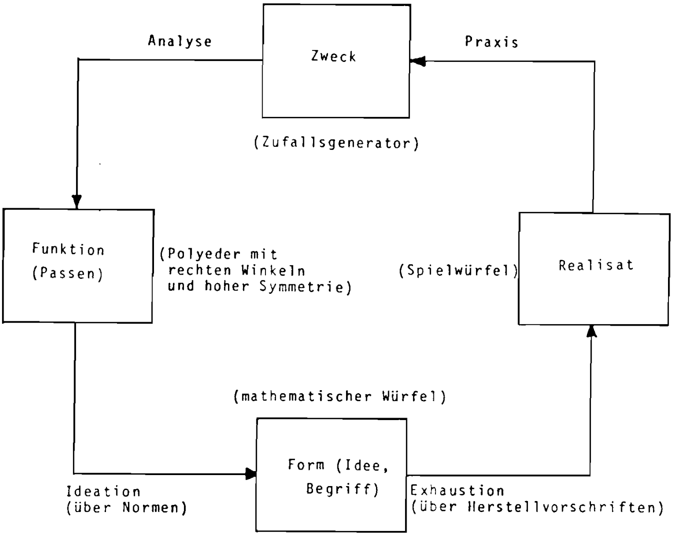


Abb.5 *Schema zum POB (am Beispiel des Würfels)*

Im Begriff des Würfels z.B. stecken dessen Beziehungen zu Quader, Ebene, Quadrat, Strecke, Orthogonalität, Parallelität, Kongruenz von Kanten und Flächen; aber auch die Schnittebene, die bei ihm ein regelmäßiges Sechseck erzeugt, seine Symmetriegruppe, das System der anderen platonischen und archimedischen Körper; seine Verwendung beim Volumenmessen; Vorschriften zur Herstellung eines Würfels aus ebenen Netzen, durch wiederholtes Fallenlassen von Knetekugeln, durch Schleifen; schließlich auch seine Verwendung als Zufallsgenerator.

Der Kern des POB ist die Begriffsbildung durch Herstellung, die Operativität im Begriffserwerb. Die Handlungsvorschriften zur Realisierung geometrischer Begriffe sind deren inhaltliche Grundlage. Für ihr zweckentsprechendes Funktionieren verkörpern die meisten Formen gewisse Homogenitäten und Inhomogenitäten (z.B. Spitze des Kegels). Wie sich bei der Analyse zahlreicher Beispiele zeigt, gibt es im wesentlichen wohl nur drei Arten von Funktionen: eingeschränkte Beweglichkeit, Optimierung und Messen. Alle drei kann man auffassen als Unterfälle des Passens, das uns als allgemeine geometrische Funktion erscheint. Im einzelnen kann der Leser diese Zusammenhänge am Beispiel des Ziegelsteins (Quader) verfolgen, auf das wir etwas näher in Abschnitt 1.4 eingehen werden.

Jeder Unterricht verlangt gewisse Regeln, nach denen sich das Lernen unter der Anleitung eines Lehrers vollziehen soll. Solche Regeln kennt die Pädagogik schon lange, man nennt sie <u>didaktische Prinzipien</u>. Sie gründen sich auf allgemeine pädagogische Ziele und Einsichten, auf ein bestimmtes Verständnis der Lehrinhalte und nicht zuletzt auf Unterrichtserfahrungen im Lichte solcher Konzeptionen. Als Folge davon gibt es vielfältige Beziehungen zwischen den Prinzipien, und man sieht sich der Aufgabe gegenüber, aus ihnen ein ordentliches System zu zimmern. Hier wollen wir allerdings nur auf die wenigen, aber wichtigen Beziehungen aufmerksam machen, die das POB mit anderen didaktischen Prinzipien verbinden.

Das Fundament neuzeitlicher Prinzipienlehren ist das sog. <u>genetische Prinzip</u>. Seine hervorragende Stellung in der Mathematik-Didaktik ist nicht zuletzt den Mathematikern Felix Klein und Otto Toeplitz und Pädagogen wie Benchara Branford oder Alexander I. Wittenberg zu verdanken. Das Prinzip fordert einen 'genetischen' Unterricht, und das bedeutet im allgemeinsten Sinn: <u>Aneignung von Wissen und Begriffen nach dem Vorbild wirklicher Vorgänge von Wissenserwerb und Begriffsbildung</u>.

Wir wollen dies für unsere Zwecke noch ein wenig erläutern. - Der Ausdruck 'Genese' ist eigentlich ganz neutral und bedeutet lediglich 'Entstehung' oder 'Werdegang'. In der Didaktik ist daher klar zu unterscheiden zwischen einem tatsächlich ablaufenden Werdegang (einer faktischen Genese) und einer Genese in Gestalt eines Planes oder eines Entwurfs (man könnte sagen: einer konstruktiblen Genese). Es ist dies derselbe Unterschied, wie er zwischen einer gehaltenen (und im Protokoll festgehaltenen) Unterrichtsstunde und dem dazugehörigen Unterrichtsplan besteht. Genese bedeutet also

1. Entwicklung (faktische Genese),
2. Lehrgang (konstruktible Genese).

Der Begriff 'Entwicklung' hat seinerseits wieder zwei Bedeutungen: Entwicklung eines einzelnen Menschen (individuelle Genese) und geschichtliche Entwicklung einer Disziplin (historische Genese). - Wohin gehört hier nun das genetische Prinzip? - Ganz allgemein könnte man sagen: Das genetische Prinzip fordert u.a. eine <u>Übereinstimmung von Lehrgang und Entwicklung</u>. Allerdings hängt der Sinn dieser Formulierung davon ab, in welcher Bedeutung (individuell, historisch oder beides zugleich) man hier Entwicklung nimmt. (In Teil II gehen wir auf die weitere Frage ein, bis zu welchem Grade Entwicklung und Lehrgang sich wechselseitig beeinflussen.) Gleichzeitige Übereinstimmung eines Lehrgangs mit Einzelentwicklungs- und Geschichtsverlauf ist sicher nur dann möglich, wenn diese ihrerseits übereinstimmen.

Da dieses Problem wohl noch nicht entschieden ist, geht man oft nach der Devise vor: 'von jedem etwas'. Je nach den Gewichten, mit denen individuelle und historische Komponenten in die Mischung eingehen, erhält man eine mehr psychologisch oder eine mehr geschichtlich ausgerichtete Genese. Psychologische Einsichten sind dabei hauptsächlich von Interesse, sofern sie die kognitive Allgemeinentwicklung vergleichbarer Individuen betreffen. Ganz entsprechend sind auch geschichtliche Aspekte nur paradigmatisch in einer Allgemeinheit zu verwenden, die verhindert, daß man sich auf Seiten- oder Irrwegen der Geschichte verläuft oder gar in die antiquarische Anekdote abgleitet. H. Freudenthal spricht deshalb auch treffend von "Wiederentdeckung unter Führung". Kurzum, die vom genetischen Prinzip geforderte Übereinstimmung von Lehrgang und Entwicklung verlangt, vorab auch schon Entwicklungsvorgänge didaktisch zu betrachten.

Was nun das POB anbetrifft, so haben wir einige wesentliche Teile dieser didaktischen Vorarbeit in 1.1 und 1.2 skizziert. Wir stellen damit das POB in den allgemeineren Rahmen des genetischen Prinzips, oder anders gesagt: im POB wenden wir das genetische Prinzip auf die Geometrie an, dies geschieht durch die operative Interpretation geometrischer Begriffe. Wir nennen die Bildung eines Begriffs <u>operativ</u>, wenn sie ideativ erfolgt und der betreffende Begriff (die Idee) verwirklicht wird (etwa nach dem Prinzip der Exhaustion). Zur operativen Begriffsbildung gehört also stets die praktische Herstellung eines Realisates.

Der im POB verwendete Ausdruck 'operativ' bezieht sich also nicht auf Aktivitäten oder Operationen schlechthin, sondern immer auf Handlungen bei der Begriffsrealisierung und damit auf <u>zweckgerichtetes Handeln</u>. Diesen wesentlichen Aspekt unseres operativen Ansatzes halten wir fest als <u>teleologisches Prinzip</u> (von gr. telos = Ziel, Zweck). Es fordert von einer Begriffsbildung, daß sie von Zweckanalysen ausgeht oder diese zumindest mit einbezieht. (Dem Kenner des 'operativen Prinzips', das man in der Mathematik-Didaktik in Anlehnung an Piagets Entwicklungspsychologie formuliert hat, dürfte spätestens an dieser Stelle klar werden, daß hier unterschiedliche und nicht ohne weiteres vergleichbare Verwendungsweisen von 'operativ' vorliegen. Wir kommen auf diese mehr theoretische Frage in Teil II noch einmal ausführlicher zurück.)

Schließlich definieren die Handlungen, wie sie im Zusammenhang der Ideenverwirklichung auftreten, eine bestimmte (pragmatische) Ordnung. Diese Ordnung erscheint deutlich in unserem Schema zum POB (Abb.5). Ihre Einhaltung fordern wir (in Anlehnung an H. Dingler) in einem eigenen (didaktischen) Prinzip der pragmatischen Ordnung. Hierüber und über das teleologische Prinzip erfährt der Leser Grundlegendes in Teil II. Für den Augenblick mag es genügen, daß wir beide Grundsätze als Brückenprinzipien bei der Anwendung des genetischen Prinzips auf die Begriffsbildung in der Geometrie herausstellen.

1.4. Ein Beispiel

Abschließend wollen wir die wesentlichen Aspekte an einem Beispiel diskutieren. Wir wählen dazu den Ziegelstein (als Realisat des Quaders), da hierbei das teleologische Prinzip stärker (als etwa beim Würfel) in Erscheinung tritt.

Der Ziegelstein hat den Zweck, als Element beim Bau von in der Regel ebenen Mauern verwendet zu werden. Dabei muß er einige zusätzliche Anforderungen erfüllen: Er soll im wörtlichen Sinne handlich, also nicht zu schwer und nicht zu dick sein. Die Parkettierung des Raumstücks soll nicht durch einen einzigen Stein bereits festliegen, sondern sie soll variabel sein, d.h. es muß möglich sein, im Verbund, auch mehrreihig, zu mauern, zur Vermeidung von Beschädigungen mit ebenen Seitenflächen abzuschließen und Lücken variabler Größe, etwa für Fenster, zu lassen. Der Bau muß schichtweise vorgenommen werden können; und Unregelmäßigkeiten in einer Schicht, z.B. durch unterschiedliche Mörteldicke oder Abweichungen an der Form einzelner Steine, dürfen sich nicht auf die nächste Schicht auswirken. Die Seitenflächen sollen nicht schräg im Schwerefeld der Erde liegen, sondern senkrecht oder parallel zu den Schwerelinien, damit während des Bauens nichts verrutscht und später das Gewicht getragener Teile nicht ungünstig angreifen kann. Teile, die an den Seitenflächen überstehen, stellen Materialverschwendung dar, da sie zur Stabilität nichts beitragen. Analog läßt sich begründen, warum die Steine selbst konvex sein sollen.

Alle diese Bedingungen werden von der Quaderform erfüllt. Sie ist zudem vierfach symmetrisch, und ein quaderförmiger Stein kann auf vier verschiedene Arten richtig auf eine vorbezeichnete Stelle gelegt werden, was wichtig ist für eine Automatisierung der manuellen Tätigkeit. Auch die üblichen Abmessungen sind nicht willkürlich; sie ergeben sich zwar nicht zwingend aus dem Zweck, werden aber durch diesen plausibel. Die Verwendung möglichst großer Steine ist wirtschaftlich; dagegen steht die Forderung nach Handlichkeit. Die kürzeste Kante, die Höhe, ist durch die Griffbreite beschränkt auf üblicherweise 71 mm. Nun sollten Breite und Tiefe möglichst groß sein, damit die Berührflächen zu den Steinen der Nachbarschicht möglichst groß werden. Für die Variabilität der Lagen erweist sich eine längliche Grundfläche (bei gleichem Flächeninhalt, damit gleichem Volumen und damit gleichem Gewicht) der quadratischen als überlegen. Die Abmessungen sind 115 mm und 240 mm, also etwa im Verhältnis 1:2, das sogar genau getroffen wird, wenn man zur zweifachen Tiefe noch eine Mörteldicke zählt. Auch Höhe und Breite stehen in einem günstigen Verhältnis, nämlich 1:3. Insbesondere sind alle Steine kongruent; dies liegt allerdings auch in der Ökonomie der Herstellung begründet. (Selbstverständlich gibt es noch zahlreiche andere Ziegelsteinsorten mit anderen Maßen.)

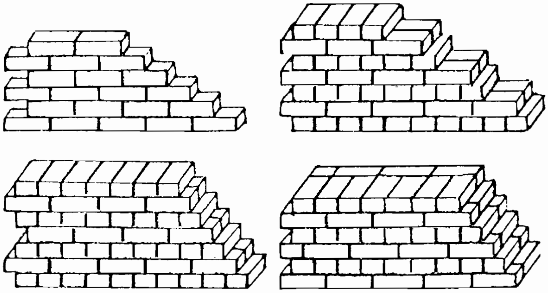


Abb.6

Wir fassen die bisherige Analyse folgendermaßen zusammen: Ökonomische, variable Raumparkettierung mit handlichen Steinen im Schwerefeld verlangt ein Passen der Steine an Kopien ihrer selbst in möglichst vielen Lagen mit möglichst großer Fläche. Sie sollen in das Schwerefeld passen, und sie sollen in die menschliche Hand und zur menschlichen Kraft passen. - Passen bedeutet hier einmal eingeschränkte Beweglichkeit: Während des Bauens soll die neue Schicht auf der bereits gemauerten an beliebiger Stelle angefangen werden können. Hinterher sollen die Steine gegeneinander unbeweglich sein; dazu wird die Mauer lückenlos überdeckt, die Fugen senkrecht oder parallel zur Schwerkraft gelegt und mit Mörtel gefüllt. Zum anderen bedeutet Passen Optimierung: Die Steine sind möglichst groß, aber der menschlichen Anatomie angepaßt. Schließlich ist Passen eine Form von Messen: Verschiedene Kanten in geeigneten Anzahlen aneinandergelegt ergeben gleiche Längen.

Bei allen Funktionsanalysen geometrischer Formen (oder umfassender: Sachverhalte) erweist sich das Passen in einer oder mehreren dieser Arten (eingeschränkte Beweglichkeit, Optimierung, Messen) als die Grundfunktion. Dabei soll unter Passen recht allgemein die (teilweise) Inzidenz von Flächen verstanden werden. Für Ziegelsteine sind alle drei Aspekte bedeutungsvoll.

Die Idee des Quaders entsteht über folgende Norm: Die Form soll aus Paaren paralleler, ebener Seitenflächen bestehen, die paarweise orthogonal sind. Der Quader ist insofern kein Grundbegriff, als er bereits die Begriffe 'Ebene', 'parallel' und 'orthogonal' voraussetzt.

Die oben angeführten üblichen Kantenlängen des Ziegelsteins, und auch die Längenverhältnisse, ergeben sich aus der Funktionsanalyse keineswegs zwingend. Wie schon erwähnt, sind auch Ziegelsteine mit ganz anderen Abmessungen gebräuchlich. Erst recht in anderen Bereichen, in denen sich der Quader als zweckmäßige Form erweist, z.B. bei Verpackungsmaterial, Möbelstücken oder Zimmern, spielen Kantenlängen und -verhältnisse keine Rolle oder werden im Einzelfall von den Randbedingungen des jeweiligen Problems bestimmt. Die Maße gehören also nicht zur Idee des Quaders. Sie sind hier vielmehr ein Beispiel dafür, wie auch bei der ideativen Begriffsbildung von etwas 'abgesehen' wird und somit auch Ideation eine abstraktive Komponente enthalten kann. Allerdings handelt es sich in solchen Fällen nicht um Abstraktionen aus der Wirklichkeit, sondern darum, bei Normen gewisse Teilnormen außer Kraft zu setzen, die der Bildung der jeweils angestrebten Ideen entgegenstehen.

Nun gilt es, die Idee des Quaders in die Wirklichkeit einzubringen und Ziegelsteine quaderförmig zu machen. Dabei sind die Normen in konkrete Herstellvorschriften umzusetzen, die im Fall des Quaders auf solchen für Ebenen und rechte Winkel (und damit über Doppelorthogonalität auch für Parallelität) beruhen. Natürlich werden technisch nicht bei jedem Ziegelstein sechs Ebenen und 24 rechte Winkel ersterzeugt, sondern es werden Formen verwendet, die ihrerseits bereits ebene Flächen und rechte Winkel enthalten. Aber damit ist die Aufgabe, Handlungsanweisungen zur Realisierung der Quaderform zu entwickeln, noch nicht gelöst, sondern nur verlagert.

Es ist nicht möglich, einen geometrischen Begriff vollkommen zu realisieren - er kann durch seine Realisate immer nur sukzessive angenähert, exhauriert werden. Der Genauigkeitsgrad hängt vom verwendeten Material und vom Herstellverfahren ab und richtet sich nach dem Zweck, den die Form zu erfüllen hat. So braucht der Ziegelstein keine polierte Flächen oder allzu scharfe Kanten zu haben, selbst abgeplatzte Stücke bis zu einer gewissen Größe beeinträchtigen seine Funktion noch nicht, da Inhomogenitäten, die nicht allzu sehr ausgeprägt sind, durch die Mörtelschichten ausgeglichen werden. In jahrtausendelanger Praxis schließlich hat sich die Quaderform tatsächlich für den Ziegelstein als zweckmäßig erwiesen.

Bis hierhin haben wir eine konstruktible Genese der Form des Quaders beschrieben. Historisch hat sich die Form des Ziegelsteins anders entwickelt: Vom roh geformten Lehmbatzen über Klumpen mit ebener Unterlage, über Ziegel mit rechteckigem Grundriß, ebenen Rändern und ebener Unterseite, aber gewölbter Oberseite, bis schließlich etwa im 26. Jh. v. Chr. in Mesopotamien zum Quader.

Hier wird besonders deutlich, daß genetischer Unterricht nicht einfach Nachvollzug einer historischen Genese sein kann. Es wäre dem Lernprozeß geradezu abträglich, wollte man bei der Bildung des Begriffs 'Quader' den skizzierten historischen Verlauf nachahmen und die Schüler darauf festlegen, jede der historischen Entwicklungsstufen zur Kenntnis zu nehmen oder gar auf jeder eine Zeit lang zu verharren. Das alles könnte eher Gegenstand eines geschichtlichen Rückblicks nach hinreichender Ausbildung des Quaderbegriffs sein.

2. ANWENDUNGEN IN DER PRAXIS

2.1. Zwecke und Funktionen

Das Kernstück geometrischer Begriffsbildung ist die Ideation. Doch wenn sie auch die Grundlage eines operativ ausgerichteten Geometrie-Unterrichts ist, so kann sie von den Schülern i.a. nicht reflektierend gehandhabt werden. Ein Unterricht, der sich an das in Kap. 1 skizzierte Schema anlehnt, wird vordergründig vor allem die geometrische Praxis beinhalten: Manuelle Herstellung und Gebrauch von Formen, aufbauend auf Funktionsanalysen, die ihrerseits von Zweckdiskussionen ausgehen.

Bezug zum Alltag

Zwecke sind der praktische Gehalt von Begriffen. Sie entstammen der Sphäre menschlicher Bedürfnisse. Mit den realisierten Formen werden die geometrischen Ideen auf die räumliche Wirklichkeit bezogen; hingegen beziehen die Zwecke die Geometrie samt ihren Begriffen auf die existentielle Wirklichkeit des Menschen. Z.B. ist der Zweck des Ziegelsteins, als Element beim Mauerbau verwendet zu werden, bereits das Ende einer Abhängigkeitskette von Zwecken und schon auf die geometrische Begriffsbildung hin ausgerichtet. Bei sehr vielen Gebrauchsgegenständen ist diese Verankerung der Formgebung in der Sphäre menschlicher Bedürfnisse völlig explizit: Der Konstrukteur hat Faktoren der Konstruktion, der Produktion, des Verkaufs und der Distribution, des Gebrauchs und der Destruktion zu berücksichtigen, wenn er Struktur, Werkstoff, Oberfläche, Form und Abmessung eines Produktes festlegen will (vgl. die Grafik in Tjalve 1978, S.115). Allerdings sind auch diese Kriterien schon stärker auf das Produkt bezogen.

Man könnte auch, ausgehend von geometrischen Formen, tiefergehende geschichtliche und gesellschaftliche Fragen erörten wie: 'die feste Behausung als Voraussetzung für die Entwicklung der menschlichen Kultur', 'Umweltzerstörung durch Wucherung von Stadtkonglomeraten', 'Manipulation der Menschen durch die Werbepsychologie' usw. Aus der Sicht des Geometrie-Unterrichts (auch eines umwelterschließenden, fächerübergreifenden!) wären solche Themen jedoch abwegig; und da, wo sie sinnvoll zu diskutieren sind, sind wiederum die speziell geometrischen Fragen von geringerer Bedeutung.

Aber auch eine deutlichere Ausrichtung der Analyse auf die geometrische Form, wie sie mit den oben aufgezählten Gesichtspunkten erzielt würde, ist für den Geometrie-Unterricht nicht von vornherein ergiebig; denn diese Produkte haben oft recht komplexe Formen, deren Entwicklung dann singuläre Lösungen darstellen, mit denen man bei der geometrischen Begriffsbildung wenig anfangen kann.

Nützlich sind diese Analyse-Gesichtspunkte sehr wohl, im Unterricht jedoch erst in der Anwendung auf die 'richtigen' Formen, die man in einer vorläufigen Fassung als die 'einfachen' bezeichnen könnte. Auch für deren Bedeutung ist Voraussetzung, daß sie dem mehr oder weniger technisierten Alltag entstammen, daneben auch aus Handwerk und Technik. Wegen des allgemein- und nicht berufsbildenden Charakters des Mathematik-Unterrichts in unseren Schulen kommen allerdings aus dem handwerklichen und technischen Bereich nur solche Sachverhalte in Frage, die der Lebenswelt der Schüler angehören (sollten) und im Unterricht ohne allzu große Umwege angegangen werden können, also etwa das (geometrische) Prinzip des Wankelmotors im Vergleich mit dem des Kolbenmotors, aber z.B. nicht genaue Kenntnisse über die Form des Gehäuses beim Wankelmotor. Ein zu tiefes Eindringen in den Bereich der Technik, gar in Spezialgebiete, ist auch gar nicht vonnöten, denn der Alltag bietet (geometrische) Problemstellungen in Hülle und Fülle.

An vielen zeitgenössischen Geräten ist die wesentliche, geometrische Funktion gar nicht mehr direkt zu erkennen (z.B. Kaffeemaschine). Sie wird oft durch moderne Formgebung verborgen bzw. tritt in den Hintergrund gegenüber Fragen im Zusammenhang mit den immer mehr verwendeten Elekromotoren, der Elektronik usw. Will man die eigentliche Funktion solcher Geräte erarbeiten, sollte man sich nicht scheuen, auch auf Formen zurückzugreifen, die inzwischen ungebräuchlich sind.

Es ist - vom operativen Standpunkt aus - auch nicht unbedingt zu bedauern, daß z.B. Uhren mit Digitalanzeige immer mehr verbreitet sind; völlig werden die Analog-Uhren ohnehin nicht verschwinden. So wertvoll sie für die Ausbildung des Winkelbegriffs sind, die Analoganzeige ist eben nicht unabdingbar für den Zweck der Zeitmessung.

Natürliche Phänomene

Eine andere Kategorie geläufiger geometrischer Formen sind natürliche Phänomene wie Bienenwabe, kugelförmiger Augapfel in der Augenhöhle, Knochengelenk, geradliniger Baumwuchs gegen die Schwerkraftrichtung, Spiegelsymmetrie der meisten nicht ortsgebundenen Lebewesen, Drehsymmetrie ortsgebundener Lebewesen, das Verhältnis von Oberfläche und Volumen bei einem Baum und bei einem Bär im Winterschlaf ('Massigkeit'), das Verhältnis von Muskelumfang zu Gesamtgröße, eine stille Wasseroberfläche, Kristallformen, Geschoß- und Planetenbahnen usw. An solchen Beispielen kann kein Geometrie-Unterricht vorbeigehen; sie sind motivierend und stellen Verbindungen zu anderen Fächern her. Allerdings sind sie keine Muster für operative Begriffsbildung, da bei ihnen die teleologische Komponente zu kurz kommt. Man fragt wohl bei biologischen Phänomenen nach ihrem Sinn, doch wird dabei der Form nachträglich eine Idee untergeschoben. Darüber, ob es nun gerade diese Idee ist, die realisiert wird, läßt sich nur spekulieren.

Geometrische Funktionen

Die Unterscheidung zwischen Zwecken und geometrischen Funktionen im Begriffsbildungsschema ist nicht ganz scharf. Während jene dem gesellschaftlichen Bereich entstammen (auch wenn sie schon so formuliert sind, daß man an ihnen die Funktionsanalyse direkt ansetzen kann), gehören diese schon dem Bereich der Geometrie an. Der Übergang ist fließend, wie man z.B. bei der Analyse des Ziegelsteins gesehen hat.

Im allgemeinen erfüllt eine geometrische Form ihre Zwecke nicht allein, sondern in räumlicher Beziehung zu anderen Formen. Die möglichen zweckentsprechenden Beziehungen nennen wir geometrische Funktion dieser Form. Zur Formulierung von Funktionen ist eine Sprache zu verwenden, in der solche räumliche Beziehungen ausgedrückt werden können. Jedoch dürfen in dieser Sprache nicht schon Begriffe vorkommen, die erst noch auf der Basis der fraglichen (oder anderer) Funktionen zu bilden sind. Z.B. sind in der Angabe der Funktion der Schraubenlinie als 'Transport eines (gedachten) Zylinders entlang der Schraubachse fast senkrecht zur Schraubbewegung' bereits die Begriffe 'Zylinder', 'Achse', 'senkrecht' enthalten. Sie wäre also zirkulär, wenn diese Begriffe erst nach Bildung oder sogar mit Hilfe des Begriffs der Schraubenlinie eingeführt würden.

Tatsächlich läßt sich die Formulierung von Funktionen zirkelfrei durchführen; es dürfen nur Zwecke analysiert werden, die zu ihrer Erfüllung nicht solche räumlichen Formen und Beziehungen erfordern, die noch gar nicht begrifflich verfügbar sind. Ganz zu Anfang ist auf geometrische Begriffe sogar vollständig zu verzichten, nämlich bei der Bildung der für alle weiteren Formen grundlegenden Idee 'Ebene' und 'starrer Körper'. Für diese müssen die Funktionen zuerst in einer gewissen 'Realitätssprache' ausgedrückt werden, deren Wörter noch nicht geometrisch präzisiert sind, sondern reelle Aktionen darstellen; z.B. für die Ebene: freie Beweglichkeit im Lager und im Lager des Lagers; für den starren Körper: Abtragen von Punktepaaren. Aus diesen Funktionen ergeben sich die beiden Grundbegriffe relativ unvermittelt, und damit ist es dann möglich, die Funktionen für diese und andere Begriffe 'geometrischer' zu fassen. Mit deren Hilfe bildet man zirkelfrei weitere Begriffe - Geraden als Ebenenschnitte; Kongruenz aus dem starren Körper; Orthogonalität aus Ebenen, Geraden und Kongruenz; usw. Auf diese Art und Weise werden die Funktionen, die sich ja durch Analysen aus Zwecken ergeben, in das geometrische Begriffssystem eingebunden.

Bei geometrischen Funktionen handelt es sich durchweg um Inzidenz von (Ober-)Flächen oder Teilen davon, die auch niederdimensional sein können (Kurven oder Punkte). Beispiele sind der Kolben im Zylinder, der Tisch auf dem Fußboden, Apfelsinen aneinander und an einer gedachten konvexen Hülle bei raumsparender Verpackung, oder ein Punktepaar auf einem Maßstab mit den Enden einer zu messenden Strecke. Die realisierten Formen müssen nicht materialisiert sein, sie könnten z.B. auch durch ein Kraftfeld bestimmt sein. Auf diese Art und Weise können Formen also sogar dreidimensional inzidieren, etwa der Ziegelstein mit dem Schwerkraftfeld, aber wesentlich ist bei diesem Beispiel doch wieder nur die Inzidenz der Ziegelsteinoberfläche mit den Kraftlinien oder mit den Äquipotentialflächen des Feldes.

Inzidenz von Oberflächen(-teilen) von Formen wollen wir als Passen bezeichnen. Jegliche geometrische Funktion von Formen ist also ein Passen. Dieses spielt sich zunächst auf der Ebene der Ideen ab: Die Forderung nach zweckentsprechendem Passen führt zur ideativen Bildung geometrischer Begriffe, die dann auch tatsächlich die Forderung erfüllen und die passen, weil es zu ihrem Wesen gehört, daß sie sie erfüllen; das Passen wird ideiert.

Häufig werden Formen nur teilweise physikalisch realisiert, etwa um Material zu sparen oder um sekundäre geometrische oder sonstige Funktionen zu erfüllen, aber immer noch so weit, daß sie ihrer Hauptfunktion genügen: Eine gerade Grenze zwischen zwei Grundstücken wird lediglich durch zwei Grenzsteine festgelegt; ein Vogel wird nicht in einem geschlossenen Raum, sondern in einem Käfig eingesperrt; die Unterseite eines Tellers ist nach innen gewölbt, so daß sie nur auf einer Kreislinie aufliegt; für die Eingangstür muß bei der Einrichtung eines Zimmers ein ganzer Zylindersektor freigelasssen werden; eine Mauer wird nicht unendlich hoch gebaut; ein Ziegelstein ist noch verwendungsfähig, wenn schon Stücke abgeplatzt sind, usw.

Für eine Untersuchung solcher Formen auf ihre Funktion und Funktionstüchtigkeit reicht eine Betrachtung des physikalischen Realisats allein nicht aus, vielmehr muß man sich die Form in einem Raumstück vollständig realisiert denken. Dies ist nicht ohne Rückgriff auf die geometrische Theorie, auf den Bereich der Ideen möglich, ohne den die realisierte Form völlig unbestimmt wäre. Man muß schon wissen, daß eine Strecke durch zwei Punkte, ein Quader durch geeignete Gitterlinien, eine Ebene durch einen Kreis, ein endlicher Zylinder durch ein Rechteck und eine Rotationsachse, und eine unendliche Translationsfläche bereits durch einen endlichen Abschnitt festgelegt sind. Dann kann man sich erlauben, nur den festlegenden Teil physikalisch zu realisieren. Auf diese Art und Weise ist die komplette Form sogar mit besonders hohem Genauigkeitsgrad, aber eben nur partiell, 'verwirklicht'.

Begriff der Unendlichkeit

Insbesondere sämtliche Formen unendlicher Ausdehnungen (Ebene, Gerade, Zylinder, Schraubenlinie usw.) lassen sich nur unvollkommen realisieren, nämlich nur mit einem endlichen Teil. Für die praktische Funktionstüchtigkeit aller geometrischer Formen ist in der Tat die Unendlichkeit nicht nur nicht erforderlich, sondern sie wäre aus geometrischen (nicht nur physikalischen!) Gründen häufig eher nachteilig. Man könnte nun fragen, ob dieser prinzipielle Unterschied zwischen Idee und Realisat nicht die Entwicklung der Begriffe behindere, und weiter: wie der Begriff der Unendlichkeit und damit überhaupt erst die entsprechenden Ideen zu gewinnen seien. So schwer, wie in dieser Fragestellung angenommen, wiegt nun allerdings die Rolle der Unendlichkeit in der Geometrie nicht. Schon in einem innermathematischen Aufbau kommt es an vielen Stellen nur auf die Eigenschaften endlicher Teilstücke von Formen an (der beste Beleg dafür sind erläuternde Zeichnungen, die notgedrungen endlich sind). Dies gilt erst recht bei einem operativen Verständnis von Geometrie, wo die Realisierung von Begriffen essentiell ist. Die Unendlichkeit erlangt erst dadurch eine gewisse Bedeutung, daß Formen so ausgedehnt gedacht werden können, wie nötig ist, damit ihre Eigenschaften in allen Situationen erhalten bleiben. Daß eine Form unendlich ist, heißt zunächst nur, daß sie jedes endliche Realisat idealisiert. Damit ist auch zugleich ein Weg zur Gewinnung des Begriffs der Unendlichkeit selbst gewiesen.

Vereinbarung über Bezeichnungen

So werden im folgenden die endlichen Realisate unendlicher Formen mit denselben Namen wie diese bezeichnet. Bei Begriffen wie 'Schraubenlinie' oder 'Zylinder' erscheint dies unproblematisch, weil deren Namen ursprünglich auf die endlichen Realisate gemünzt sind und wie selbstverständlich dann auf die unendlichen Ideen angewendet werden. Für gewisse endliche Ebenen- oder Geradenteile gibt es Namen wie 'Rechteck', 'Strecke' usw. An deren Stelle werden wir hie und da doch die Bezeichnungen 'Ebene(nteil)' oder 'Gerade(nstück)' gebrauchen, nämlich dann, wenn die entsprechenden Aspekte wichtig sind, z.B. bei der Analyse der Quaderform.

Besonders die Begriffe 'Zylinder' und 'Schraubenlinie' könnten auch endlich gefaßt werden. Allerdings ginge dann ihre Homogenität verloren. In Anlehnung an diese beiden wollen wir auch den Kegel als in einer Richtung unendliche Form auffassen, er ist dann nur in einem Punkt inhomogen. Dagegen betrachten wir die Form des Kegelstumpfes als endlich und begehen damit eine systematische Inkonsequenz. Da der Kegelstumpf aber vom Kegel abgeleitet und außerdem noch weniger homogen als dieser ist, hat er eine geringere Bedeutung im System geometrischer Begriffe; er ist vor allem wegen seiner praktischen Verwendung interessant, und dabei tritt er als endliche Form mit zwei Deckflächen auf, die zwar verschieden groß, aber sonst prinzipiell nicht voreinander ausgezeichnet sind. (Eine solche Behandlung der Form des Kegelstumpfes ist jedoch nicht zwingend.)

Bei zahlreichen realisierten Formen wird üblicherweise sowohl die Oberfläche als auch der volle Körper (z.B. Kugel, Zylinder, Kegel) mit dem entsprechenden Namen benannt. Wir schließen uns diesem Brauch an und bemühen uns nur dann um genauere Unterscheidungen - durch Ausdrücke wie '(zweidimensionale) Kugeloberfläche' oder '(dreidimensionale) Vollkugel' o.ä. -, wenn diese einmal besonders wesentlich sind und aus dem Kontext nicht ohne weiteres entnommen werden können. Auch die Wörter 'Raum', 'räumlich' usw. beziehen sich auf zwei verschiedene Begriffe: einmal auf den Gegenstand der Geometrie überhaupt, zum anderen auf das dreidimensionale Gegenstück zur zweidimensionalen Ebene, das wir auch häufig durch das Adjektiv 'dreidimensional' näher kennzeichnen.

Die Funktion 'Passen'

Zurück zur Funktion des Passens. Sie tritt in drei Erscheinungsformen auf: als eingeschränkte Beweglichkeit, als Optimierung und als Messen. Alle drei Arten haben wir beim Ziegelstein bereits kennengelernt und werden sie in vielen der noch folgenden Beispiele wiederfinden, besonders die am einfachsten zu durchschauende eingeschränkte Beweglichkeit. (Dieses Durchschauen bedingt oft eine kinematische Betrachtungsweise.) Bei der Optimierung geht es zumeist um eine günstige Gestaltung von Größe, Form oder Lagebeziehungen: Der Ziegelstein soll einerseits möglichst groß, andererseits handlich sein; mit der üblichen Form von Töpfen wird eine kreisförmige bzw. im Prinzip punktförmige Wärmequelle am besten ausgenutzt; und unter verschiedenen Arten von Lagerungen gibt es solche, die weniger Platz als andere brauchen. Beispiel: Bei welcher Art des Zusammenpassens können auf einer Tischplatte mehr Konservendosen aufgestellt werden, so wie in Abb.7a oder wie in 7b?

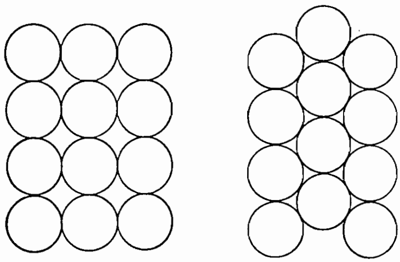


Abb.7 a b

Schließlich ist das Messen - weniger als Finden einer Maßzahl denn als Vergleich von Formen - eine Art des Passens. Passen Formen zueinander, passen sie zu einer dritten? Außer dem Anlegen eines Maßstabs gibt es noch zahlreiche andere Meßmethoden, die im Einzelfall durchaus besser geeignet sein können. Auch hierfür werden wir Beispiele nennen.

Die Rolle der Beispiele

Das Kernstück von Kapitel 2 ist die Sammlung von Realisierungen geometrischer Ideen für die Praxis. Zwar wird an keinem Beispiel das POB vollständig vorexerziert, doch sind die Beschreibungen ausführlicher gehalten als eine bloße Notierung von Stichworten. Es geht uns einmal darum, die Reichhaltigkeit unserer näheren Umwelt an geometrischen Ideen zu demonstrieren, vor allem aber darum, dem Lehrer Material an die Hand zu geben, mit dessen Hilfe er seinen Geometrie-Unterricht am POB orientieren kann.

Eine Strukturierung der Beispielsammlung ergibt sich aus dem Begriffsbildungsschema: In Abschnitt 2.2 werden geometrische Phänomene vor allem in Hinblick auf ihre geometrische Funktion betrachtet; in 2.3 sind die geometrischen Ideen selbst die leitenden Begriffe; in 2.4 schließlich steht die Realisierung im Vordergrund. Dabei geht es nicht nur um Probleme im Zusammenhang mit der Exhaustion, sondern viel allgemeiner um Modellbildung für geometrische und außergeometrische Begriffe. Insofern bei diesen Ausführungen der Gedanke des Operativen, insbesondere die Exhaustion, in den Hintergrund tritt, haben sie exkursorischen Charakter. Es erscheint nicht sehr sinnvoll, der noch verbleibenden vierten Station im Begriffsbildungsschema, den Zwecken, einen eigenen Abschnitt zu widmen. Dafür ist der Bereich der menschlichen Bedürfnisse, dem die Zwecke entstammen, von vornherein zu wenig gegliedert und zu weit von der Geometrie entfernt. Zudem ist die Frage nach dem Zweck in allen Beispielen wesentlich, gleichgültig ob mehr der Funktions-, der Begriffs- oder der Realisationsaspekt betont wird.

Einige der geometrischen Phänomene werden an mehreren Stellen erörtert, nämlich jeweils dann, wenn sie zur Erläuterung eines bestimmten Aspekts besonders geeignet erscheinen. Andererseits streben wir keine Vollständigkeit an und bringen nicht zu jedem Aspekt alle passenden Phänomene oder Begriffe. Nur wenige der Beispiele werden dem Leser neu sein; instruktiv dürfte aber ihre Relevanz für den Unterricht durch die operative Sichtweise sein. Anregungen fanden wir unter anderem bei Freudenthal (1973), Kempinsky (1920/1952), Lietzmann (1959), Menninger (1954/1958), Menninger (1960), Perelman (1954). Es ist bezeichnend für das traditionelle Verständnis vom Geometrie-Unterricht, daß ein Teil dieser Werke als Unterhaltungsmathematik deklariert ist. Wenn auch, besonders bei

Perelman, manche Beispiele etwas künstlich wirken, so ist doch ein Bemühen um Lebensnähe nicht zu verkennen.

2.2. Geometrische Funktionen

In diesem Abschnitt notieren wir einfache Phänomene und untersuchen an ihnen die Funktion des Passens hauptsächlich als eingeschränkte Beweglichkeit, ebenso die Wirkungsweise von Homogenität und Inhomogenität. Wir wollen jedoch nicht so 'komplizierte' Mechanismen beschreiben wie die Funktion eines Uhrwerks oder eines Türschlosses. Solche Probleme eignen sich zwar hervorragend für eine unterrichtliche Behandlung, weil in ihnen einmal die Zweckhaftigkeit geometrischer Formen und zum anderen die Funktion des Passens besonders augenfällig werden, - sie eigenen sich aber offensichtlich weniger für eine Darstellung im Rahmen dieser Arbeit. Auch auf den Aspekt des Passens als Optimierung gehen wir kurz ein, während wir das Messen dem Abschnitt 2.4 (geometrische Modelle) vorbehalten.

2.2.1. Beweglichkeit im Lager

Kann man einen Nagel aus einer Wand ziehen, wenn er geknickt darin steckt? Wenn Nagel und Wand starr genug sind, ist dies nicht möglich. Allerdings kann man ihn in dieser Form auch gar nicht erst in die Wand hineinpraktizieren, es sei denn, man würde ihn beim Bau direkt mit einmauern; dann wäre aber das Gebot der Starrheit verletzt gewesen.

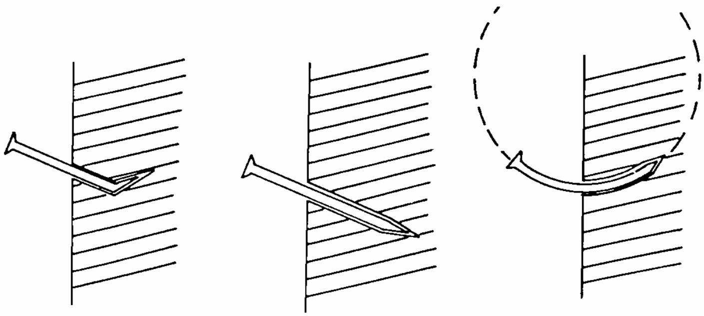


Abb.8

In der Wand beweglich sind aber nicht nur gerade Nägel, sondern auch krumme, nämlich solche mit konstanter Krümmung, wo der Nagel also Teil einer Kreislinie ist.

Nicht der Knick ist das wesentliche Hindernis für die Beweglichkeit, sondern die Tatsache, daß sich entlang des Nagels die Krümmung ändert, und folglich könnte auch ein elliptisch gekrümmter Nagel nicht in seinem Lager bewegt werden. Gerade und Kreis sind die einzigen ebenen Linien, die innerlich homogen sind, deren Stellen also insbesondere nicht durch ihre Krümmung voneinander unterschieden werden können. Sie sind damit die einzig möglichen ebenen Formen für einen flachen, linienförmigen Gegenstand, der in seinem starren Lager frei beweglich sein soll. Für den Nagel kommt wegen der Krafteinwirkung bei den Hammerschlägen, also aus physikalischen Gründen, nur die Gerade in Frage.

Verschlüsse an Kettchen dagegen können aus einem torusförmigen, an einer Stelle unterbrochenen Röhrchen bestehen, in dem ein in gleicher Weise gekrümmter Zapfen sich hin- und herbewegt werden kann und dabei den Torus schließt und öffnet (Abb.9).

Es gibt eine weitere homogene Linie, die allerdings nicht eben ist, nämlich die Schraubenlinie mit konstantem Radius und konstanter Steigung. Einen solcherart geformten Nagel kann man bequem in ein gleich geformtes Lager ein- und ausführen. Angewendet wird dieses Prinzip direkt bei dem Korkenzieher und, abgewandelt, bei der Schraube.

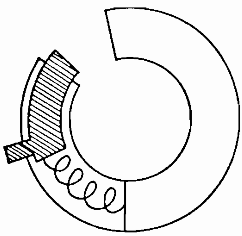


Abb.9

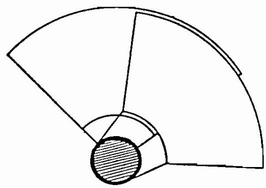


Abb.10

Damit eine Schublade in ein Möbelstück paßt, sind ihre Wände im Normalfall parallel zur Zugrichtung, insbesondere auch untereinander parallel. Ganz selten gibt es jedoch auch krumme Schubladen (als Kreis(ring)ausschnitte) an zylinder(teil)förmigen Möbelstücken (Abb.10). Konstruiert man eine 'Schublade' als Vollkreis(ring) in einem Lager, so ist sie keine Schublade mehr, weil es keine ausgezeichnete Ruheposition mehr gibt, sondern es liegt jetzt das Prinzip des Karussells oder der Drehtür und damit des Zylinders vor.

Beim Kolben eines Kolbenmotors wird nicht die ganze (zweidimensionale) Beweglichkeit im Zylinder ausgenutzt, sondern nur die entlang der Mantellinien. Weitere Beispiele sind der Stecker mit der Steckdose, Verbindungen bei Fischer-Baukästen oder der Schraubenschlüssel mit der Schraubenmutter.

Neben den homogenen Kurven 'Gerade', 'Kreis' und 'Schraubenlinie' gibt es die homogenen Flächen 'Ebene', 'Kugel' und 'Zylinder'. In der Praxis kommt es meist auf die Einhaltung einer bestimmten Bewegungsrichtung an; daher sind Anwendungen der vollen zweidimensionalen Beweglichkeit dieser Flächen in ihrem Lager seltener: etwa die Säge im Holz (für die Ebene), ein Karussell, das während der Rotation zugleich beliebig hochgehoben werden kann (für den Zylinder), das Gelenk eines auf einem Stativ montierten Fotoapparats oder eines beweglichen Auto-Rückspiegels (für die Kugel).

In fast allen angeführten Fällen ist die Beweglichkeit nicht vollständig frei:
Bei den unendlichen Formen 'Ebene', 'Zylinder', 'Gerade' und 'Schraubenlinie' (wegen der Endlichkeit der Realisate) sowieso. Unter den beiden endlichen Formen 'Kreis' und 'Kugel' findet man zwar frei bewegliche Kreise, etwa das Rad. Aber Kugeln könnten bei freier Beweglichkeit und voller Materialisierung i.a. keinen wirklich praktischen Zweck erfüllen, da dann ihr Inneres von ihrem Äußeren undurchlässig getrennt wäre. Kugeln oder ihr Lager werden daher nur teilweise materialisiert, etwa:

- die Kugelschreiberspitze, die an einer Seite von der Mine befeuchtet wird, beim Schreiben in ihrem Lager beliebig bewegt wird und dabei die Minenflüssigkeit zum Papier transportiert und an dieses abgibt (Abb.11),
- Kugellager,
- die Cardanische Aufhängung, wo ein Objekt so an seinem Gestell befestigt ist, daß es gegenüber diesem in einer Kugelfläche frei beweglich ist (Abb.12). Verwendet wird dieses Prinzip beim Schiffskompaß, der dadurch nicht an den Schlingerbewegungen des Schiffes teilnimmt, sondern durch die Schwerkraft immer parallel zur Erdoberfläche gehalten wird. Berücksichtigt man noch die Beweglichkeit der Kompaßnadel, so ist damit sogar die volle Bewegungsgruppe der Kugel realisiert (Abb.12).

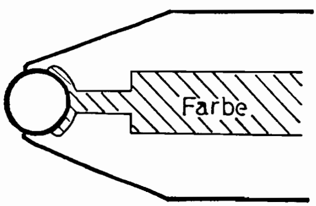


Abb.11

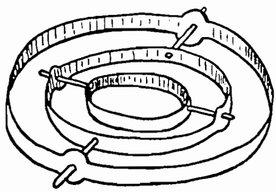


Abb.12

Aber auch wenn eine Form oder ihr Lager nicht ganz materialisiert sind, kann das zweckentsprechende Funktionieren des Gegenstandes die Beweglichkeit behindern: beim Fotoapparat und beim Rückspiegel die Befestigung am Gelenkkopf (Abb.13), bei der Lampe mit magnetischem, halbkugelförmigem Gehäuse die elektrische Leitung (Abb.14), oder bei der Kugelkopfschreibmaschine die Verbindung des Kugelkopfes zur Maschine.

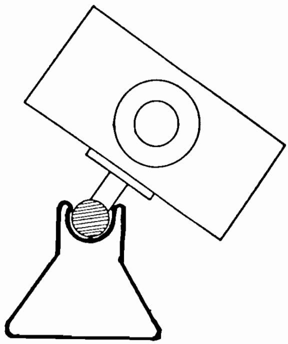


Abb.13

Weitere Beispiele für Beweglichkeit im partiell materialisierten Lager sind: getöpferte Gegenstände mit der Hand des Töpfers und ihrer relativen Rotation als Lager; zwei Zahnräder und ihre Drehung als gegenseitige Lager; eine Glasplatte, für die bei der Herstellung eine ebene Unterlage als eine Hälfte und eine darüber rollende Walze als andere Hälfte des Lagers wirken; oder ein Seismograph mit einer rotierenden Walze und einem entlang der Mantellinien frei beweglichen Stift (Abb.15). Beispiele aus der Natur sind der Legestachel der Schlupfwespe, das kugelförmige Auge in seiner Höhle, oder Knochengelenke.

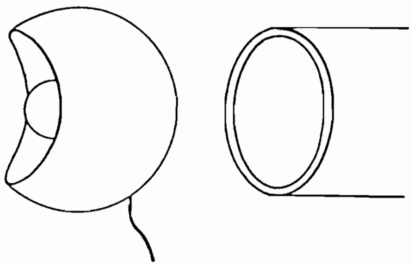


Abb.14

Ein ganz anderer Typ von Beweglichkeit im Lager wird in folgender Aufgabe verlangt: Wie muß man ein 250 cm hohes, 205 cm breites und 35 cm tiefes Regal durch eine 200 cm hohe und 125 cm breite Tür transportieren? - Hier liegt eine praktische und etwas komplexere Variante der alten Aufgabe vor, in welcher Höhe eine 205 cm lange Leiter an einer Wand lehnt, wenn diese Leiter am Boden einen Abstand von 92 cm hat (Abb.16).

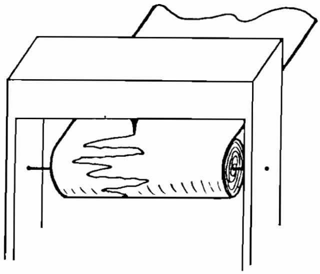


Abb.15

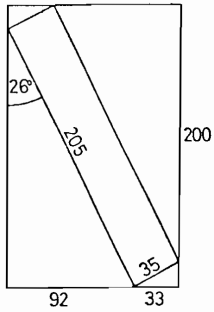
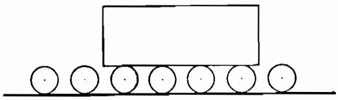


Abb.16

2.2.2. Übertragung von Bewegungen

Die Tatsache, daß zwei Ebenen in ihrer vollen Fläche aufeinanderpassen, ist in bestimmten Situationen, etwa beim Mauerbau, nützlich, in anderen bereitet sie erhebliche Schwierigkeiten. Wenn z.B. ein schwerer, quaderförmiger Steinblock auf einer Ebene transportiert werden soll, so erzeugt seine große Berührfläche eine große Reibungskraft, die überwunden werden muß.

Abb.17



Erleichtern kann man sich die Arbeit dadurch, daß man Walzen unterlegt (Abb.17). Diese haben mit dem Boden und dem Steinblock jeweils nur ein Stück einer Gerade gemeinsam (ideal eine Fläche vom Maß 0), die Reibung ist stark herabgesetzt, und der Block läßt sich mit weit weniger Mühe transportieren. Entscheidend ist, daß die Objekte, die zwischen die beiden relativ zueinander zu bewegenden Ebenen geschaltet werden, nirgends eben sind, und daß der Abstand zwischen beiden Ebenen konstant ist, daß also jede Walze einen Querschnitt konstanter Breite hat und daß alle Walzen gleich breit sind. Der Querschnitt braucht aber keineswegs kreisförmig zu sein, prinzipiell sind alle Figuren konstanter Dicke geeignet (vgl. 2.3.11). Allerdings hat deren Inhomogenität eine ungleichmäßige Bewegung und einen ungleichmäßigen Druck auf die Walzen zur Folge.

Bei der Spekulation darüber, welche Technik wohl die alten Ägypter beim Transport der Steinblöcke zu den Pyramiden-Bauplätzen angewandt haben, ist man noch auf andere Möglichkeiten gestoßen (siehe z.B. Abb.30), die aber natürlich alle auf dem Prinzip beruhen, die Reibung durch Verkleinern der Berührflächen zu vermindern.

Genau dieses Prinzip ist auch beim Kugellager verwirklicht, wo die sich gegeneinander bewegenden Flächen keine Ebenen, sondern etwa koaxiale Zylindermäntel sind:

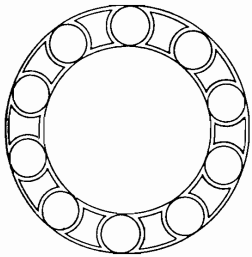


Abb.18

Es ist ein erheblicher Nachteil des Transports durch Unterlegen von Walzen, daß die Walzen nicht nur auf der Unterlage, sondern auch relativ zum transportierten Gut abrollen. D.h. Unterlage und Gut müssen eben und die ganze Strecke muß mit Walzen ausgelegt sein. Dies erreicht man in der Praxis dadurch, daß überrollte Walzen wieder vorne angelegt werden. (Bei dem Kugellager in Abb.18 wird dies durch die Konstruktion selbst, nämlich durch die geschlossene Kreisform des Lagers, geleistet.) Dieses Verfahren ist sehr zeitraubend und arbeitsaufwendig. Man müßte stattdessen das zu transportierende Gut so mit den Walzen verbinden, daß es zwar ihre Vorwärtsbewegungen, nicht aber ihre Rotation mitmacht; es müßte also mehrere Lager bilden, in denen die Walzen frei rotieren könnten. Eine vorläufige Lösung sähe aus wie in Abb.19a. Die Unterlage und, bis auf die Walzenlager auch die Unterseite des Gefährts, könnten (fast) beliebig geformt sein. Allerdings sind die Berührflächen noch viel zu groß; es würde sich nach dem Prinzip der Bremse nichts bewegen. Der eigentliche Fortschritt wird erst erzielt, wenn das Gefährt lediglich auf den Achsen aufsitzt, und zwar auf Achsen, die relativ zu ihm oder zu den Walzen frei beweglich sind (siehe Abb.19b). Mit diesem Fahrzeug können aber noch keine Bögen gefahren werden, es kann sich prinzipiell nur geradlinig bewegen, weil die Walzen insgesamt starr sind, sie drehen auf einem Bogen aber außen schneller als innen. Zerlegt man nun die Walze in zwei Räder, verbindet diese nicht fest mit ihrer Achse und läßt eine der Achsen in einer Ebene parallel zur Unterlage in ihrem Mittelpunkt beweglich, so kann man auch Bögen fahren (Abb.19c). Die Verbindungsstellen zwischen Rädern und Gefährt sind so klein, daß neuartige Techniken (Kugellager, Schmiermittel) erfolgreich eingesetzt werden können. (Die bisherige Schilderung ist nicht die historische, sondern eine konstruktible Genese des Räderfahrzeugs, die im übrigen an dieser Stelle keineswegs beendet ist.)

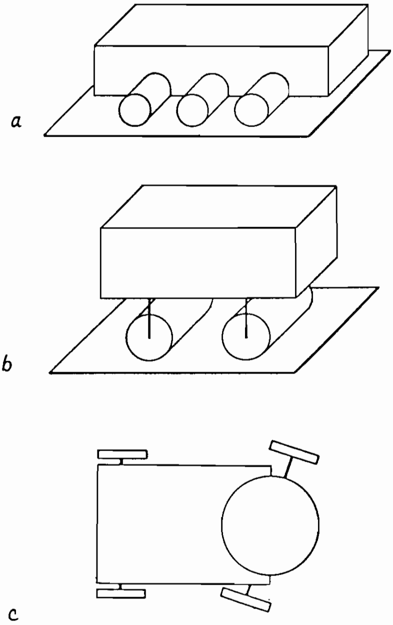


Abb.19

Räder ermöglichen also reibungsarme Bewegungen entlang vorgegebenen glatten, weitgehend beliebig geformten Flächen oder Linien. Entweder rollen sie als Folge einer Schubkraft (Rollschuhe, Handkarren, Raketenauto), oder ihr Rollen erzeugt eine Schubkraft (zeitgenössisches Fahrrad, Auto, E-Lok).

Solche Übertragungen von Translation und Rotation ineinander gibt es auch bei ortsfesten Rädern: Der Bach treibt das Mühlrad an, der Wind die Windmühlenflügel, das Seil der Seilbahn läßt die Laufräder rotieren, dieses Seil wiederum wird über ein Rad angetrieben. Der Keilriemen überträgt die Rotation eines Rades auf ein anderes; bei der Wäschepresse wird durch die Rotation der beiden Walzen gegeneinander das Wäschestück geradlinig bewegt und dabei gepreßt (Abb.20).

Bei Seilbahn, Keilriemen und Wäschepresse werden Rotationen in andere übertragen und zwar indirekt über die Vermittlung einer Translation. Mit Zahnrädern, Stangen oder gar gemeinsamen Achsen sind solche Übertragungen auch direkt möglich.

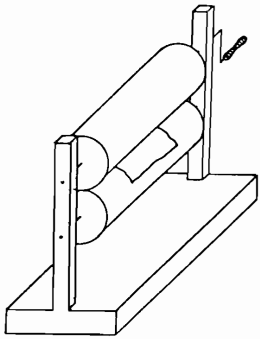


Abb. 20

Allen diesen Beispielen ist gemeinsam, daß die auftretenden Bewegungsrichtungen jeweils parallel sind. Oft ist aber mit der Bewegungsübertragung eine Richtungsänderung verbunden. Das Prinzip der schiefen Ebene ist es, eine horizontale Bewegung in eine vertikale umzuwandeln und umgekehrt: Wird z.B. eine schiefe Ebene in einem Sandhaufen an einer in der Vertikalen beweglichen Wand geschoben, dann wird der Sand hochgehoben:

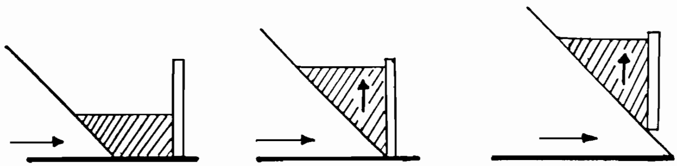


Abb. 21

Aufwicklung einer (sehr schmalen) schiefen Ebene auf einen Zylindermantel ergibt eine reale Schraubenlinie. Mit der Schraubenlinie werden Rotationen in dazu senkrechte Translationen umgewandelt (Schraubenmutter auf Schraube); und umgekehrt: Bei gewissen Schraubenziehern wird mechanischer Druck in Richtung der Schraubachse durch eine Schraubenlinie mit großer Ganghöhe in eine Rotation der Klinge umgesetzt (Abb.22).

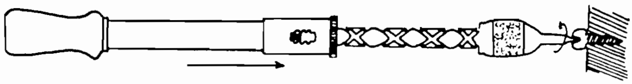
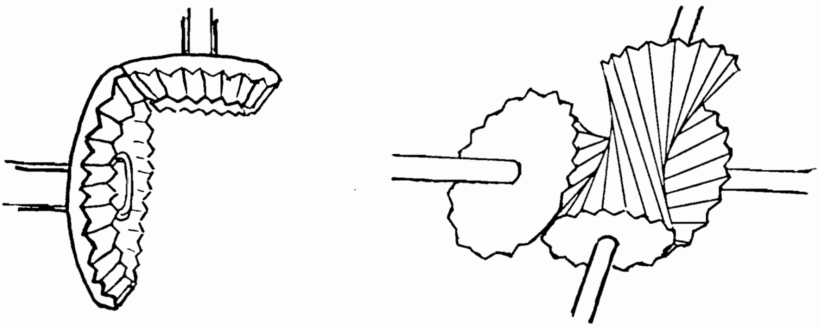


Abb.22

Ein Kippen von Rotationsebenen gelingt mit konischen Zahnrädern mit Achsen in einer Ebene, oder mit Hyperboloiden mit windschiefen Achsen (Abb.23).



a Abb.23 b

Eine wichtige Bewegungsart außer Rotationen und Translationen sind Schwingungen: beim Kolben der Dampflokomotive; beim Scheibenwischer, der sich auf einer Kreisbahn bewegt (Abb.24); bei der Handsäge; bei der Druckplatte für den Plattendruck, oder beim Kolben im Ottomotor. Das praktische Problem, eine Schwingung durch eine Rotation zu erzeugen, oder umgekehrt den Rhythmus zu beschleunigen oder den Lauf zu beruhigen, läßt sich auf folgende Arten lösen: Die Rotation und die Schwingung werden durch einen Gelenkmechanismus (Kurbelwelle) ineinander übergeführt, so wie z.B. bei der Dampflokomotive (Abb.31) oder beim Scheibenwischer (der Bau eines Funktionsmodells ist z.B. in Stührmann/Wessels (1970/1972), S.67ff, ausführlich dargestellt; vgl. Abb.24).

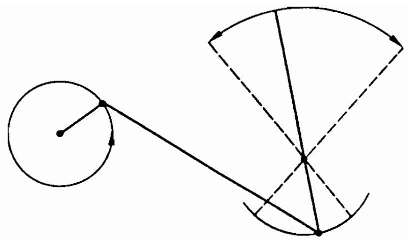


Abb.24

Oder die Schwingung wird gleich durch eine Rotation ersetzt: Kreissäge, Rotationspresse, Wankelmotor.

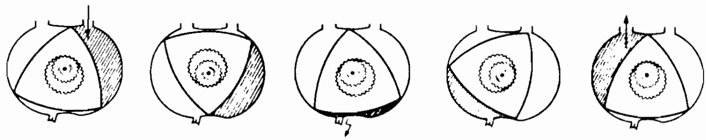
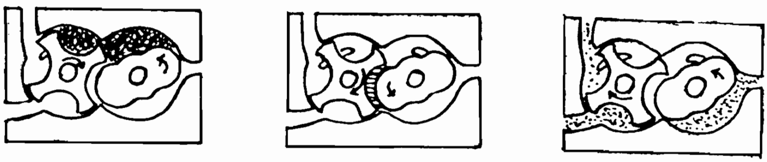


Abb.25

Beim Wankelmotor handelt es sich nicht einfach um die Rotation eines gleichseitigen Dreiecks mit gewölbten Seiten um seinen Mittelpunkt. Vielmehr rollt der dreieckige Läufer mit einem inneren Kreis (mit Zahnrädern) auf einem Kreis (mit Zahnrädern) ab, der fest im Gehäuse sitzt. Das Verhältnis der Radien und das der Zähneanzahl von 3:2 ist entscheidend dafür, daß die drei Ecken des Läufers auf einer einzigen Bahn laufen und wie diese Bahn aussieht. Nur so ist gewährleistet, daß immer drei getrennte Kammern vorhanden sind. Mit einer möglichst starken Außenwölbung der Dreiecksseiten wird eine hohe Kompression in der jeweils kleinsten Kammer erzielt. Kein Stück dieser Außenwölbung darf jedoch von der gegenüberliegenden Ecke des Läufers weiter entfernt sein als die beiden Nachbarecken, damit der Läufer auch wirklich in das Gehäuse paßt (im Gegensatz zur landläufigen Meinung ist der Läufer kein Reuleaux-Dreieck; vgl. 2.3.11). Über eine Exzenterscheibe, die genau in den Innenkreis des Läufers paßt, und eine Welle, die immer durch den Mittelpunkt des Festkreises geht, wird die Kraft übertragen (vgl. Schmidt 1960).

Wegen der großen Fliehkraft als Folge der Taumelbewegung des Läufers sind der Drehzahl bei diesem Motor Grenzen gesetzt. Felix Wankel hat einen neuen Motor entwickelt, bei dem zwei Läufer taumelfrei gegeneinander rotieren (nach Bazille 1982). Die Wirkungsweise des neuen Motors zeigt Abb.26. Er ist jedoch in der Praxis noch nicht erprobt.



a: Eintritt des Gemischs b: Verbrennung c: Auslaß der Abgase

Abb.26: Wankel II

Wie derartige Beispiele unterrichtlich bis hinauf in die Sekundarstufe II auszubauen sind, beschreibt z.B. Zeitler (1980, 1981).

In einem solchen praxisorientierten Geometrie-Unterricht gehen bei einer stufenweise Modellbildung vom Gebrauchsgegenstand über ein dreidimensionales Funktionsmodell bis hin zur Zeichnung zwei für die Wirkungsweise oft entscheidende physikalische Eigenarten verloren: Beim Funktionsmodell ist es meistens bedeutungslos, welcher Teil treibt und welcher Teil getrieben wird. Geometrisch sind bei einer Bewegungsübertragung beide Richtungen gleichberechtigt. Bei der Zeichnung schließlich sind auch die Funktion des Abrollens und die Vermeidung des Schleifens von Teilen aneinander nicht mehr deutlich, Reibungskräfte existieren nicht in der Geometrie. Trotzdem untersucht sie auch solche Rollvorgänge; nicht die Kräfte, sondern die Bewegungen werden beschrieben; und außerdem gibt es auch rein geometrische Rollvorgänge, z.B. von Zahnrädern gegeneinander.

Es ist auffällig, daß man bei ortsüberwindenden Bewegungen so gut wie nie die Kugel verwendet. Dies liegt daran, daß zweckvolle Bewegungen in der Regel eine bestimmte Richtung haben. Die große Bewegungsgruppe der Kugel würde hier nicht nur nichts nützen, sondern schaden, indem sie auch unerwünschte Richtungen ermöglicht. Bei den üblicherweise verwendeten schmalen oder breiten Walzen kann das nicht passieren.

2.2.3. Sachbereiche

Sport

In Sport (und Spiel) haben die grundlegenden geometrischen Ideen 'Ebene' und 'Kugel' mehr Eingang gefunden als bei der Anwendung auf im weitesten Sinne ökonomische Probleme, bei deren Lösung die Bewegungseinschränkungen der homogenen Linien 'Gerade', 'Kreis' und 'Schraubenlinie' gebraucht werden. Beim Sport sind vergleichsweise primitive, nicht nützliche Aufgaben zu erfüllen, z.B.: einen Gegenstand befördern (Fußball, Fechten, Tennis); eine Ortsveränderung vornehmen (Pferdsprung, Schwimmen, Laufen); Körperteile bewegen (Boxen, Gymnastik, Krafttraining). Der Sinn und Reiz der sportlichen Betätigung liegt nun darin, daß diese Aufgabe durch ebensowenig nützliche Bedingungen erschwert werden, deren Erfüllung eine gewisse Eignung trainiert, z.B.: Existenz eines Gegners, Weite eines Spielfeldes, Einbeziehung des Raumes, Vorschriften über den Weg, über die Art der Bewegung, Abstimmung auf Mitspieler usw. Aus diesem Prinzip ergibt sich beispielsweise, daß auf Ebenen mit Kugeln und nicht auf Streifen mit Walzen gespielt wird.

Ein anderer wichtiger Aspekt des Sports ist das Bestreben, für jeden Teilnehmer eines Wettkampfes gleiche Bedingungen zu schaffen. Diese Homogenitätsforderung läßt sich allerdings häufig nur im geometrischen Bereich verwirklichen: Die Spielfelder werden symmetrisch angelegt (wenn nicht die Aufgabe dem entgegensteht, so bei der Bergwertung im Radrennen, beim Ski-Abfahrtslauf, Hindernislauf, Golf). Unter Umständen begünstigt jedoch der Wind eine Mannschaft (und ändert bei Seitenwechsel manchmal auch noch seine Richtung); Schwimmbahnen sind parallel und gleichlang - wegen des Wellenschlags sind die inneren jedoch schneller; alle Teilnehmer eines Ski-Abfahrtslaufes müssen nacheinander über dieselbe Strecke - die Piste vereist jedoch im Laufe des Rennens und die später Abfahrenden sind benachteiligt.

Darüber hinaus werden die Sportstätten möglichst eben gestaltet, damit die Leistung nicht vom (geometrischen) Zufall abhängt, sondern vom Können des Sportlers. Ebenen findet man in den verschiedensten Genauigkeitsgraden, die von der Intensität der Berührung mit dem Gerät abhängen: Beim Curling liegt das Gerät auf einer vollen ebenen Fläche auf dem Eis auf; damit es weit gleitet, läuft der Schütze vor ihm her und kehrt mit einem Besen Unebenheiten weg. Wenn es gebremst werden soll, unterläßt er diese Reinigung. Die Kegelkugel berührt die Unterlage zwar nur in einem Punkt, aber dafür auch auf ihrem ganzen Weg. Damit von dem mitgegebenem Schwung nicht so viel verloren geht, ist sie und vor allem die Unterlage glatt, im Gegensatz etwa zum Billardtisch, mit dessen rauher Bespannung ein Gleiten der Kugel verhindert werden soll, das wegen deren geringen Gewichts und der Art des Stoßes leicht auftreten könnte.

Wo dann schließlich im Ballspiel sich die Gegner direkt gegenüber stehen, der Ball sich meist in der Luft befindet und vom Menschen oder einem Hilfsgerät (Schläger) abprallt, er also sich elastisch verformen können muß, ist die Glätte des Platzes nicht mehr so entscheidend, sondem vielmehr ihre Bewegungsfreundlichkeit (Rasen, Tennishartplatz, auch Aschenbahn). Hallenplätze wiederum sind glatter, weil sie kleiner sind und daher für Spiele genauer sein müssen, es von der Bautechnik her auch sein können. Auch beim Schwimmsport ist man bemüht, Wettkämpfern möglichst ebene Wasserspiegel zum Schwimmen zur Verfügung zu stellen.

Abgesehen davon, daß alle Bälle beim Flug durch die Luft oder beim Aufprall verformt werden und vorübergehend ihre Kugelgestalt verlieren, gibt es auch solche, die von vornherein davon abweichen. Etwa beim Rugby (siehe Abb.167h), wo der Ball ja unter dem Arm getragen werden darf und deshalb beim Schießen mit dem Fuß besondere Fertigkeit verlangt wird; oder beim Eishockey, wo wegen der besonderen physikalischen Eigenschaften des Eises der Puck eine flache Scheibe ist.

Über Ebene und Kugel hinaus gibt es in Sport und Spiel für zahlreiche geometrische Begriffe Geräte als Realisate: Tischtennisplatte, Fußballtor, Tennisschläger, Reckstange, Kletterstange, Hochsprungständer, Diskus, Speer, Hochsprungstab, Ringe, Reifen, Ski, Schlittschuhe, Rollschuhe, deren jeweilige spezielle Zweckmäßigkeit ähnlich wie bei allen bisherigen Beispielen untersucht werden kann.

Fahrzeuge

Der Sachbereich der Fahrzeuge ist ebenfalls reich an operativen geometrischen Aspekten.

Einspurige Fahrzeuge dürfen nur so groß sein, daß sie vom Benutzer noch im Gleichgewicht gehalten werden können (Fahrrad, Motorrad), einachsige müssen gezogen werden, damit sie nicht kippen (römischer Kampfwagen, Wohnwagen). Bei anderen als diesen Sonderformen dürfen die Punkte, in denen das Fahrzeug auf der Unterlage steht, nicht kollinear sein; die geometrisch einfachste Erfüllung dieser Forderung ist die Anordnung von Punkten im Dreieck (Kinderdreirad, Motorrad mit Beiwagen, Rollfix-Klein-Lkw mit einem Rad vorn in der Mitte). Vierrädrige Fahrzeuge haben eine deutlich stabileren Stand. Für die Verlängerung von Fahrzeugen oder den Transport hoher Gewichte wird die Achsenzahl oder die Zahl der Räder auf einer Achse erhöht; damit die Kurvenbeweglichkeit nicht leidet, werden längere Fahrzeuge in sich beweglich gemacht (Gelenkomnibus, Eisenbahnzug, gewisse Baufahrzeuge).

Die geringe Bodenberührung des Rades wird zum Nachteil, wenn der Boden nicht fest genug ist (Sumpf, Sand, Schnee) oder aus sonstigen Gründen druckempfindlich ist (Eis). Die Bodenfreiheit des mehrachsigen Räderfahrzeugs wirkt sich in stark unebenem Gelände hinderlich aus. Schnee und Eis schmelzen unter Druck; an den Druckstellen wird dadurch die Reibung so gering, daß Räder nur rollen, wenn Ketten aufgelegt und durch deren Eindruck im Boden Inhomogenitäten erzeugt werden, die die Haftung vergrößern. Nur so ist ein Radantrieb möglich. Wird das Gefährt durch Translationsbewegungen vorangetrieben, sind Kufen die geignete Fahrzeugauflage (Schlittschuhe, Ski, Schlitten): Die Last wird auf eine größere Fläche (Linie) verteilt, das Gefährt sinkt kaum ein und gleitet fast widerstandslos dahin.

Dies ist auch das Prinzip des Kettenfahrzeugs (Planierraupe, Panzer): Durch eine möglichst großflächige Bodenauflage wird der Druck verringert; damit wird sumpfiges oder sandiges Gelände zugänglich. In unebenem Gelände liegt das Fahrzeug auf dem höchsten der Punkte, über denen es sich gerade befindet, mit der Kette immer auch auf und kann so mittlere Unebenheiten überwinden.

Abb.27 a b

Während aber dort, wo Kufenfahrzeuge verwendet werden, nämlich auf Eis und Schnee, die Reibung so gering ist, daß die Fahrzeuge mit den Kufen tatsächlich gleiten, ist auf einigermaßen festem Boden die Gleitreibung sehr hoch. Man kann dort Fahrzeuge nicht gleiten lassen, sondern muß (mit Rädern und evtl. Ketten) dafür sorgen, daß sie rollen. Eine Ausnahme bildet ein primitiver Schlitten, wie er von Indianern verwendet wurde:

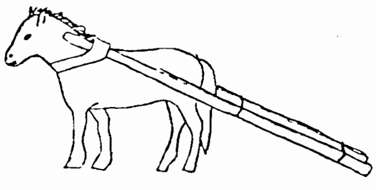


Abb.28

Eine Art Bahre wird von einem Pferd gezogen und schleift mit den Enden der beiden hinteren Stangen auf dem Boden; wegen der kleinen Auflagefläche ist auch die Reibung klein. Das erinnert an den Transport schwerer Steinquader, deren Weg stückweise mit Walzen ausgelegt wird. Auch beim Kettenfahrzeug wird prinzipiell der ganze Weg mit Kettengliedern ausgelegt und damit die Nachgiebigkeit und

Unebenheit des Bodens ausgeglichen. Auf diesem Kettenweg kann das Fahrzeug dann in üblicher Weise rollen. Darin liegt bereits das Funktionsprinzip des Schienenfahrzeugs. Da das (Ketten-)Fahrzeug aber nicht an einen festen Weg gebunden sein soll, nimmt man überrollte Kettenglieder hinten weg und legt sie vorne in der gewünschten Richtung an. Diese Tätigkeit läßt man noch von dem Fahrzeug selbst verrichten, indem man die Ketten schließt und über die Räder spannt:

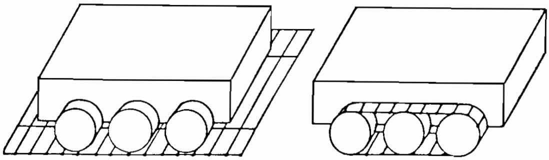


Abb.29

Wegen der hohen Beanspruchung müssen die Ketten stabil sein und können z.B. nicht aus durchgehenden Metallbändern bestehen, weil diese ja wegen der dauernden Krümmungsänderung recht dünn sein müßten. Sie sind aus gleichartigen Gliedern zusammengesetzt und weisen damit eine diskrete Homogenität auf.

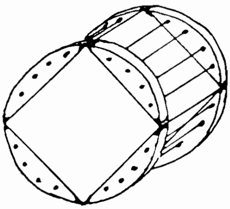


Abb.30

Eine ganz andere Technik, mit deren Hilfe die alten Ägypter (nach der Zeitschrift 'Stern' 1982, Heft 2) ihre Steinblöcke zum Pyramidenbau transportiert haben könnten, ist das Prinzip des Rhönrads: Am Stein werden Holzaufbauten so angebracht, daß das Ganze eine dicke Achse (mit quadratischem oder wenigstens fast quadratischem Querschnitt) mit zwei Holzrädern wird und (relativ) leicht rollen kann.

Innerhalb des Sachbereichs 'Fahrzeuge' läßt sich noch der Komplex der Eisenbahn ausgliedern. An der Dampflok kann man den walzenförmigen Kessel beobachten, die Bewegung der Kolben (die keinen kreisförmigen Querschnitt haben) in den Zylindern, die Übersetzung dieser Bewegung in die Rotation der Antriebsräder, die diskrete Homogenität der Radspeichen, die ungleichmäßige Gewichtsverteilung auf den Schwungrädern.

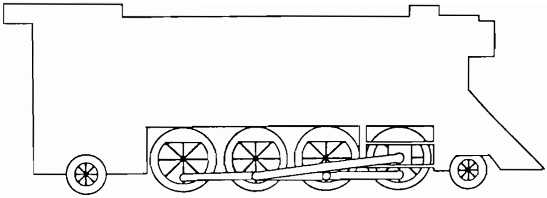


Abb. 31

Ein wichtiges Phänomen sind auch die Schienen mit ihrer Glattheit, Parallelität und der diskreten Homogenität der Schwellen. Mehr als bei Straßen gibt es bei der Eisenbahn lange gerade Linien. Die beiden Schienen scheinen in der Ferne zusammenzulaufen; wenn man sich aber einem vorher fixierten Punkt nähert, stellt man fest, daß ihr Abstand noch derselbe ist. Diese Konstanz des Abstands wird durch die Montage der Schienen auf den Schwellen gesichert, man braucht sich also nicht persönlich davon zu überzeugen, daß die beiden Schienen sich näherkommen.

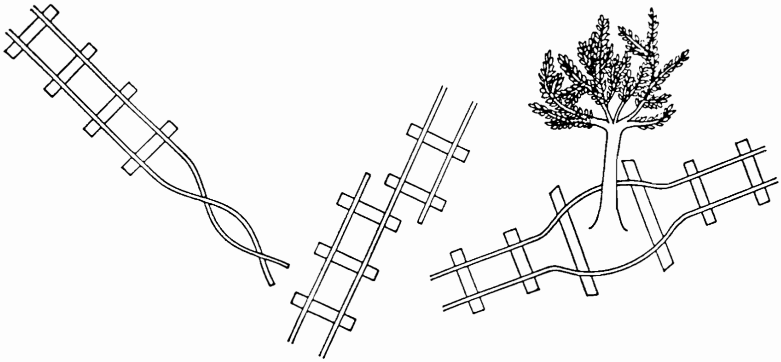


Abb. 32

Ein weiterer möglicher Sachbereich mit vielen praktischen geometrischen Formen wäre etwa 'Haushaltsgegenstände'.

2.2.4. Homogenität - Inhomogenität

Die Homogenitäten der sechs erwähnten Grundformen sind kontinuierlich, d.h.: Stellen, die man sich beliebig klein, beliebig groß und in beliebiger Entfernung voneinander vorstellen kann, lassen sich nicht voneinander unterscheiden. Nun gibt es Gebilde, die nicht in diesem, sondern nur in einem erweiterten Sinn homogen sind: Nur bestimmte, endlich oder abzählbar unendlich viele Stellen sind voneinander ununterscheidbar, z.B. die sechs Seitenflächen beim Würfel oder das unendlich oft wiederholte Grundmuster eines Ornaments. Abbildungsgeometrisch gesehen haben die im engeren Sinn homogenen Gebilde kontinuierliche, die im weiteren Sinn homogenen diskrete Bewegungsfixgruppen.

Diskrete Homogenitäten

Warum würfelt man mit Würfeln und nicht mit Kugeln, Ikosaedern, Tetraedern, beliebigen Quadern?

Weitere Beispiele für diskrete Homogenitäten: Indem man strickend Masche an Masche und Zeile an Zeile setzt, wird aus dem Wollfaden ein Pullover. Der Schraubenschlüssel rutscht am eckigen Rand der Schraubenmutter nicht ab. Zwei Zahnräder werden durch ihre Zähne und Lücken miteinander verkoppelt. Mit der Säge kann man nur aufgrund der Zähne am Sägeblatt in Holz eindringen (Kartoffelreibe, Schmirgelpapier und Bürste sind zweidimensionale Analoga). Wäre der Korkenzieher ein Rohr, hätte er keinen Halt im Korken, sondern würde ein zylinderförmiges Stück ausschneiden. In den Pistolenlauf ist eine Schraubenlinie eingezogen, die dem Geschoß einen bahnstabilisierenden Drall mitgibt.

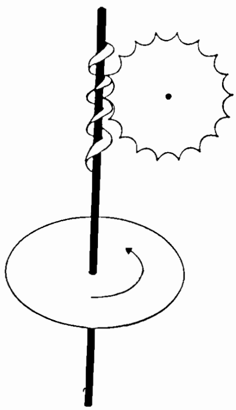


Abb.33

Beim Stromzähler (Abb.33) wird mittels der Diskretheit einer Schraubenfläche eine stetige Kreisbewegung in digitales Zählen umgewandelt: Die Ankerscheibe rotiert mit einer Geschwindigkeit proportional zum Stromverbrauch, die Schraubenfläche auf der Drehachse rotiert mit und dreht dabei das Übertragungsrad zum Zählwerk (vgl. Gööck (1971/1975), S.403).

Damit Menschen Höhenunterschiede überwinden können, baut man nicht schiefe Ebenen, sondern Leitern mit Sprossen oder Treppen mit Stufen. Das Fließband beim Autobau wird immer um eine feste Länge vorwärts bewegt und eine konstante Zeitspanne lang angehalten. Das Drehkreuz am Schwimmbadeingang dreht sich immer um einen konstanten Winkel (von 90°) und rastet wieder ein.

Durch diese Diskretheiten wird die Beweglichkeit jeweils eingeschränkt, durch die Gleichartigkeit der einzelnen Diskretheiten an jedem Gegenstand jedoch seine Funktion gewährleistet: Das Stricken könnte nicht automatisch erfolgen ohne die Gleichartigkeit der Maschen und der Zeilen; der Schraubenschlüssel kann an jeder der sechs Seiten der Mutter gleichermaßen ansetzen; die Zahnräder würden sich kaum bewegen (lassen), wenn ihre Zähne verschieden hoch oder verschieden weit auseinander wären; der Korkenzieher ist nur dank konstanter Ganghöhe und konstanten Durchmessers im Lager beweglich; und Treppen mit unterschiedlich hohen oder breiten Stufen wären besonders unfallträchtig.

In wirtschaftlichen Produktionsprozessen sind die Rohstoffe und Erzeugnisse oft nicht kontinuierliche Mengen, sondern diskrete Einzelstücke, z.B. Ziegelsteine, Fliesen, Bleche, Brot, Zeitungen, zwei spiegelgleiche Hälften eines Doppelhauses: sie sind homogen, damit sie gleichartig verarbeitet bzw. weil sie gleichartig erzeugt werden - zwecks Kostensenkung und Qualitätskonstanz.

Ähnliche Überlegungen führen zu Homogenitäten bei Diskretheiten zwecks Längen- oder Oberflächenvergrößerung, Materialersparnis oder Durchlässigkeit (Lattenzaun, Vogelkäfig, Maschenzaun, Kamm, Gabel, Speichenrad, Netz, Öffnung des Fleischwolfs, elektrische Spule, Heizkörper). Wenn ein Gitterabstand, eine Maschenweite, ein Lochdurchmesser, eine Form, eine Herstellweise als günstig erkannt sind, so bedarf es schon eines sonstigen handfesten Grundes, um sie zu ändern.

Dieser Grundsatz gilt auch bei spiegelsymmetrischen Objekten (etwa ein Auto von vorn). Eine besonders instruktive Ausnutzung der Spiegelsymmetrie stellt folgende alte Aufgabe dar (Kordemski 1959/1965): Ein Kürschner soll in einem wertvollen Pelzmantel ein Loch von der Form eines unsymmetrischen Dreiecks mit einem Flicken stopfen, der dieselbe Machart wie der Mantel hat. Der Kürschner schneidet nach den Maßen des Lochs einen Flicken zurecht. Beim Einpassen stellt er mit Schrecken fest, daß der Flicken nicht in das Loch paßt, weil seine Form spiegelverkehrt dazu ist und er nicht einfach gewendet werden kann, da der Pelz innen anders beschaffen ist als außen. Zum Wegwerfen ist der Flicken zu teuer, und so verfällt der Kürschner nach langem Grübeln auf eine Lösung, wie er durch geeignetes Schneiden (!) den Flicken doch noch passend machen kann. Wie? - Er schneidet den Flicken wie in Abb.34 in drei spiegelsymmetrische Stücke, wendet diese einzeln, näht sie wieder zusammen und hat dann den zum Loch passenden Flicken.

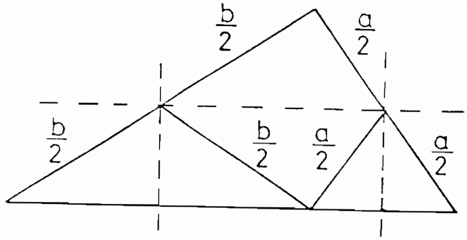


Abb. 34

Auch in der Natur gibt es viele Beispiele für diskrete Homogenitäten: Haarkleid, Gebiß, Rippen, Wirbelsäule, Blüte, höhere Tiere mit ihrer Spiegelsymmetrie von vorn, jede Art mit ihren Individuen. D'Arcy W. Thompson (1917/1942) hat allerdings darauf aufmerksam gemacht, daß diese Homogenitäten bei weitem nicht so vollkommen sind wie enthusiastische Naturliebhaber gewöhnlich annehmen (z.B. S. 538).

Auch wenn an Gegenständen Ebenen, Geraden, Kreise usw. durch diskrete Homogenitäten aufgelöst werden, sind diese Grundideen in ihnen immer noch deutlich und haben auch ihren Zweck: Durch die Ebenheit des Schmirgelpapiers ist gewährleistet, daß bei der für die Hand günstigen Bewegung in einer Ebene eine möglichst große Fläche am Schmirgeln beteiligt ist. Wenn das Sägeblatt keine Ebene, sondern eine gekrümmte Fläche wäre, könnte die Säge im Holz nicht oder jedenfalls nicht mit Kraft bewegt werden. Die Kreisform des Zahnrades sichert, daß bei seiner Drehung die Kraftübertragung immer an derselben Stelle erfolgt. Es sind hier also immer zwei Arten von Homogenitäten (die oben so bezeichnete Grundidee sowie die Gleichmäßigkeit ihrer Auflösung) und eine Inhomogenität (die Auflösung der Grundidee) vorhanden. (Die Beispiele 'Korkenzieher', 'Pistolenlauf' und 'Stromzähler' in diesem Zusammenhang dürfen nicht so verstanden werden, daß die Schraubenlinie eine nicht homogene Form sei; sie sind vielmehr so zu interpretieren, daß ein Zylinder durch Auszeichnung einer Schraubenlinie auf sich inhomogen wird.)

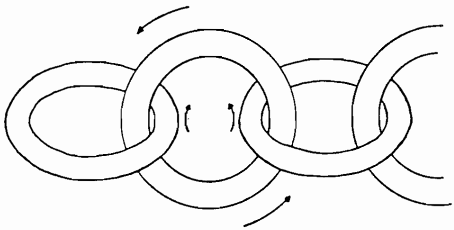
Auch wenn für die Bildung fast aller geometrischer Ideen der Begriff der Homogenität fundamental ist, so spielen in den Anwendungen Inhomogenitäten und, allgemeiner, Abweichungen von Grundformen, eine ebenfalls wichtige Rolle. Die oben beschriebenen Formen mit diskreter Homogenität stellen erste Beispiele dar. Inhomogenitäten treten nicht erst als Auflösung von Grundformen bei Realilisierungen auf, sie sind selbst schon Grundformen und Varianten von Grundformen: Kreise werden ersetzt durch Ellipsen, Ovale oder regelmäßige Polygone; Zylinder durch Kegel oder Kegelstümpfe; Ebenen und Geraden durch flächen- bzw. linienhafte Gewölbe.

Ellipse

Die ästhetische Wirkung der Ellipse beruht wohl darauf, daß bei ihr - anders als beim Kreis - gewisse Durchmesser und damit gewisse Richtungen ausgezeichnet sind und die (langweilige) Symmetrie des Kreises durchbrochen ist. Ellipsenförmige Gegenstände sind i.a. schwieriger herzustellen als kreisförmige (Tischplatte, Dose, Blumenbeet) und entsprechend teurer und auch weniger gut verarbeitet (kreisförmige Uhren und Bullaugen sind einfacher gegen Wasser abzudichten als ellipsenförmige). Mit der Ellipsenform läßt sich auch Platz sparen (wenn nur in einer Richtung ein bestimmter Durchmesser gebraucht wird; z.B. Türschild, Handspiegel; siehe auch Abb.66).

Zwecks Platz-, Materialersparnis und Verringerung der Beweglichkeit werden Kettenglieder i.a. nicht wie in Abb.35a, sondern wie in Abb.35b angefertigt.

a



b

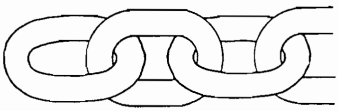


Abb.35

Das Kettenblatt am Fahrrad ist günstigerweise elliptisch geformt. Diese Form paßt besser zu der ungleichmäßigen Krafteinwirkung beim Treten als die homogene Kreisform: Bei der Abwärtsbewegung ist die Übersetzung groß, beim Durchlaufen der Totlage ist sie kleiner (Abb.36a). Allerdings führt diese Form zu Schwierigkeiten mit der Gangschaltung, so daß man eine Konstruktion entwickelt hat, bei der das Kettenblatt selbst kreisförmig und lediglich die Bahn der Pedale ellipsenförmig ist (Abb.36b).

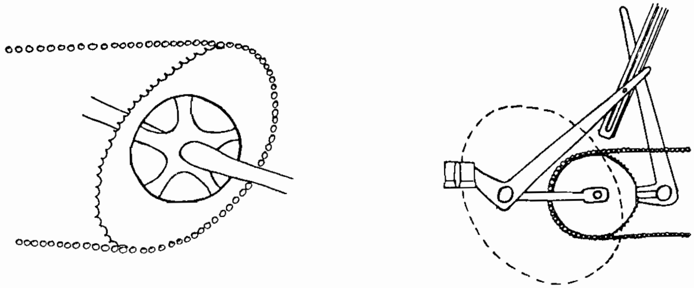


Abb. 36 a b

Es gibt auch Realisate der Ellipse, die deren Brennpunkt-Eigenschaft ausnutzen: Vor einiger Zeit wurde ein Gerät zur Zertrümmerung von Nierensteinen entwickelt. Es enthält ein Rotationsellipsoid als Hohlkörper, in dessen einem Brennpunkt durch elektrische Funkenentladungen Stoßwellen erzeugt werden, die sich nach allen Richtungen ausbreiten, an der Wand des Hohlraums reflektiert und im anderen Brennpunkt gebündelt werden (Abb.37). Da das Ellipsoid nicht komplett materialisiert ist, kann das Gerät so am menschlichen Körper angesetzt werden, daß der zweite Brennpunkt sich genau im Nierenstein befindet, der dann zertrümmert wird (nach der Zeitschrift 'Stern' 1980, Heft 30).

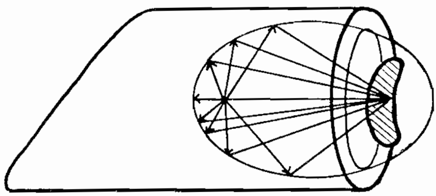


Abb. 37

Kegelstumpf

Ein anderer wichtiger Begriff, der bereits als Idee nicht homogen ist, ist der Kegelstumpf als Variante des (endlichen) Zylinders mit unterschiedlich großen Boden- und Deckflächen. Behälter haben häufig diese Form: Waschschüssel, Putzeimer, Papierkorb (auch als Pyramidenstumpf), Trinkglas, Blumentopf. Alle diese Gegenstände haben eine größere Öffnung als ein volumen- und höhengleicher Zylinder - Wasser, Wäsche, Abfallpapier, Getränke, Blumenerde können somit leichter in sie hinein- oder aus ihnen herausbefördert werden (Abb.40). (Für die Funktion des Trichters ist ein großer Flächenunterschied zwischen Deck- und Bodenfläche sogar ausschlaggebend.) Mit solchen Behältern (mit großer Deckfläche) ist das Ausschütten leichter, z.B. mit der Waschschüssel im Vergleich zu einem Zylinder gleicher Höhe und gleicher Deckfläche. Von vornherein wird beim Kegelstumpf weniger Wasser gebraucht.

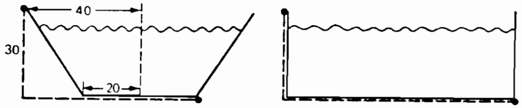


Abb.38

Ein weiterer Vorzug zeigt sich beim Kippen. Zwar ist beim Kegelstumpf der Hebelarm vom Ansatzpunkt der Kraft bis zum Kippunkt etwas kürzer, dafür befindet sich aber ein Teil des Wassers schon auf der anderen Seite des Hebels und hilft beim Kippen durch sein Gewicht. Schließlich läuft die Kegelstumpfschüssel erst bei einem größeren Kippwinkel über, weil der Wasserspiegel langsamer steigt. Sie wirkt dadurch mehr als Tülle, und der Schüttvorgang läßt sich besser kontrollieren.

Auch für das Trinkglas ist die Kegelstumpfform günstiger, weil ein zylinderförmiges Glas leichter aus der Hand gleiten kann. - Entsprechend sind Trinkbecher aus Pappe besonders platzsparend aufzubewahren, indem sie ineinandergesetzt werden und dabei sich gegenseitig ihre Lager bilden. - Nach demselben Prinzip, jedoch als Pyramidenstümpfe, sind Einkaufswagen konstruiert. Dadurch, daß sie eine hochklappbare Rückwand haben, lassen auch sie sich platzsparend ineinander schieben (Abb.39).

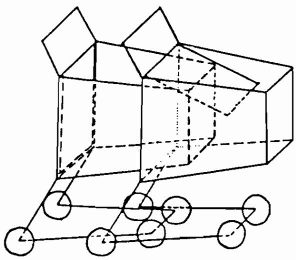


Abb.39

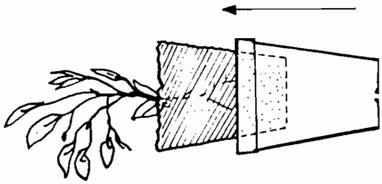


Abb.40

Leicht abgewandelt verwendet man dieses Prinzip auch beim Bau von Gewölben mit kegel- (oder pyramiden-)stumpfförmigen Steinen oder einer entsprechenden Vermörtelung (siehe Abb.46).

Die Beweglichkeit des Zylinders in seinem Lager würde sich bei der Erde in einem Blumentopf genau entgegengesetzt auswirken, weswegen auch dort die Kegelstumpfform verwendet wird: Nach einem kräftigen Ruck lockert sich die Erde vom Topf, und läßt sich leicht entfernen; dagegen müßte in einem Zylinder der Erdpfropfen sich entlang der Innenwand bewegen und bliebe hängen (Abb.40).

Ähnlich werden ein Napfkuchen oder ein Pudding aus ihrer Form gestürzt. Daß der Pudding auch nach der Ablösung vom Topf seine Form auf dem Teller behält, ist mit eine Folge seiner Kegelstumpfform: Der breite Boden und die Verjüngung nach oben verhindern, daß er in sich zusammenfällt. An Fabrikschornsteinen und vielen anderen hohen Gebäuden wird ebenfalls aus Stabilitätsgründen die Kegelstumpfform mit breiter Grundfläche mehr oder weniger vollkommen realisiert.

Bei Verpackungen (Becher, Dosen) wirkt die Kegelstumpfform (mit breiter Auflagefläche) optisch größer als die Zylinderform. Dies liegt einmal an dem Eindruck größerer Stabilität (siehe z.B. Tjalve 1978, S.198), und zum anderen daran, daß ein Dreieck zwar den halben Inhalt eines Rechtecks mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe hat, ein Kegel jedoch nur ein Drittel des Inhaltes des entsprechenden Zylinders. Offenbar gelingt es auch Erwachsenen nur unvollkommen, die Dimension der Tiefe mit den Dimensionen der Breite und Höhe zu koordinieren. Während man die Ausnutzung dieser Tatsache noch als legitimen psychologischen Trick bezeichnen kann, läßt sich das Einziehen eines inneren Bodens schon als Herstellen einer Mogelpackung interpretieren.

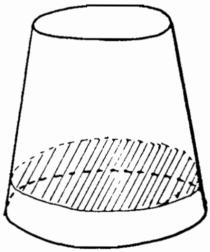


Abb.41

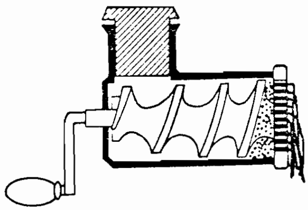


Abb.42

Dafür ist die Kegelstumpfform mit breiter Auflagefläche gut geeignet, denn eine Verringerung der Höhe erzeugt für den Innenraum überproportionalen Volumenverlust. Die Schnecke im Fleischwolf hat Kegelstumpfform. Sie verdickt sich in

Richtung des Ausgangs. Damit und mit einer gleichzeitigen Verengung der Schraubenwindungen wird bei der Rotation ein Zusammendrücken der Brocken erreicht (Abb.42).

Abweichungen vom Zylinder

Die (Wein-)Flasche braucht eine dünne Öffnung zum leichteren Verschließen und genaueren Schütten und einen dicken Bauch zur Aufnahme der Flüssigkeit.

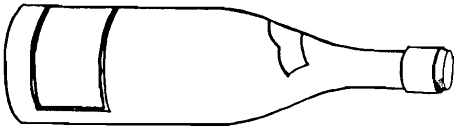


Abb.43

Der Trinkstiefel mit seinem Fuß als ausgeprägter Imhomogenität ist ein tückisches Trinkgefäß. Ist er etwa halb gefüllt, so sollte man ihn tunlichst nicht mit der Spitze nach oben kippen, denn sobald die Luft den Fuß des Stiefels erreicht, fällt die dort befindliche Flüssigkeit fast frei herunter dem Trinkenden ins Gesicht (und über die Kleidung).

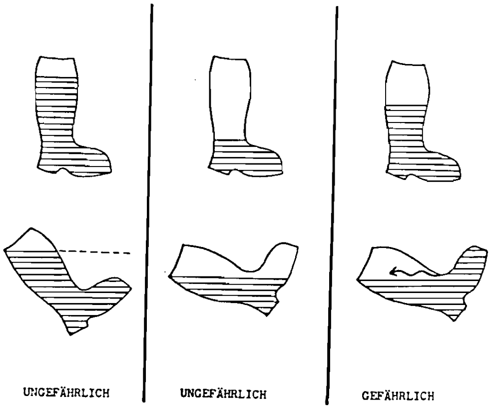


Abb.44

Abweichungen von der Ebene

Für viele Gefäße wird die Form nicht nur durch die Funktion als Behältnis oder durch die Art des Füllens und Leerens bestimmt, sondern auch wesentlich durch die Lage im Schwerefeld der Erde: Sie haben einen flachen Boden, der meist nicht eben ist, sondern nach innen gewölbt, so daß der Behälter auf einer von einem Wulst gebildeten (ideal) eindimensionalen Linie ruht (Abb.45). Wäre der Boden solcher Gefäße eine Ebene, so würde eine kleine Inhomogenität - ein Krümel oder eine Ausbuchtung an Boden oder Unterlage - dem Gefäß eine instabile Lage geben.

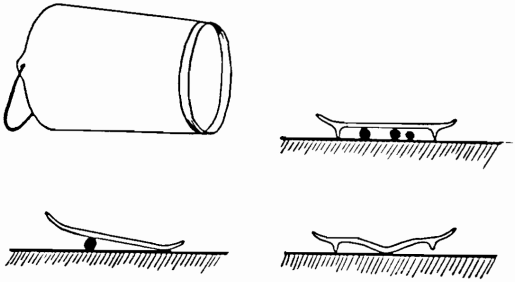


Abb.45

An Bauwerken aller Art werden Ebenen oder Geraden durch Gewölbe ersetzt: Brücken, Fensterbögen, Kuppeln usw. Wesentlich ist, daß jeder verbaute Stein Teil eines nach oben gekrümmten Bogens ist, in dem seine untere Randfläche kleiner ist als die obere (Abb.46). Die Schwerkraft kann ihn dann nicht nach unten ziehen, weil es das von den Nachbarsteinen gebildete kegel- (oder pyramiden-)stumpfförmige Lager nicht zuläßt. Dies ist die Umkehrung des oben geschilderten 'Blumentopf-Prinzips'.

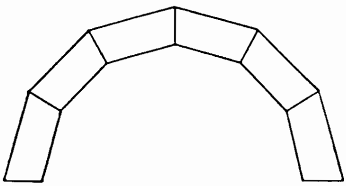


Abb.46

Sonstige Inhomogenitäten

Bisweilen wird die Beweglichkeit im Lager durch Inhomogenität sonst homogener Flächen eingeschränkt. Beim mörtellosen Mauerbau stellten die alten Griechen an den inzidierenden ebenen Flächen zweier benachbarter Steine ineinander passende Aus- bzw. Einbuchtungen her, damit die Steine sich nicht gegeneinander (Ebene in ihrem Lager) bewegten. Beim Regenschirm sitzt am Stock knapp oberhalb des Griffs ein Zäpfchen, das den Speichenring festhält; drückt man den Zapfen ein, so wird der Ring entlang dem Stock frei beweglich (Gerade in ihrem Lager).

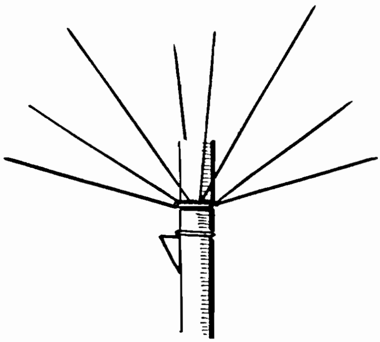


Abb. 47

Beim Drehkreuz hemmt eine Sperrvorrichtung die Bewegung rückwärts (Kreis in seinem Lager).

Die Anpassung geometrischer Formen an die menschliche Anatomie erfordert Inhomogenitäten: Gute Stühle haben keine ebene Sitzfläche; die Quaderform eines Koffers wird durch einen Griff durchbrochen; in Kegelkugeln sind Löcher für die Finger eingelassen; Weingläser haben einen Stiel und Tassen einen Henkel, damit sie so gehalten werden können, daß zwischen Hand und Flüssigkeit kein Wärmeaustausch stattfindet.

Der Rasierspiegel ist nicht eben, weil er kein isometrisches sondern ein vergrößertes Bild vom stoppelbewachsenen Unterkiefer geben soll. Fast sämtliche optischen Linsen sind nicht planparallel, weil sie Bilder 'verzerren' sollen; sie müssen ihre vorgesehene Form natürlich besonders genau realisieren.

Schließlich noch einige Einzelbeispiele:

- Der Zirkel soll den starren Körper realisieren. Damit er aber funktionieren, d.h. vorgegebene Längen abgreifen kann, ist die Starrheit nicht vollständig, sondern wird mit einem Scharnier durchbrochen.
- Die Kanten im Querschnitt des Läufers beim Wankelmotor (siehe Abb.25) sind keine geraden Linien, sondern sie sind nach außen gewölbt, um die Kompression zu vergrößern.
- Beim Herstellen eines rechteckigen Fensters mit Metallrahmen werden die Leisten nicht orthogonal aneinandergeschweißt, sondern an allen vier Ecken in einem etwas kleineren Winkel; dadurch entsteht eine gewisse Spannung im Rahmen, und diese macht ihn stabiler.

2.2.5. Optimierung

Neben die Aufgabe, ein bestimmtes Problem überhaupt zu lösen, tritt häufig eine Aufgabe zweiter Stufe: das Problem besonders gut zu lösen. Zwischen beiden Stufen muß nicht prinzipiell unterschieden werden; oft genug besteht eine Aufgabe gerade im Suchen eines Optimums. Dazu muß aber eine entsprechende Problemformulierung vorliegen: Irgendein Zweck (Ziel) muß vorgegeben sein, der es ermöglicht, von der Güte einer Lösung zu sprechen und dann die Güten verschiedener Lösungen miteinander zu vergleichen. Das erfordert eine dazu passende (lineare) Güteskala, auf der jede mögliche Lösung zum Vergleich einen eindeutig bestimmten Gütewert erhält. Und selbstverständlich müssen die äußeren Bedingungen des Problems bekannt sein, insbesondere muß man wissen, welche Möglichkeiten es für die Lösung überhaupt gibt. Erst dann setzt üblicherweise die mathematische Optimierungstheorie ein. Diese ist zwar stark von geometrischer Begriffsbildung geprägt; uns kommt es aber nicht auf diesen Aspekt an, sondern auf <u>geometrische</u> Optimierungsprobleme, auf die Optimierung geometrischer Formen.

Gemäß dem Begriffsbildungsschema (für das POB) führt die Analyse geeigneter Zwecke auf die Funktion der Optimierung, die von gewissen Formen, Größen, räumlichen Beziehungen geleistet wird, usw. Das Konstatieren der Optimalität einer Form ist hier zuallererst Teil der geometrischen Begriffsbildung, und auch die Festlegung von Optimalitätskriterien gehört wesentlich dazu. Mathematische Optimierung ist eine vom Geometrie-Unterricht weitgehend unabhängige Disziplin. Schon viele sehr elementare geometrische Optimierungsprobleme lassen sich nicht mit den Algorithmen der Linearen Optimierung angehen, weil Zielfunktion oder Randbedingungen nicht linear sind; manche, z.B. gewisse Lagerungsprobleme, sind überhaupt noch nicht gelöst. Für viele Probleme müssen jeweils spezielle Lösungsmethoden entwickelt werden. Im folgenden geben wir eine Auswahl einfachster geometrischer Sachverhalte an, die nach irgendeinem Kriterium optimal sind. Es läßt sich feststellen, daß eine unter sinnvollen Forderungen optimale Form ausgeprägte Homogenitäts- bzw. Symmetrie-Eigenschaften besitzt, und zwar nach dem plausiblen Grundsatz, wonach bei Gleichheit der Bedingungen für verschiedene Stellen einer Form auch die Stellen selbst 'günstigerweise' ununterscheidbar gemacht werden.

Wir werden auch einige Beispiele aus dem Bereich der Natur erwähnen. Das 'Streben' nach Optimalität ist eine Gesetzmäßigkeit zahlreicher Naturerscheinungen - ein Lichtstrahl legt die 'kürzeste' Bahn zurück; eine Seifenblase formt sich so, daß ihre Oberfläche minimal wird; die Bienen bauen ihre Waben mit minimalem Materialaufwand, usw. Extremalprinzipien eignen sich vorzüglich zum Verständnis natürlicher Vorgänge, man denke nur an Hamiltons "Prinzip der kleinsten Wirkung" in der klassischen Mechanik. Natürliche Extremalität ist allerdings nicht das Ergebnis einer reellen Exhaustion, sie ist keine Idee, die ein Wesen 'Natur' zu verwirklichen strebt, wohl aber eine, die wir als Menschen zur Beschreibung dieser Natur verwenden (also als Element einer ideellen Exhaustion).

Eine jegliche biologische Art, wenn sie überhaupt entstehen konnte, hat sich in irgendeiner - oft auch morphologischen - Hinsicht als optimal erwiesen. Die Vielfalt gleichzeitig existierender Lebewesen läßt aber auf eine ebensolche Vielfalt von Optimalitätskriterien schließen, die nicht faßbar sind ohne eine genauere Kenntnis der jeweiligen Umweltbedingungen, von Zwischenformen im Laufe der Entwicklung und von verwandten Arten. Solche Fragen gehören mehr der Biologie, besonders der Morphologie, und nicht der Geometrie an.

Ränder

Nun zu einigen Beispielen aus der Geometrie:

Es wäre sinnlos, so etwas zu behaupten wie: 'das Quadrat ist das optimale Rechteck'. Denn: für Papierformate nach DIN eignet sich z.B. ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $1:\sqrt{2}$; für Flure ist die Quadratform unpraktisch; und auch Ziegelsteine haben i.a. keine quadratischen Seitenflächen. Gemeint sein könnte aber wohl: Unter allen Rechtecken von gleichem Umfang hat das mit der größten Symmetrie, d.h. mit kongruenten Seiten, nämlich das Quadrat, den größten Flächeninhalt. - Hier sind die Bedingungen angegeben: Rechtecke mit einem gegebenen Umfang, und das Optimalitätskriterium 'Flächeninhalt' auf einer linearen Skala.

Schwieriger wird es, wenn die Bedingung der Rechteckigkeit fallengelassen und nur noch Meßbarkeit verlangt wird: Welches ist die maximale ebene Fläche zu einem gegebenen Umfang u ? Bekanntlich ist es der Kreis mit dem Radius

$u/2\pi$ und dem Flächeninhalt $u^2/4\pi$. Wenn man also mit einer Schnur ein möglichst großes Stück Land eingrenzen will, so muß man sie in einem Kreis legen. Eine kreisförmige Weide verlangt beim Bau eines Zaunes gegenüber anderen Formen gleicher Größe den geringsten Materialverbrauch, und Pachom aus Leo Tolstois "Wieviel Erde braucht der Mensch?" (zit. nach Perelman (1954), S.199ff) verhielt sich höchst unökonomisch, als er das von ihm zu erwerbende Stück Land durch Umwanderung in Trapezform festlegte.

Im Raum ist die Kugel die Form mit minimaler Oberfläche bei gegebenem Volumen. Leitet man Luft in eine Seifenblase, so füllt sie deren Inneres derart, daß ihr Druck von innen den Luftdruck von außen und den Spannungsdruck der Seifenhaut gerade ausgleicht. Nach den Gesetzen der Oberflächenspannung formt sich dabei die umschließende Haut zur kleinstmöglichen Fläche, das ist die Kugeloberfläche. Der homogenen Ausbreitung des Drucks von innen entspricht die Homogenität der Form. Eine praktische Anwendung dieses Prinzips ist die Herstellung von Glaskugeln.

Die Gesetze der Oberflächenspannung haben drastische Auswirkungen, die sich einer exakten mathematischen Behandlung (Theorie der Minimalflächen) teilweise sogar entziehen, zumindest aber zur Vorsicht vor voreiligen Schlüssen mahnen. In einem klassischen Versuch nach J. Plateau wird ein stabiles Kantenmodell eines Würfels (mit der Kantenlänge 1) in Seifenlauge getaucht und wieder herausgeholt. Die Seifenhaut spannt sich nun keineswegs entlang der Seitenflächen, was eine Gesamtfläche von 6 liefern würde, sondern in den zwölf von den Raumdiagonalen gebildeten Dreiecken mit einer Gesamtfläche von $12 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}/4 = 3 \cdot \sqrt{2} < 6$ (Abb.48a). Führt man das Experiment sorgfältig durch, so bilden sich sogar vier 'Dreiecke' und acht 'Trapeze', die ein kleines 'Quadrat' schwebend halten (Abb.48b), wobei diese Flächen noch nicht einmal alle eben sind.

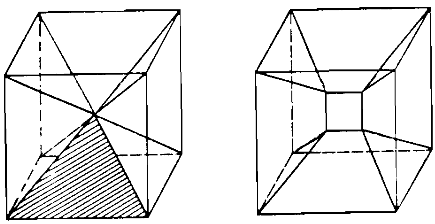
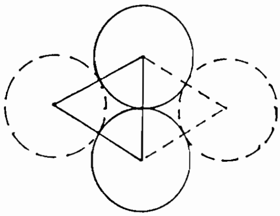


Abb.48 a b

Den Ersparniseffekt des Zwölfflächners (und damit auch des 13-Flächners) gegenüber dem Sechsflächner sieht man mit Hilfe einer kinematischen Vorstellung ein: Zunächst sei die Haut auf der Würfeloberfläche gespannt. Dann wird sie auf allen sechs Flächen zugleich im Flächenmittelpunkt in Richtung des Würfelmittelplunktes eingedrückt, so daß quadratische Pyramiden ohne Boden nach innen entstehen, deren Oberflächen immer größer werden. Wird mit allen sechs Pyramidenspitzen zugleich der Würfelmittelpunkt erreicht, ist die Oberfläche scheinbar am größten. Es inzidiert dann aber jedes Dreieck einer Pyramide mit einem Dreieck einer anderen, so daß die Gesamtfläche halbiert wird und dann kleiner ist als die Ausgangsfläche. (Mit dieser Vorstellung hat man jedoch nicht einen realen physikalischen Vorgang nachvollzogen, denn die Fläche der Seifenhaut hätte sich dabei ja vorübergehend vergrößert.)

Letzten Endes sind die Gesetze der Minimalflächen auch für die regelmäßige sechseckige Form der Bienenwaben 'verantwortlich'. Die Waben sind Kammern aus Wachs für die Aufzucht des Nachwuchses und die Aufbewahrung des Honigs. Beim Bauen kreisen die Bienen in den Waben, so daß diese ungefähr kreisförmigen Querschnitt erhalten und etwa gleich groß werden. Die dichteste Lagerung von Kreisen in der Ebene ist die in Abb.7b angegebene: Wird von zwei (halb-)fertigen Waben aus weiter gebaut, so ergibt es sich beinahe von selbst, daß die nächste(n) in die (beiden) Lücke(n) zwischen diesen beiden gesetzt wird (werden), so daß dann immer die Mittelpunkte dreier benachbarter Waben ein gleichseitiges Dreieck bilden (Abb.49a).



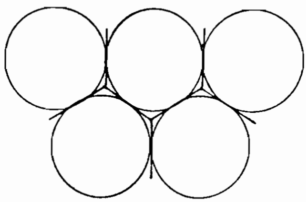


Abb.49 a b

Ähnlich wie das Entstehen der Seifenhaut auf dem Würfelkantenmodell kann man sich auch bei den Bienenwaben den Übergang von kreisförmigen zu sechseckigen Waben vorstellen: Werden die drei kreisförmigen Wände zwischen drei benachbarten Berührpunkten in Richtung Dreiecksmitte gedrückt, so vergrößert sich ihre Gesamtlänge, bis sie sich treffen und die Länge halbiert wird (Abb.49b). Während der Bauarbeit ist das Wachs noch halbflüssig, so daß es die Kanten direkt so ausbilden kann.

Das Problem liegt aber buchstäblich tiefer. Das Ganze geht ja im Raum und nicht in der Ebene vor sich: Die Waben werden in zwei Schichten angeordnet; sie sind (im Prinzip) Halbkugeln, deren Öffnungen in zwei parallele Ebenen in entgegengesetzte Richtung zeigen. Sind nun drei Halbkugeln einer Schicht in einem gleichseitigen Dreieck angeordnet, so paßt eine vierte Halbkugel aus der anderen Schicht gut in die Lücke zwischen den dreien, und insgesamt entsteht ein regelmäßiges Tetraeder, dessen Ecken die (Halb-)Kugelmittelpunkte sind, mit drei Öffnungen in die eine und der vierten in die andere Richtung (Abb.50a). Jedoch ist nicht jede solche Lücke in der einen Schicht von einer (Halb-)Kugel der anderen besetzt, sondern nur jede zweite. Diese Art von günstiger (Halb-)Kugellagerung läßt sich entlang der beiden parallelen Ebenen beliebig weit fortsetzen, und für beide Schichten ergibt sich dieselbe Struktur (Abb.50b).

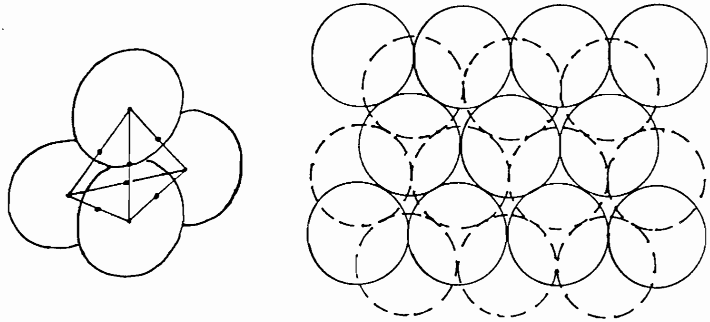


Abb.50 a b

Analog zu den Betrachtungen am Würfel und an den Wabenöffnungen in der Ebene bilden sich die aneinandergrenzenden Teile von vier benachbarten Waben (drei aus der einen, eine aus der anderen Schicht) als ebene Flächensysteme aus, und zwar sind die Flächen gerade die sechs Mittelsenkrechten (Ebenen) des Tetraeders. Die Waben sind also nicht sechseckige Prismen, sondern (halbe) Rhombendodekaeder, die jeweils ein Stückchen in die andere Wabenschicht hineinragen und deren Öffnungen genau die oben beschriebenen Sechsecke sind:

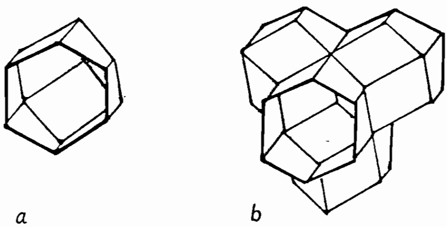


Abb.51 a b

Interessanterweise brauchen die Rhombendodekaeder-Hälften etwas weniger Material als entsprechende sechseckige Prismen: Man kann sich eine Wabe mit Rhombendodekaeder-Boden aus dem Prisma folgendermaßen hergestellt denken: Von den sechs Ecken des Prismenbodens wählt man drei so aus, daß sie ein regelmäßiges Dreieck bilden, und legt durch dessen Seiten je einen Schnitt schräg durch das Prisma, so daß drei kongruente Tetraeder abgeschnitten werden (Abb.52a). Diese dreht man dann um die Schnittkanten am Prismenboden um 180°, und fertig ist der Rhombendodekaeder-Boden (Abb.52b).

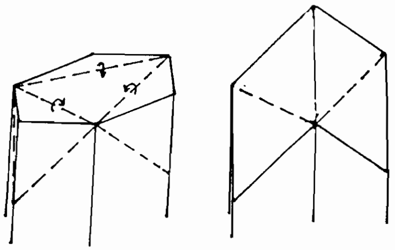


Abb.52 a b

Man hat hier noch die Freiheit, für den Schnitt verschiedene Neigungen gegen den Prismenboden anzusetzen. Alle solche Waben haben dasselbe Volumen, nämlich wie das Prisma, aber die Oberfläche ist abhängig vom Neigungswinkel. Hat dieser das Maß α ($0° \leq \alpha < 90°$), hat eine Sechseckseite die Länge 1 und der Prismenmantel die Höhe h, dann ist die Oberfläche

$$O = 6h + \frac{3}{2}\left(\frac{\sqrt{3} - \sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

minimal für $\alpha = \arcsin 1/\sqrt{3} = 35{,}26°$. Dies ist das Winkelmaß bei der aus der (Halb-)Kugellagerung entstandenen Wabe, das auch bei der realen Bienenwabe tatsächlich genau angenommen wird. (Für alle diese Überlegungen vergleiche man auch 2.3.9 (Polyeder, speziell Parkettierungen).)

Mit Thompson (1917/1942, S.538; Übersetzung durch uns) muß man jedoch feststellen: "Die Biene treibt keine Ökonomie; und wenn auch ihre Konstruktion, idealisiert betrachtet, ökonomisch erscheint, so ist ihre Arbeit doch nicht fein und nicht genau genug, als daß sie sich diese Ökonomie nutzbar machen könnte." - Ähnliches gilt für die ganze Fülle von Beispielen aus der Natur (vor allem biologische), die Thompson beschreibt, bei denen durch Mathematisierung gewisse Grundformen, Gesetzmäßigkeiten oder Prinzipien zu erkennen sind.

Darüber hinaus ist anzumerken, daß die Waben tiefer sind, als sie als Rhombendodekaeder-Hälften sein dürften, daß die Wände an verschiedenen Stellen verschieden dick sind, und daß andere Tiere, wie z.B. die Hummeln, sehr wohl Waben mit kreisförmigen Öffnungen bauen.

Schließlich beschreibt Fejes Toth (1964) ein nicht-archimedisches abgestumpftes Oktaeder, dessen Hälften einen noch etwas geringeren Materialverbrauch verursachen würden, deren Bauweise jedoch komplizierter ist.

Bei der Biene ist die Wabengröße durch die Maße der Arbeiterinnen bestimmt, also herstellbedingt. Für viele geometrische Formen ist die Größe ein Ergebnis von Optimalitätsüberlegungen und wird bei allen Exemplaren bzw. Teilen beibehalten. Unter dem Stichwort 'diskrete Homogenität' haben wir einige Beispiele kennengelernt wie: Gitterabstand beim Vogelkäfig, Maschenweite beim Zaun, Lochdurchmesser beim Sieb, Größe des Ziegelsteins. Hier treten jeweils konkurrierende Forderungen gegeneinander auf, z.B. beim Vogelkäfig: auf der einen Seite geringes Gewicht, Materialersparnis, Luftdurchlässigkeit und freundliche, helle Wirkung des Gehäuses, auf der anderen Seite Gefangenhaltung von Vögeln verschiedener Größen. Die Forderungen werden gewichtet (nach durchaus diskutierbaren Kriterien), und es ergibt sich eine gewisse Bandbreite von günstigen Größen.

Auch für vordergründig mathematisch beliebig gut lösbare Probleme setzt die Realität Schranken. Ein Heizkörper erzielt große Wirkung bei großer Oberfläche. Würden die Lamellen bei konstantem Gesamtvolumen beliebig dünn gemacht, so würde ihre Oberfläche beliebig groß. Allerdings verbieten es Gründe der Stabilität, diesen Gedankenprozeß in der Praxis allzu weit nachzuvollziehen.

Kürzeste Wege

Eine der elementarsten, von beweglichen Lebewesen dauernd erfahrenen Optimalitäten ist die Kürzesteneigenschaft der Geraden: Die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist die Strecke zwischen ihnen. So einleuchtend dieser Sachverhalt erscheint, so eng hängt er doch mit grundsätzlichen Fragen zusammen, etwa denen nach der Natur des physikalischen Raumes und nach einer Axiomatisierung des Längenbegriffs. Hier wollen wir nur einige Anwendungen erwähnen: Die Minimaleigenschaft der Geraden wird z.B. beim Zeichnen von geraden Linien ausgenutzt. Wenn die alten Ägypter Felder aufteilen wollten, so mußten sie zwischen gegebenen Punkten Strecken ziehen: Die "Harpedonapten" (Seilspanner) arbeiteten mit gespannten Seilen; und auf dem Bau verwendet man heutzutage noch die Richtschnur zum geraden Mauern. Für diesen Zweck ist die Schnur nicht nur ein guter Ersatz für das Lineal, sondern wegen ihrer Handlichkeit und ihrer größeren Länge sogar besser geeignet.

Weitere Beispiele sind: das Maßband; der Abstand, den man zu einem Kettenhund hält; und vor allem Deiche, Straßen, Kanäle, Brücken, die, sofern es das Gelände zuläßt, geradlinig gebaut werden, um Bau-, Unterhaltungs- und Verkehrskosten zu minimieren. Abb.53 gibt ein Beispiel dafür, daß in Abhängigkeit vom Gelände wirtschaftliche und geometrische Kürzeste keineswegs identisch sein müssen.

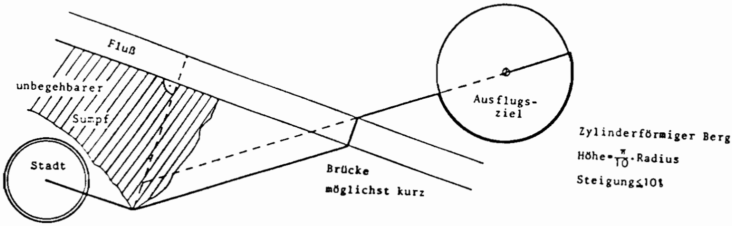


Abb.53

Auf allgemeinen Flächen sind Kürzeste meist sowieso alles andere als Geraden. Ist die Fläche abwickelbar (Würfel, Zylinder), dann findet man die Kürzeste zwischen zwei Punkten durch geeignetes Abwickeln, Einzeichnen der Strecke in der Ebene und Wieder-Aufwickeln. Für die Situation in Abb.54 (auf der Oberfläche eines Würfels mit der Kantenlänge 1 sitzt eine Spinne in S und eine gefangene Fliege in F) ergibt sich so ein Weg der Länge $\sqrt{13}\,/2 < 1/2 + \sqrt{2}$.

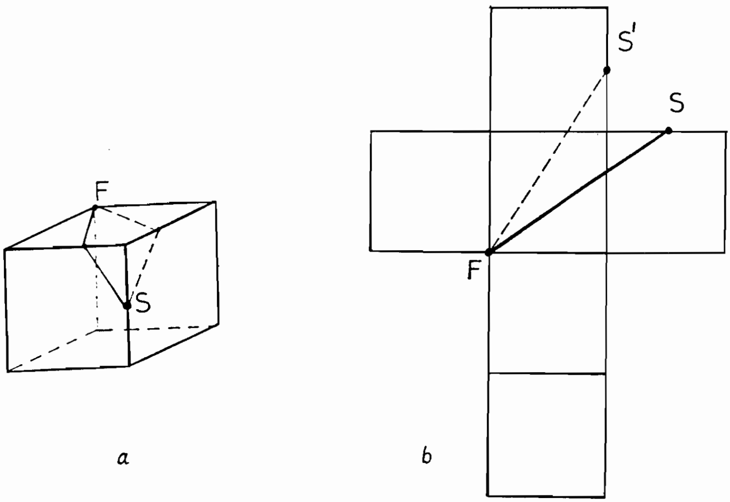


Abb.54 a b

Auf der Kugel liegt die Kürzeste zwischen zwei Punkten auf dem (einem) Großkreis zwischen ihnen. Zeichnet man eine kürzeste Flugroute (etwa Polroute von Europa nach Japan) auf einer ebenen Landkarte ein, ergibt sich eine krumme Linie, jedenfalls bei den üblichen Projektionen; die Metriken auf der Kugel und auf der Karte sind nicht euklidisch.

Kräftefreie Bewegungen in homogenem Medium verlaufen geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit (Masseteilchen, Lichtstrahlen) nach dem physikalischen Prinzip der zeitlichen (!) Kürze. Verläuft die Bewegung durch verschiedene Medien mit unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten, so führt das Prinzip der Kürze zu gebrochenen Bahnen (z.B. Lichtstrahl beim Übergang aus der Luft in Wasser), bei stetiger Änderung des Mediums sogar zu gekrümmten. Geraden als Bahnen kräftefreier Bewegungen von Masseteilchen sind im Schwerefeld der Erde schwierig zu realisieren; Geschoßbahnen sind parabelförmig, und für den geraden Lauf der Billardkugel z.B. ist die Ebenheit der Unterlage eine wichtige Voraussetzung.

Auch hier ist wieder zu beachten: Wenn wir kräftefreie Bewegungen physikalischer Objekte als Geraden beschreiben, so ist dies eine ideelle Exhaustion natürlicher Tatbestände. Hingegen gehört zur operativen Geometrie gerade umgekehrt die Ausschöpfung von Ideen durch die Wirklichkeit.

Rechter Winkel

In den Anwendungen sind gerade Linien häufig orthogonal zueinander. Rechte Winkel haben eine Extremaleigenschaft in folgendem Sinn: Schneiden sich zwei Geraden, so ist der kleinere Nebenwinkel dann am größten, wenn der Schnitt rechtwinklig ist. Entsprechend für das Lot auf einer Ebene ausgedrückt: Unter allen Geraden, die eine Ebene schneiden, haben die Lote die größten kleinsten Winkel. Alle Winkel zwischen Lot und Ebene sind gleich groß, die gesamte Figur ist achsensymmetrisch. Der technische Zeichner prüft den rechten Winkel am Zeichendreieck, indem er mit ihm auf dem Zeichenbrett in einem festen Punkt zu einer gegebenen Geraden zwei 'Senkrechten' zeichnet, und zwar je eine mit nach links und nach rechts geklappten Gerät. Decken sich die beiden 'Lote', dann ist das Dreieck 'winkelrecht' (nach Schneider (1961/1965), S.32).

Straßeneinmündungen werden in der Regel rechtwinklig angelegt, denn bei einem spitzen Winkel gerät ein Auto zu weit vom rechten Straßenrand ab, während ein flacher Winkel zur Durchfahrt mit unverminderter Geschwindigkeit verleitet. Außerdem ist der Flächeninhalt des Kreuzungsbereichs bei rechtwinkligem Straßenverlauf am kleinsten (Abb.55a).

Entsprechend ist bei zeichnerischen Konstruktionen darauf zu achten, daß Ortslinien sich senkrecht schneiden. Will man z.B. die Mittelsenkrechte einer Strecke der Länge a mit Zirkel und Lineal konstruieren, so ist eine Zirkelöffnung von (ungefähr) $a\cdot\sqrt{2}/2$ am günstigsten (siehe Abb.55a).

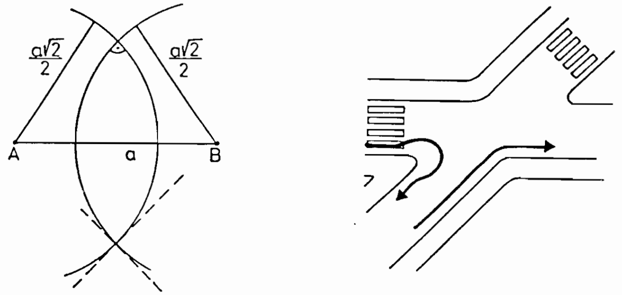


Abb.55 *a* *b*

Von einer praktischen Anwendung berichtet Fettweis (1951, S.223): "Hat der Fischer auf hoher See, aber an einer Stelle, von der aus er noch das Ufer sehen kann, einen neuen guten Fischplatz gefunden, so merkt er sich diesen dadurch, daß er von ihm aus nach zwei verschiedenen Richtungen auf dem Ufer je zwei Punkte, Häuser, Bergspitzen, Bäume, Felsen festlegt, deren gerade Verbindungslinie sich in dem neugefundenen Fischplatz schneiden. Jedenfalls auf den Färöer-Inseln wählt man nun die beiden bestimmten Geraden nach Möglichkeit so, daß sie sich an der fraglichen Stelle mehr oder weniger rechtwinklig schneiden, da dadurch diese Stelle genauer festgelegt wird."

Die besten Weinbergslagen sind die Südhänge, weil diese am 'meisten' Sonne abbekommen: Je steiler die Sonne über der Erde steht, desto kleiner ist das von einem Strahlenbündel getroffene Stück, desto intensiver ist also die Bestrahlung. Morgens und abends werden zwar Ost- bzw. Westhänge kräftiger beschienen, summiert man jedoch die Strahlungsintensität über den ganzen Tag, so schneiden die Südhänge deutlich besser ab.

Der Streubereich des Gewehrs eines Schützen ist zwar ein Winkelraum und kein Parallelenbündel, aber auch hier gilt in guter Annäherung, daß der Fehlerbereich auf der Zielfläche bei rechtwinkligem 'Draufhalten' am kleinsten ist. Anders gewendet: Bei einem festen Streuwinkel muß der Schütze umso näher an das Ziel, je flacher sein Winkel zum Ziel ist (Abb.56).

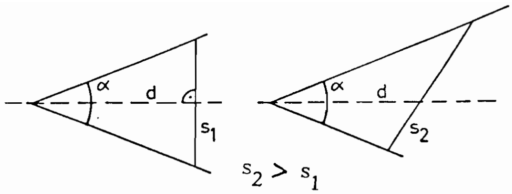


Abb. 56 a b

Eine Kraft, die auf eine ebene Fläche wirkt, wird in zwei Komponenten senkrecht zur und entlang deren (Tangential-)Ebene zerlegt; die Komponenten addieren sich vektoriell zur ursprünglichen Kraft. Steht diese senkrecht auf der Fläche, so wirkt sie verlustfrei, andernfalls erzeugt sie tangentiale Bewegungen. Um solche Bewegungen zu vermeiden, hat der Mensch sich eine Rechte-Winkel-Welt geschaffen. Sie besteht aus waagerechten Decken und Böden sowie aus lotrechten Wänden an Gebäuden, Möbeln, Behältern, Ziegelsteinen usw. Eine Straße wird senkrecht über Schienen geführt, sonst erfahren die Räder eines Fahrzeugs beim Überqueren eine Bewegungskraft in Richtung der Schienen. Druckerpresse, Kelter, Schraube, Schraubverschluß, Korkenzieher usw. funktionieren, weil die jeweilige Kraftrichtung (fast) senkrecht auf der möglichen Bewegungsrichtung steht.

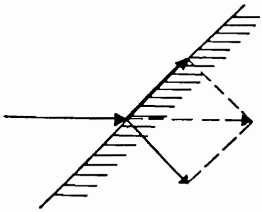


Abb. 57

Feste Verbindungen

Zur Herstellung fester Verbindungen gibt es die verschiedensten Prinzipien, vom Schweißen über Kleben, den Einsatz von Magneten, die Ausnutzung von Haftreibungs- und Adhäsionskräften (Korken in Flasche, Nagel in Holz, Adhäsionsverschlüsse an Kleidungsstücken) bis hin zur geeigneten Formgebung, wo 'geeignet' bedeutet, daß Kraft- und Bewegungsrichtung orthogonal sind. Beispiele sind die gerade genannten Schraubverschlüsse, das Prinzip des Türriegels (vgl. Abb.104), das bei vielen Steckverschlüssen und etwa auch beim Regenschirm (vgl. Abb.47) angewandt wird, oder das Prinzip des Hakens mit seinen vielfältigen Varianten, von denen wir eine besonders merkwürdige beschreiben wollen: den Verschluß an kleineren Mülltonnen neuerer Bauart .

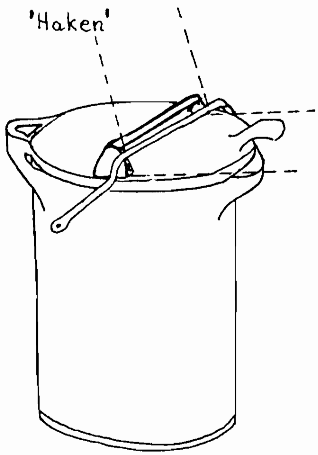


Abb.58

An diesen Tonnen ist ein drehbarer Bügel angebracht, dessen Achse parallel zur Drehachse des Deckels liegt. Ist dieser geschlossen, kann der Bügel auf ihn gesenkt werden. Auf dem Deckel erhebt sich neben dieser Berührungsstelle ein Keil parallel dazu. Zusammen mit diesem Keil bildet der Deckel einen breiten 'Haken' für den Bügel, aus dem dieser ganz leicht heausgehoben werden kann. Ist der Bügel jedoch hineingesenkt, kann der Deckel nicht geöffnet werden, weil dabei auch der Bügel bewegt werden müßte, jedoch auf seiner Kreisbahn gegen den Keil gedrückt wird. Auf diese Art werden die Mülltonnen recht dicht verschlossen, insbesondere behalten sie ihren Geruch für sich und sind für Tiere unzugänglich, und sie lassen sich gut tragen, da der Keil auf dem Deckel als Griff ausgebildet ist.

Für das Funktionieren all dieser Verbindungen spielt neben dem geometrischen Prinzip fast immer auch die Verformbarkeit des Materials eine gewisse Rolle: Bei der Mülltonne sitzt der Keil auf dem Deckel so dicht am Bügel, daß dieser beim Heben und Senken an ihm entlangstreift; konische Schrauben halten in Holz besser als 'homogene'; und viele Steckverschlüsse funktionieren sowieso mit Federkraft.

Torricelli-Punkt

Unter den besonderen Punkten des Dreiecks haben vor allem diejenigen praktische Bedeutung, in denen 'natürliche' Funktionale auf der Punktmenge der Ebene minimiert werden. Kein 'natürliches' Funktional ist z.B. dasjenige, welches zu einem festen Punkt X_0 der Ebene jedem Punkt X den Abstand $l(XX_0)$ zuordnet und das trivialerweise von X_0 minimiert wird, aber mit einem Dreieck nichts zu tun hat; oder auch dasjenige, welches zu einem gegebenen Dreieck ABC jedem Punkt der Ebene die Summe seiner Abstände zu den drei Mittelsenkrechten dieses Dreiecks zuordnet und vom Umkreismittelpunkt von ABC minimiert wird. Ein 'natürliches' Funktional hingegen ist etwa bei einem gegebenen Dreieck ABC die Zuordnung von $\|(\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{CX})\|$ zu jedem Punkt X der Ebene; es wird vom Schwerpunkt des Dreiecks minimiert. Dieses Funktional und sein minimierender Punkt lassen sich für eine viel weitere Klasse von Flächen bzw. Körpern definieren. H. Winter (1978b) behandelt dieses eigentlich der Physik zugehörige Gebiet aus der Perspektive der Geometrie und stellt dabei eine Vielzahl bemerkenswerter Sachverhalte unter didaktischen Gesichtspunkten zusammen.

Schließlich möchten wir noch den gewöhnlich weniger bekannten Torricelli-Punkt erwähnen: Für drei Gemeinden A, B, C (mit etwa gleicher Einwohnerzahl) soll ein gemeinsames Elektrizitätswerk so gebaut werden, daß die Gesamtlänge der Leitungen zu den drei Gemeinden minimal wird. Gesucht ist also der Punkt X_0 der Ebene, der das Funktional minimiert, das jedem Punkt X die Summe $l(XA)+l(XB)+l(XC)$ der Abstände zu den drei Ecken zuordnet. Der Punkt X_0 ist eindeutig definiert und heißt Torricelli-Punkt des Dreiecks ABC . Ist ein Winkel in ABC größer oder gleich 120° , so liegt X_0 in der entsprechenden Ecke, sonst in dem Punkt, von dem aus jede der drei Seiten des Dreiecks unter dem Winkel von 120° erscheint.

Ein nicht ganz einfacher, aber elementarer Beweis ist z.B. in Boltjanski/Jaglom (1966/1969), S.295ff ausgeführt. Wenn alle drei Dreieckswinkel kleiner als 120° sind, konstruiert man den Torricelli-Punkt als Schnittpunkt der Faßkreise für 120° über den drei Seiten.

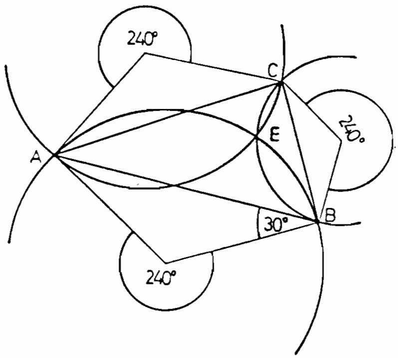


Abb.59

Eine instrumentelle Konstruktion, mit der man auch eine Gewichtung der Abstände nach Einwohnerzahlen vornehmen kann, findet sich bei Lietzmann (1959), S.98.

Die scheinbar näherliegende Forderung, das Elektrizitätswerk so zu bauen, daß es von allen drei Gemeinden denselben Abstand hat, ist nicht sinnvoll. Liegen nämlich die Gemeinden fast auf einer Geraden, dann müßte das Elektrizitätswerk sehr weit entfernt von allen dreien gebaut werden, weil die Mittelsenkrechten der drei Strecken zwischen den Gemeinden fast parallel wären und sich ihr Schnittpunkt - der geometrische Ort des Elektrizitätswerks - sehr weit weg befände (siehe auch Bender (1978), S.32f).

Der Begriff des Torricelli-Punktes läßt sich auch auf die Frage anwenden, ob Bienenwaben regelmäßige Sechsecke sind. Nach den oben erwähnten Gesetzen für Minimalflächen folgt, daß die Zellenwände zwischen den drei Berührpunkten dreier benachbarter Kreise zu geradlinigen Kanten verschmelzen und daß die Gesamtlänge der Kanten minimal wird. Daher treffen sie sich im Torricelli-Punkt des von den drei Berührpunkten gebildeten Dreiecks. Dieses ist wegen der konstanten Wabengröße gleichseitig, Torricelli-Punkt und Symmetriezentrum stimmen also überein, und um eine Wabe herum ergänzen sich die Kanten zu einem regelmäßigen Sechseck (siehe Abb.49).

Lagerungsprobleme

Auf eine ganz andere Klasse geometrischer Optimierungsaufgaben führen Probleme der platzsparenden Lagerung: z.B. Apfelsinen (kongruente Kugeln) in möglichst kleiner Tüte (konvexe Hülle); Konservendosen (Kreise) auf einer Ebene; die Bauteile des Soma-Würfels in einem Würfel (wieviel Platz dabei gespart werden kann, zeigt Abb.60); Rhombendodekaeder-Hälften in zwei ebenen Schichten (vgl. Abb.51).

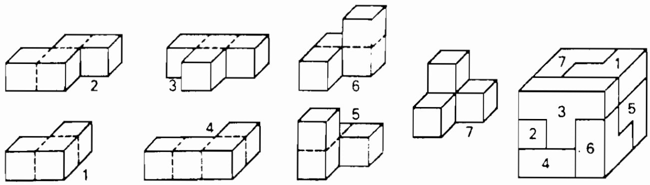


Abb.60

Fejes Tóth (1953) gibt eine elementare Einführung in die Theorie dieser Probleme. Beispiel: Um eine Kugel können zwölf dazu kongruente Kugeln so gelegt werden, daß sie alle die erste berühren; mit 13 ist das nicht möglich, obwohl jede der zwölf Nachbarkugeln mit ihrem Projektionskegel zum Mittelpunkt der ersten Kugel aus dieser weniger als 1/13 ausschneidet. Fejes Tóth beweist auch, daß die dichteste Lagerung kongruenter Kreise in der Ebene die im Dreiecksgitter ist (Abb.7b). Die Form der Bienenwabe ist also auch unter diesem Aspekt die günstigste. Viele praktische Probleme sind allerdings mathematisch recht anspruchsvoll; sie können oft noch nicht einmal mit den üblichen Methoden der linearen oder auch nichtlinearen Optimierung angegangen werden. (Eine Strategie, mit der man in einigen Situationen Verbesserungen erzielen kann, ist die Ausnutzung der Schwerkraft. Man schüttelt die zu lagernden Gegenstände durcheinander und hofft, daß dabei Hohlräume ausgefüllt werden. Z.B. packt der Buttenträger bei der Traubenlese immer noch einen Eimer Trauben mehr in seine Butte, nachdem er die Trauben zusammengerüttelt hat.)

Im Geometrie-Unterricht, und zwar schon in der Primarstufe, haben solche Beispiele eine wichtige Funktion, auch wenn sie sich der Mathematisierung weitgehend entziehen: An einem unter Umständen nur qualitativen Vergleich verschiedener Lagerungsweisen lassen sich nicht nur geometrische Erkenntnisse gewinnen, sondern auch Argumentationsfähigkeit und Kreativität fördern durch die Notwendigkeit, sich davon zu überzeugen, ob eine gute Lösung die beste ist, oder durch Überlegungen, wie man zu guten Lösungen bessere finden kann.

2.3. Geometrische Begriffe

Bisher haben wir über geometrische Ideen nur in der Ausrichtung auf eine Reihe bestimmter Funktionen gesprochen. Nunmehr untersuchen wir - in einem gewissen Sinne umgekehrt - einige grundlegende Ideen für sich und fragen dabei jeweils, wo sie in der Realität eingesetzt werden, welche Zwecke sie zu erfüllen haben und wie sie sie erfüllen. Nicht jeder wichtige Begriff wird hier zur Sprache gebracht. Zu einem Teil, weil operative Aspekte nicht genügend ausgeprägt sind, etwa bei den Begriffen 'Winkel', 'Faßkreis' oder 'Scherung'. Zu einem anderen Teil, weil der jeweilige Begriff unter anderen wichtigen Gesichtspunkten an anderen Stellen abgehandelt wird, z.B. Ellipse und Kegelstumpf als inhomogene Formen; Orthogonalität als extremale Form; Approximation und Symmetrie als innertheoretische Präzisierungen von Exhaustion und Homogenität (im Zusammenhang mit Realisierungsfragen, als zentrale Idee der Geometrie oder an einzelnen Formeinheiten). Schließlich wird ein Begriff übergangen, wenn sich seine Analyse ohne Schwierigkeiten auf die anderer Begriffe zurückführen läßt, z.B. die des Pyramidenstumpfes auf die des Kegelstumpfes. Behandeln wollen wir die homogenen Formen: Ebene, Gerade, Kugel, Kreis, Zylinder, Schraubenlinie; den Grundbegriff des starren Körpers; weiterhin Polygone, Polyeder; besondere Grundbegriffe (u.a. Konvexität, Parallelität); einige spezielle Formen (zumeist höhere algebraische Kurven und Flächen); sowie schließlich einige ausgewählte topologische Fragen.

2.3.1. Ebene

Am auffälligsten begegnen uns Ebenen wohl als Äquipotentialflächen im Schwerefeld der Erde. Als Ausgangspunkt für die Begriffsbildung ist dieser

Aspekt nicht so gut geeignet, weil die Äquipotentialflächen eigentlich (Teile von) Kugeln sind und die Eigenschaft, Äquipotentialfläche zu sein, nicht 'operativ' genug ist.

Bei einem anderen Zweck ebener Formen treten diese Unzulänglichkeiten nicht auf: auf einer Fläche Gegenstände an beliebiger Stelle zu plazieren, etwa an einer Wand Möbel, auf einer angefangenen Mauer Ziegelsteine oder auf einem Tisch Geschirr. Auch hier spielt die Schwerkraft noch eine gewisse Rolle, denn ohne sie bestünde kaum das Bedürfnis, Gegenstände 'auf' eine bestimmte Fläche zu 'stellen'.

Relevant wird die Schwerkraft in diesen Fällen also in der Bedürfnissphäre. Für den mehr geometrischen Bereich des Begriffsbildungsprozesses wird die freie Beweglichkeit einer Ebene in ihrem Lager ausschlaggebend. Die Plazierung muß an beliebigen Stellen erfolgen können. Doch erzwingt diese Forderung allein noch nicht die Form der Ebene; bekanntlich wird sie auch von den anderen homogenen Flächen 'Kugel' und 'Zylinder' erfüllt. Eine Schallplatte mit ihrer Hülle, eine Schiebetür, die Bodenfläche einer Schublade, ein Brett zum Glattstreichen von Böden, eine Fuchsschwanzsäge und viele Formen mehr sind aus verschiedenen guten Gründen Ebenen, - sie könnten sich aber auch in ihrem Lager frei bewegen, wenn sie Kugel- oder Zylinderoberflächen darstellen würden.

Vor diesen Flächen sind Ebenen aber dadurch ausgezeichnet, daß sie nicht nur in ihrem Lager, sondern auch gegenüber dem Lager ihres Lagers, und damit gegenüber Kopien ihrer selbst, frei beweglich sind. Dies hängt mit der äußeren Homogenität der Ebene zusammen. Dabei bedeutet äußere Homogenität einer Fläche die lokale und globale Ununterscheidbarkeit der beiden durch sie definierten Raumteile. Mit Eindeutigkeit ist gemeint, daß zwei unabhängig voneinander entstandene Ebenen zur vollen Inzidenz gebracht werden können.

Zwei Ziegelsteine passen mit jeder ihrer Seitenflächen auf eine angefangene Mauer und aufeinander. Da der Mauertorso selbst aus Ziegelsteinen besteht, ist das paarweise Passen dreier Flächen hier funktional: Dies ist die für den Begriff der Ebene typische Funktion, auf der auch das grundlegende Dreiplattenverfahren beruht, mit dem Ebenen ersterzeugt werden.

Bei einem Möbelstück ist es zwar praktisch meist wichtig, daß es außer an eine Zimmerwand mit seiner Rückseite auch noch an seinesgleichen paßt. Die Paß-Eigenschaft für drei Ebenen spielt hier allerdings nur mittelbar eine Rolle, nämlich über die Forderung nach Eindeutigkeit: Prinzipiell muß jedes Möbelstück beliebiger Größe an jede Wand passen. Dasselbe gilt für Geschirrteile, Behälter u.ä. auf Tischplatten und ganz allgemein für Formen, die miteinander inzidieren sollen, bei deren Realisierung aber - anders als bei einem Schloß mit seinen

Schlüsseln - noch nicht im geringsten feststeht, welche ihrer Exemplare denn tatsächlich einmal zusammen verwendet werden und aufeinander passen müssen.

Man muß daher allen solchen Objekten bzw. den Oberflächenstücken an ihnen, die zur Inzidenz vorgesehen sind, ein und dieselbe Form geben. Formgleichheit ist hier wesentlich enger als üblich aufzufassen: Zwei Zylinder oder zwei Kugeln sind nur dann formgleich, wenn sie krümmungsgleich sind. Als Universalform könnte man außer der Ebene also auch einen Zylinder (oder eine Kugel) mit einem für alle Welt einheitlichen Radius verwenden. Dies hätte folgende Konsequenzen: Es entstünden zwei Sorten von Gegenständen bzw. Inzidenzflächen: erhabene und vertiefte; und zwei Flächen einer Sorte könnten nicht voll zum Inzidieren gebracht werden, z.B. die Rückseite zweier Schränke. Es müßte ferner dafür gesorgt werden, daß jeder Hersteller solcher Gegenstände über den Einheitsradius verfügt. Insbesondere könnten die Formen nicht aus sich heraus hergestellt oder wenigstens geprüft werden wie etwa Ebenen im Dreiplattenverfahren. Schließlich wären die Ausmaße aller dieser Gegenstände wegen der Existenz eines universalen Krümmungsradius beschränkt, und auch unterhalb dieser Schranke könnten Gegenstände mit unterschiedlichen Maßen einander nicht ähnlich sein. Mit den erörterten geometrischen sind noch handfeste physikalische Argumente verbunden, die alle dazu führen, daß Paßflächen üblicherweise die Ebenenform gegeben wird.

Ebenen sind die einzig möglichen Trennflächen zwischen konvexen Raumstücken. Konvexe Gegenstände zeichnen sich aus durch Stabilität, sie haben keine Einbuchtungen, an denen zerstörerische Kräfte ansetzen könnten. Konvexe Gegenstände besitzen einen relativ großen Inhalt, da Einbuchtungen an einem Körper im allgemeinen so ausgeglichen werden können, daß die Oberfläche sich verkleinert und der Inhalt sich vergrößert. Sie haben auch sonstige günstige Eigenschaften, z.B. freie Blickverbindung zwischen allen Punkten eines (konvexen) Zimmers. - Der Schnitt zweier konvexer Figuren ist wieder konvex. Wenn also zwei konvexe Raumstücke in einer Fläche inzidieren, so kann diese nur eine Ebene sein. Dies, und nicht etwa die Schwerkraft, ist ein wesentlicher Grund, warum Zimmerwände meistens eben sind. Die Schwerkraft bedingt nur, daß die Wände entlang der Schwerelinien gebaut werden und ihre Mantellinien auf parallelen Geraden verlaufen. Sie können dabei durchaus krummlinige Grundrisse haben, z.B. bei runden Türmen oder bei der chinesischen Mauer. Erst wenn man verlangt, daß die durch die Wand getrennten Raumteile konvex sein sollen, wird man auf die Ebenenform geführt, - bei Zimmerwänden, an Schubladen, bei Schuhkartons.

Eine weitere Anwendung der äußeren Homogenität der Ebene ist der Spiegel: Er muß innerlich homogen, also Ebene, Kugel oder Zylinder sein. Es darf ja keine Rolle spielen, welche seiner Stellen das Spiegelbild erzeugt, d.h. er muß so bewegt werden können, daß jede seiner Stellen an den Platz einer jeden anderen gelangen kann und dabei sich das Spiegelbild nicht verändert. Damit das Bild nicht verzerrt wird, müssen darüber hinaus aber auch die beiden durch die Spiegelfläche definierten Hälften des Raums insgesamt (global) und in jeder Kugel, deren Mittelpunkt in der Spiegelfläche liegt (lokal), kongruent sein. Da mindestens eine Hälfte konvex ist, gilt dies auch für die andere, und der Spiegel muß eben sein.

Schließlich zu den physikalischen Funktionen der Ebene. Sie wird verwendet als Äquipotentialfläche im Schwerefeld der Erde. Auf ihr lassen sich dann Gegenstände bewegen und lagern, ohne daß dabei die Schwerkraft überwunden werden müßte, z.B. auf einer natürlichen Eisfläche, auf einem Billardtisch, Eßtisch, Zimmerboden, Gehweg, auf einer Fahrstraße (soweit nicht außergeometrische Optimierungskriterien entgegenstehen: Wirtschaftlichkeitsüberlegungen bei unebenem Gelände oder Fragen der Verkehrsführung) oder auf Treppenstufen (in Anpassung an die menschliche Anatomie, die wiederum dem Schwerefeld angepaßt ist). Die Formgebung für die Äquipotentialflächen im Schwerefeld ist ausschließlich physikalisch begründet: hätte das Feld eine andere Struktur, dann müßten die Flächen anders geformt sein.

Natürlich sind die Äquipotentialflächen des Schwerefeldes genau genommen gar keine Ebenen, sondern Kugeln, die konzentrisch zur Erdoberfläche liegen und als solche noch nicht einmal sehr vollkommen realisiert sind. Würde man eine Ebene ungefähr durch den Rand des Schwarzen Meeres legen, so erhöbe sich dieses Meer auf ihr als ein Wasserberg mit einer Gipfelhöhe von über 1 km. Lediglich in den üblichen Größenordnungen für Realisate geometrischer Formen erscheinen diese Kugelteile als Ebenen. Das Schwerefeld ist ein homogenes Bündel mit vom Erdmittelpunkt aus radialen Kraftlinien, die senkrecht auf den Äquipotentialflächen stehen. Lokal werden diese Linien als parallele Geraden aufgefaßt, die die Äquipotentialebenen alle senkrecht schneiden. Hier geht deren innere und äußere Homogenität im Kleinen ein: Parallele Geraden schneiden eine Ebene alle im selben Winkel.

Schreibunterlagen sind eben, damit die schreibende Hand immer im selben Winkel ansetzt; ebene Stempel werden auf ebene Flächen gedrückt, weil der Druck dann ohne Richtungsänderung auf die ganze Stempelfläche senkrecht weitergegeben wird; die schiefe Ebene ist eben, weil sie so im Schwerefeld gleichmäßig geneigt ist und damit bei gegebener Länge und Höhe die geringstmögliche maximale und größtmögliche minimale Steigung hat.

Wegen ihrer autonomen Herstellbarkeit und ihrer 'freundlichen' Eigenschaften im Zusammenhang mit anderen geometrischen Formen und physikalischen Kräften ist die Ebene auch praktisch und nicht nur theoretisch eine grundlegende Form in der Geometrie, insbesondere auch für die Herstellung anderer Formen.

2.3.2. Gerade

Beim Geradenbegriff ist die Versuchung groß, sich ihn durch physikalische Phänomene begründet zu denken, vor allem mit Lichtstrahlen oder kräftefreien Bewegungen von Massen. Immerhin werden bei Messungen und Prüfungen mit hohen Genauigkeitsanforderungen vorwiegend optische (und ähnliche) Verfahren angewendet, d.h. praktisch werden gute Geraden und Ebenen nicht mehr mit einfachen handwerklichen, sondern mit höheren physikalischen Mitteln hergestellt. Gehören diese deshalb zu dem, was wir operative Begriffsbildung nennen, und sind sie für die Grundlegung etwa des Geradenbegriffs geeignet?

Zunächst einmal nimmt man in der physikalischen Raumtheorie Lichtstrahlen gar nicht ohne weiteres als geradlinig an. Geradlinige Bewegungen von Massen im Schwerkraftfeld der Erde lassen sich nicht perfekt und auch nur mit Hilfe bereits realisierter Geraden oder Ebenen (Abschußrohr, Billardtisch) erzeugen. In unseren Größenordnungen beschreibt die physikalische Theorie solche Phänomene wohl als Geraden und hält bei Abweichungen 'Störeffekte' parat. Aber das heißt doch, daß wir schon anderweitig über den Begriff der Geraden verfügen müssen, um von einer Abweichung sprechen zu können. In der pragmatischen Ordnung ist es also nicht, wenn der Geradenbegriff auf physikalische Bahnen gegründet wird. Darüberhinaus stellen solche Bewegungslinien keine stabilen realen geometrischen Formen dar, mit denen man praktisch umgehen könnte. Sie sind entweder reine Denkobjekte, oder flüchtig und unvollkommen (Kondensstreifen eines Düsenflugzeugs, Eiszapfen). Wo Bahnen bleibende Spuren hinterlassen sollen, ist ihr Verlauf nicht wichtig, sondern nur ihre Lenkbarkeit, Berechenbarkeit und die Auftrefffläche (Feuer machen durch Bündeln von Sonnenstrahlen mit einem Brennglas, Belichtung eines Films, Fotokopieren). Oder aber man muß dafür sorgen, daß die Bahn auf einer geeigneten, körperlich realisierten Fläche verläuft, z.B. beim Zeichnen einer Geraden als Spur eines geschwärzten Fadens, der entlang einem Stück Papier gespannt, in der Mitte angehoben und dann losgelassen wird. - Sogar hier, wo der Mensch durch Vorgabe einer Ebene erheblich den Verlauf der Bahn bestimmt, ist diese immer noch durch Naturgesetze festgelegt.

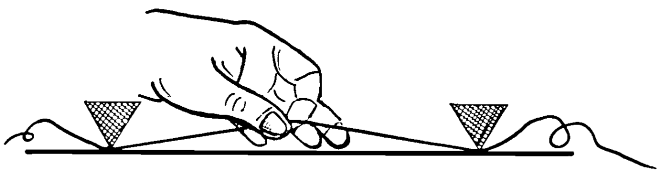


Abb. 61

Wenn man auch den Geradenbegriff operativ nicht auf physikalische Erscheinungen gründen kann, so gehören diese doch durchaus zu ihm und sollten im Zusammenhang mit ihm, auf ihm aufbauend, besprochen werden. - Ähnliche Abgrenzungen geometrischer Begriffsbildung gegen physikalische Theorien könnte man auch bei anderen Formen vornehmen; sie sind jedoch nirgends so notwendig wie bei der Geraden.

Als was wollen wir aber nun Geraden definieren? Nachdem die Ebene als Grundbegriff und vollkommen homogene Form vorhanden ist, liegt es nahe, Geraden als Schnitte von Ebenen einzuführen. Es scheint nicht einfach zu sein, daraus die innere und äußere Homogenität der Geraden abzuleiten (vgl. Abschnitt 10.2). Wir wollen daher diese Homogenität einfach annehmen. Der umgekehrte Versuch, aus der Homogenität abzuleiten, daß Geraden Ebenenschnitte sind, scheint übrigens nicht minder schwierig. Ausgenutzt wird die äußere Homogenität der Geraden beim Prüfen eines Lineals: Durch zwei Punkte auf dem Zeichenbrett wird zweimal eine 'Gerade' gezogen, und zwar wird die Ziehkante des Lineals je einmal von links und von rechts an die beiden Punkte angelegt (nach Schneider (1961/1965), S.32).

Warum sind Papierfalten Geraden? - Der Knick gehört in jeder relativen Lage der beiden durch ihn definierten Papierhälften zueinander beiden an, er ist also immer im Durchschnitt zweier Ebenen und daher Realisat einer Geraden. Papierfalten ist eine spezielle Realisierung einer räumlichen Drehung: Der Knick und die eine Hälfte bleiben räumlich fest, die andere Hälfte wird um den Knick gedreht. Jede eigentliche Bewegung im Raum, die einen Fixpunkt hat, hat noch einen zweiten, läßt die ganze Gerade durch die beiden Punkte fest und ist eine Drehung um diese Gerade als Drehachse. Geht nämlich eine Ebene durch die beiden Fixpunkte, dann auch alle ihre (kongruenten) Bilder. Und da mit zwei Punkten die ganze Verbindungsgerade in der Ebene liegt, enthalten alle Bilder diese Gerade, die somit Fixgerade ist, und wegen der Isometrie (Abstandstreue) sogar Fixpunktgerade. Bei jeder (isometrischen) Rotation kommt also eine Drehachse vor, die nicht notwendig ortsfest sein muß: Radachsen an Fahrzeugen, Drall eines Geschosses, Richtung eines Bohrers, Achse eines Kreisels, Scharniere an Türen, Fenstern, Koffern, Falten am Papier.

Die Frage nach den Papierfalten ist noch nicht hinreichend beantwortet: Wie sehen die Knicke aus, wenn das Papier selbst nicht eben ist? Die eine Hälfte und der Knick bleiben ortsfest, die andere Hälfte wird bewegt, hat Fixpunkte am Knick, wird also gedreht. Diese Bewegung hat eine Fixpunktachse, und alle Punkte, die nicht auf ihr liegen, bewegen sich auf Kreislinien senkrecht dazu. Wenn der Knick nicht in der Fixpunktgeraden verliefe, müßte das Papier reißen. Auch bei nicht ebenem Papier sind die Knicke Geraden, d.h. Papier kann nur entlang gerader Linien geknickt werden, z.B. bei einem Zylinder entlang der Mantellinien, aber nicht bei einer Kugel oder durch den Knick bei einem bereits einmal gefalteten Blatt Papier, wenn dessen beide Hälften nicht in einer Ebene liegen. Man muß dazu das Papier erst wieder eben machen, entweder durch Glattstreichen oder durch Zusammenlegen (wenn es dann noch dünn genug ist, um als Ebene zu gelten). Aufgrund dieses Prinzips ist Wellpappe steif. Eine zylinderförmige Papierrolle ist insofern stabil, als Knicke quer zu den Mantellinien nur möglich sind, nachdem die Rolle durch Knicke entlang zweier Mantellinien flachgedrückt wurde. Bei Postern entstehen so die häßlichen Faltenmuster. - Auf diese Art und Weise kann man sich plausibel machen, warum eine ebene Fläche zwar zu einem Kegel-, Kegelstumpf- oder Zylindermantel, nicht aber zu einer Kugelfläche aufgewickelt werden kann. Aufwickeln kann als eine Abfolge von (nicht scharfen) Faltungen aufgefaßt werden, wobei die 'Falten' (Mantellinie) Geraden sind und bleiben.

Es ist schwierig, ohne Hilfsmittel (insbesondere ohne die Verwendung zweier Ebenen) eine Gerade herzustellen. Das mag jeder ermessen, der schon versucht hat, eine Gerade freihändig zu zeichnen (wobei ja sogar eine Ebene vorgegeben ist). Bemerkenswert ist auch die Unfähigkeit von Lebewesen, sich ohne visuelle oder ähnliche Orientierungshilfen geradeaus zu bewegen: Der spiegelsymmetrische Körperbau des Menschen (und der meisten beweglichen Tiere) ist zwar für die tägliche Auseinandersetzung mit der Umwelt hinreichend genau. Man kann sich aber leicht vorstellen, daß bei jemandem beispielsweise die Schrittlänge des linken Beins die des rechten durchschnittlich um 1 mm übertrifft, womit die normalerweise erforderliche Genauigkeit bequem erfüllt ist. Würde dieser Mensch einen Marsch im Dunkeln antreten, so würde der eingeschlagene Weg nicht von homogenen Bedingungen erzeugt; die Spur ergäbe ungefähr einen Kreis, der schon nach 800 m wieder geschlossen wäre, weil sie zwar wegen der ungefähr konstanten Schrittlänge innerlich, aber nicht äußerlich (bezüglich der linken und rechten Seite) homogen wäre (nach Perelmann (1954), S.131ff).

Schließlich werden Formen geradlinig, wenn man sie entlang der Schwerelinien baut, entlang dem Senkblei: Pfahlbauten, Häuserwände, Möbel, Masten (auch Baumstämme in gewisser Realisierungsgüte), usw. Diese Geradlinigkeit ist aber physikalisch, und nicht geometrisch begründet: Wären die Schwerelinien gekrümmt, dann müßten die tragenden Teile einer Konstruktion auch entsprechend gekrümmt sein.

Eine wichtige Eigenschaft der Geraden darf nicht außer Acht gelassen werden: ihre Beweglichkeit in ihrem Lager und, algebraisch ausgedrückt, ihre große Symmetriegruppe. Für viele geometrische Formen, und zwar für die meisten prismatischen, läßt sich die Beweglichkeit im Lager auf eine solche von Geraden, nämlich der geraden Mantellinien, zurückführen (Schublade, Motorkolben, Stechform für Plätzchen).

2.3.3. Kugel

Wie stellt man eine Kugel her? - Man nehme etwa einen Klumpen Ton und gebe ihm eine grobe Vorform. Ferner benötigt man eine schon realisierte Ebene, z.B. eine Tischplatte. Auf dieser rollt man den Klumpen nun mit der flachen Hand (als Realisat einer zweiten Ebene) unregelmäßig in allen Richtungen ab und läßt dabei den Druck immer schwächer werden. (Würde man nur in einer Richtung rollen, entstünde eine zylinderartige Wurst.) Nach demselben Prinzip, nur mit raffinierteren Techniken, werden die in der Optik benötigten Kugeln hergestellt. Bei diesem Verfahren greift sehr stark die Homogenität ein: Sie ist bei der Ebene erfüllt und nach der Prozedur auch bei dem Tonklumpen. Es ist dann gleichgültig, welche seiner Stellen Kontakt mit der Handfläche bzw. mit der vorgegebenen Ebene hat - die Stellen sind ununterscheidbar; es ist eine beschränkte, randlose, homogene Form entstanden. Aus der Homogenität folgt sofort die <u>Konstanz der Dicke</u> und mit etwas mehr Mühe die Existenz eines Punktes, von dem alle Punkte der Oberfläche gleichen Abstand haben, also die Eigenschaft, eine Kugel zu sein. Die Kugelfläche ist nicht äußerlich homogen, denn Punkte außerhalb lassen sich voneinander unterscheiden: Es gibt Punkte (einen), die Mittelpunkt sind, und solche (alle anderen), die es nicht sind; oder: Es gibt Punkte (im äußeren Halbraum), durch die Geraden gehen, die die Kugel nicht treffen, und solche (im inneren Halbraum), durch die es solche Geraden nicht gibt.

Homogenität ist zwar die in Anwendung und Herstellung dominierende Eigenschaft; Gleichabständigkeit von einem Punkt ist aber leichter zu handhaben beim Aufbau eines begrifflichen oder eines axiomatischen Systems, und außerdem läßt sich aus ihr die jeweils gebrauchte Gleichartigkeit der Stellen meist unmittelbar ableiten. Daher erscheint es sinnvoll, die Kugel durch die Gleichabständigkeit zu definieren, besonders auch im Hinblick auf die verwandte Form des Kreises.

Wegen ihrer übergroßen Beweglichkeit im Lager wird die Kugel gerade nicht für ortsverändernde Bewegungen auf (meist ebenen) Flächen verwendet. Bei solchen Bewegungen kommt es fast immer darauf an, eine bestimmte Richtung einzuhalten, und dies leisten Walzen oder, wo die Lenkbarkeit wichtig wird, Räder weitaus besser. Ausnahmen sind die zahlreichen in Sport und Spiel verwendeten Kugeln. Dort geht es nicht darum, irgendein Gut oder Personen in Fahrzeugen zu transportieren, sondern die Kugel wird spielerisch, zweckfrei bewegt. Häufig wird der Luftraum über dem Spielfeld in das Spiel mit einbezogen, und die Oberflächenteile des Spielgerätes müssen ununterscheidbar sein (wenn man nicht gerade, wie beim Rugby, die vollkommene Homogenität des Balls bewußt aufhebt, um die Ballbehandlung zu erschweren). Nur dann ist es möglich, die Flugbahn oder auch die Rollinie einigermaßen zu berechnen, den Ball sicher zu stoppen oder ihm Effet mitzugeben. Kegeln oder Billard mit Walzen statt Kugeln wäre im Prinzip wohl sehr einfach, wenn die Unterlage absolut eben und die Walze absolut zylinderförmig wäre, in der Realität aber unmöglich, weil die Auflagefläche viel größer als bei einer Kugel wäre und die kleinste Inhomogenität auf Boden oder Walze den Lauf der Walze beeinträchtigen würde. Schließlich muß bei all den Spielen, bei denen die Spieler selbst mit dem Spielgerät in Kontakt kommen (Fußball, Handball, Volleyball) oder wo das Abprallen des Geräts an Flächen wesentlich ist (Basketball, Tischtennis, Prellball), das Spielgerät leicht, elastisch und stabil sein. Diese Eigenschaften erfüllt die (Hohl-)Kugelform am besten. Die Luftfüllung macht sie leicht, der innen erzeugte Überdruck gibt ihr eine einigermaßen feste Form, wodurch sie überhaupt erst handhabbar wird, und macht sie zugleich elastisch. Dabei stellt sich die Kugelform von selbst ein; andernfalls - nämlich dann, wenn man das durch eine entsprechende Gestaltung der Oberfläche verhindert - würden verschiedene ihrer Teile stärker als andere belastet.

Auch hier zeigt sich die Homogenität der Kugel: Bei ihr ist die Belastung jeder Stelle durch den Druck eines Gases von innen gleich, da auf jede Stelle die gleichen Spannkräfte des Materials wirken. Praktisch ausgenutzt wird diese Tatsache beim Glasblasen oder bei industriellen Behältern, die trotz der Herstellschwierigkeiten kugelförmig gemacht werden für Gase oder Lösungen unter Überdruck. Eng damit zusammen hängt die Eigenschaft der Kugel, unter allen geschlossenen Flächen gleichen Maßes das größte Volumen einzuschließen. D.h. bei ihr hat ein Gas den meisten Platz zur Verfügung und übt daher den geringsten Druck aus.

Gegen Stöße von außen ist die (Hohl-)Kugelform am wenigsten empfindlich, unter anderem deshalb, weil sie keine isometrischen Verformungen zuläßt. Man kann sich das plausibel machen mit Hilfe der Überlegungen über das Papierfalten im vorigen Teilabschnitt oder beim Schälen von Apfelsinen oder Eiern. Die einzelnen Schalenteile haben ihre feste Krümmung, und wenn man diese ändern will, die Teile etwa eben machen will, so muß man sie in sehr kleine Stücke reißen. Diese Stücke können dann aufgrund einer gewissen Elastizität irgendwann einmal zwar

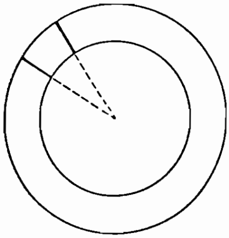


Abb.62 Hohlkugel

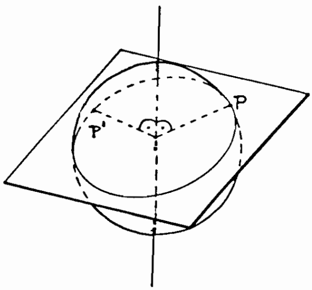


Abb.63 Zur Definition des Kreises

eben werden, aber nicht durch isometrische Verformungen. Darüberhinaus haben reale Hohlkugeln eine gewisse Dicke und jedes Stück sitzt als eine Art Kegelstumpf in dem vom Rest gebildeten Lager und kann sich nicht nach innen bewegen.

Für die Vollkugel gilt schließlich noch, daß sie in der Richtung am dicksten ist, in der eine Kraft am besten angreifen könnte, nämlich in Normalenrichtung. Alle diese Argumente gelten für jeden geschlossenen, konvexen Körper; allerdings umso weniger, je mehr dieser von der Kugelform abweicht und je 'gerader' gewisse Linien und je 'ebener' gewisse Flächen auf ihm sind.

Angewandt wird diese Eigenschaft bei allen Arten von Gewölben, besonders deutlich bei Kuppelbauten, am eindrucksvollsten beim Schnee-Iglu, aber auch bei Schutzhelmen. Ein Beispiel aus der Natur ist der menschliche Schädel.

Oft ist die Kugelform natürlicher Gebilde wachstumsbedingt. Das Wachstum findet von einem Punkt aus gleichmäßig nach allen Seiten statt, z.B. bei einem Apfel, und die Kugelform ist nicht sehr gut realisiert; oder ein punktförmiger Körper wird schichtweise mit einer Masse umgeben, z.B. Perlen in Muscheln. Hier tritt die Gleichabständigkeit wieder mehr in den Vordergrund.

Die einfache Glühbirne hat einen fast kugelförmigen Körper, der vom Glühfaden konstanten Abstand hat und so die von ihm ausgehende Hitze gleichmäßig aufnimmt. Die Kugelform wird jedoch von der Fassung der Birne durchbrochen. - Bei vielen Objekten, für deren Funktion die Kugelform wesentlich ist, ist diese nicht komplett verwirklicht, damit diese überhaupt funktionieren können (vgl. 2.3.4.). Es gibt jedoch vollständig realisierte Kugeln nicht nur als Spielbälle oder natürlich gewachsene Objekte, sondern sehr wohl auch bei technischen Anwendungen wie Druckbehälter, Kugellager, Kugelschreiberspitze (vgl. Abb.11) oder Kugelmolch: Soll z.B. eine Flüssigkeit in eine Röhre gedrückt und die Luft entfernt werden, so setzt man an den Anfang der Röhre eine Kugel, die genau den inneren Röhrenquerschnitt ausfüllt. Mit der Flüssigkeit wird nun die Kugel durch die Röhre gedrückt und hält dabei die Flüssigkeit von der Luft getrennt (man mache sich hierbei den Vorteil der Kugelform gegenüber anderen Formen klar).

2.3.4. Kreis

Treibt man Geometrie im Raum, so kann man den Kreis nicht einfach als die Menge der Punkte definieren, die von einem gegebenen Punkt einen gegebenen Abstand haben, da hierbei keine ebene Figur, sondern die Kugel entsteht. Die Ebenheit läßt sich in der Definition auf verschiedene Arten erzwingen, etwa:

- Der Kreis ist die Spur eines Punktes bei einer isometrischen Bewegung, die eine Fixpunktgerade hat (Rotation). Hier läßt sich die Ebenheit elementar beweisen; jedoch ist die Definition über Bewegungsspuren zu wenig operativ.
- Der Kreis ist eine (die einzige) beschränkte homogene Linie. Hier reichen für den Beweis nicht mehr elementare Methoden.
- Schließlich: Der Kreis ist der Schnitt der Kugel mit einer Ebene. Bei dieser einfachen Definition lassen sich die Eigenschaften des Kreises parallel zu denen der Kugel diskutieren, etwa: Der Kreis hat einen Mittelpunkt, und zwar kommen für diesen zunächst alle Punkte der Normalen zur Schnittebene in Frage, die durch den Kugelmittelpunkt geht, weil sie alle von jedem Punkt des Kreises denselben Abstand haben. Dann wird selbstverständlich derjenige genommen, der in der Kreisebene liegt, zumal dieser minimalen Abstand zum Kreis hat. Es ergibt sich auch leicht, daß der Kreis die Schnittmenge zweier Kugeln ist (Abb.63).

Beim Kreis findet man (analog zur Kugel): Konstanz der Dicke, Konstanz der Krümmung, günstiges Verhalten gegenüber mechanischen Einwirkungen, maximaler Flächeninhalt bei gegebenem Umfang, Beweglichkeit im Lager (aber alles auf einer vorgegebenen ebenen Fläche).

Beispiele, bei denen die Gleichabständigkeit von einem Punkt wesentlich ist, sind: das Ziffernblatt einer herkömmlichen Uhr mit Analoganzeige; der (kreisrunde) Poststempel, der mit seinem ganzen Rand einen gleichmäßigen Druck ausübt; Münzen, auf die der Druck beim Prägen gleichmäßig wirkt; das Bullauge am Schiff, das dem Wasserdruck leichter standhält, weil es bei gegebener Fläche den kleinsten maximalen Durchmesser hat; das Uhrglas; Verschlüsse von Dosen, die in jeder Lage aufgesetzt werden können und die dichter schließen als ellipsenförmige oder gar eckige; Flaschenhälse usw., weil die Kreisform bei gleichem Flächeninhalt einen kleineren maximalen Durchmesser als andere Flächen hat und sich dann Fehler schwächer auswirken; der Boden eines Topfes, der vom Feuer gleichmäßig erhitzt werden soll; die Schießscheibe; die Sitzordnung im Amphitheater; die Sperrzone bei einem Katastrophenfall in einem Atomkraftwerk.

Zahllose Realisationen des Kreises findet man an Prismen mit kreisförmiger Grundfläche (Zylinder) und allgemeiner an Rotationskörpern mit den verschiedensten Querschnitten, darunter Kugel, Kegel, Kegelstumpf und unregelmäßige Körper: Rad, Münze (kurzer Zylinder), Röhre, Walze (langer Zylinder), Topf, Dose (hohl), Kolben (massiv), Papierlaterne (als Zylinder Translationsfläche aus einem vollen Kreisbogen, als Kugel Rotationsfläche aus einem Halbkreisbogen, vgl. Abb.64), Schlüsselring (Torus), Kreisel (Kegel), Trinkglas (Kegelstumpf), Teller, Flasche, Vase (unregelmäßig) u.v.a.m.

Bei all diesen Formen ergeben ebene Schnitte senkrecht zur Rotationsachse Kreise, und die Eigenschaften des Kreises werden immer nur wirksam bezüglich dieser Ebenen.

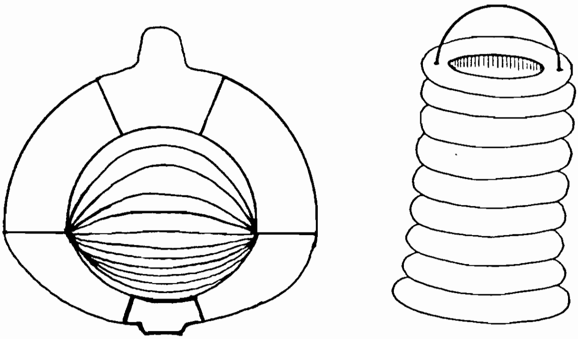


Abb. 64

Anders als die Kugel sind Rad und Walze nur in einer einzigen Ebene rotationssymmetrisch und damit beweglich im Lager. Da es in den meisten Anwendungen um Bewegungen in bestimmten Richtungen geht, stellt dies aber nicht nur keinen Nachteil dar, sondern ist oft ausdrücklich erwünscht.

Interessant ist das Problem, ein Transportband (etwa für das Gepäck von Fluggästen) zu konstruieren. Es muß möglich sein, daß der Lauf des Bandes an verschiedenen Stellen verschieden gekrümmt ist; dennoch soll es eine durchweg ebene Auflagefläche bieten. Das Problem wird auf überraschende Weise mit Hilfe der freien Beweglichkeit des Kreises im Lager gelöst: Vom angekommenen Flugzeug werden die Gepäckstücke der Passagiere zu einem endlosen Transportband befördert, das im Kreis herumläuft. Die Fluggäste versammeln sich dann um dieses Band und klauben sich ihre Stücke heraus .

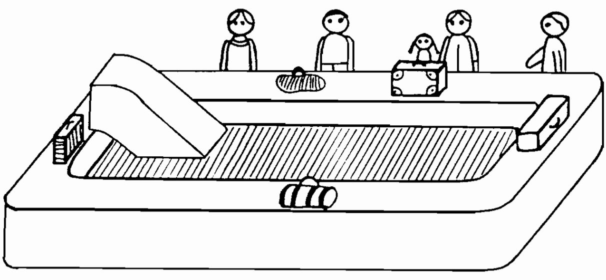


Abb. 65

Hätte das Band wirklich die Grundform des Kreises, so könnte es aus einem Stück gefertigt sein, da der Kreis ja in seinem Lager beweglich ist. Gleichzeitig würde die Anlage aber sehr viel Platz brauchen, da eben beim Kreis die Fläche bezogen auf den Umfang groß ist. Platzsparend dagegen ist eine längliche, schmale Form:

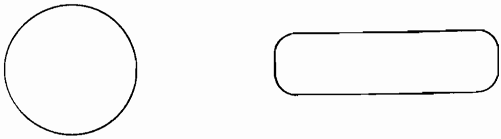


Abb.66 a b

Dann muß aber das Band aus Gliedern zusammengesetzt sein. Welche Form gibt man diesen? Jedenfalls ist der äußere Rand des Bandes in den Kurven länger als der innere. Wenn also die Glieder an den geraden Stücken genau aneinander passen, so müssen in den Kurven Lücken entstehen. Dem könnte man z.B. dadurch begegnen, daß man die Glieder teilweise übereinanderschiebt oder direkt unter dem Band ein zweites Band um eine halbe Gliedbreite versetzt laufen läßt. Bei folgender Möglichkeit bleibt jedoch die Lauffläche für die Gepäckstücke eine gute Ebene: Die Glieder haben die Form wie in Abb.68a , wobei die krummen Linien Kreislinien sind, und zwar etwas kürzer als Halbkreise. Ändert der Lauf des Transportbandes nun irgendwo seine Krümmung, etwa beim Übergang von der Geraden in die Kurve, dann dreht sich jedes Glied, das diesen Punkt erreicht, entlang der kreisförmigen Grenzlinie gegen seinen Nachfolger ab. Lediglich an den Bandrändern entstehen kleine Einbuchtungen, die durch entsprechend breite Laufschienen verdeckt werden (Abb.68b).

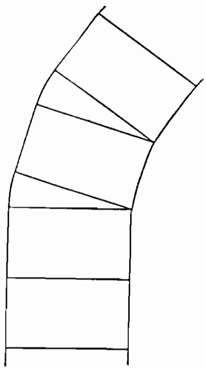


Abb.67

Einige der Formen sind auch herstellbedingt, etwa: bei Geschirr durch die Rotation der Töpferscheibe bzw. auch modernerer Maschinen; oder: Bei Dosen oder Röhren durch das Blechbiegen, wo die biegende Kraft sich gleichmäßig auf das Blech verteilt und zu einer gleichmäßigen Krümmung in Kraftrichtung führt. Wollte man ungleichmäßige Krümmung oder gar Kanten erzeugen, so müßte man besondere Maßnahmen ergreifen. Dann würden die Behälter auch empfindlicher. Denn

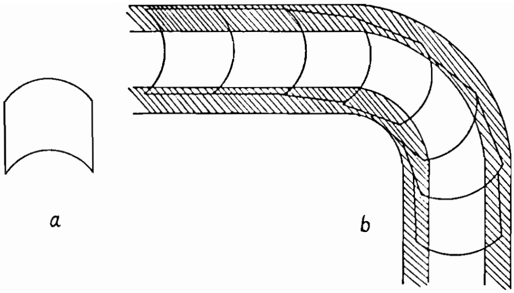


Abb. 68

tatsächlich werden nicht Flächen der Dicke 0, sondern Blechplatten endlicher Dicke gebogen, und Strecken auf der Innenseite geraten kürzer als die entsprechenden auf der Außenseite. Je stärker die Krümmung ist, desto größer ist die Gefahr des Reißens, insbesondere also bei Kanten (mit der theoretischen Krümmung ∞ (im Querschnitt)). Unter allen geschlossenen Linien gegebener Länge hat der Kreis die geringste maximale Krümmung.

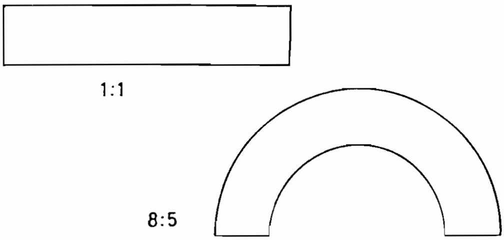


Abb. 69 Gebogene Platten

Wendet man diese Überlegungen auf gebogene Drahtstücke an, so ergibt sich in genau derselben Weise, warum z.B. Schlüsselringe kreisförmig sind. Im Gegensatz zu Kettengliedern muß bei ihnen das Material elastisch sein, damit Schlüssel auf- und heruntergeschoben werden können. Eher als Kettenglieder brauchen sie daher die stabile Kreisform.

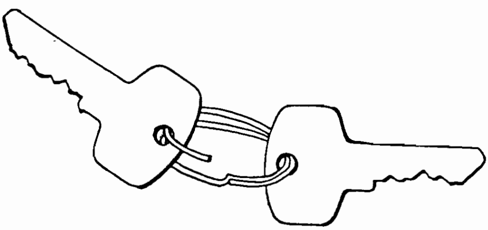


Abb. 70

Für Gummidichtungen, -wülste und -ringe ist die Kreisform am günstigsten, bei ihnen verteilt sich die Spannung gleichmäßig über das Material. - Die Konstanz der Dicke bzw. die Beweglichkeit im Lager wird bei Bewegungsübertragungen genutzt (vgl. 2.2.2).

Die Rotationssymmetrie eines Körpers ermöglicht eine Plazierung in jeder Lage, wenn nur die Achse punktweise fest bleibt. So kommt es z.B. bei einer Schüssel auf einem Tisch nicht darauf an, in welche Position sie durch eine Drehung in der Tischebene gebracht wird; die Positionen sind ununterscheidbar, weil die Stellen der Oberfläche ununterscheidbar sind, wobei hier unter Stelle ein ganzer Längsstreifen zu verstehen ist. Der tiefere Grund für die Drehsymmetrie vieler Gegenstände ist die partielle Homogenität des Schwerkraftfeldes. In ihm ist zwar eine orientierte Richtung ausgezeichnet, nämlich die von uns als solche empfundene Vertikale, aber in den (in unseren Größenordnungen ebenen) Äquipotentialflächen ist keine Richtung ausgezeichnet, und es besteht zunächst kein Anlaß, die entsprechenden Querschnitte nicht homogen zu machen.

Wir erwähnten es schon, Behälter mit kreisförmigem Querschnitt und damit kreisförmiger Öffnung lassen sich leichter ausschütten. Man stelle sich ein Trinkglas mit quadratischer Öffnung vor!

Die üblichen Varianten der Längsschnitte (durch die Rotationsachse) erfüllen zahlreiche Zwecke. Häufig sind sie nicht kreisförmig wie bei der Kugel, weil viele Körper eine Standfläche brauchen. Oft ist die Grundform vielmehr rechteckig (Zylinder; Blechdosen) aus Gründen der Herstellung, der Stabilität und der platzsparenden Lagerung mehrerer Behälter zusammen, bei Wasserrohren beispielsweise, um einen gleichmäßigen Durchfluß zu gewährleisten und Schmutzablagerungen zu vermindern. Bewußte Abweichungen sind:

- die Trapezform (Kegelstumpf) mit kürzerer Seite oben oder auch unten (z.B. Blumentopf);
- das gleichschenklige Dreieck mit Spitze nach unten (Kegel), wodurch beim Kreisel das Aufrechterhalten des Gleichgewichts erschwert wird;
- die Sonderform der Weinflasche (siehe Abb.43).

Der Torus hat einen nicht zusammenhängenden Längsschnitt, und damit ist er als Rotationskörper nicht einfach, sondern zweifach zusammenhängend, d.h. er hat ein Loch. Das Loch braucht man bei Rettungsring, Fingerring, Autoreifen, Gummidichtung oder Kettenverschluß zur Aufnahme von Mensch, Finger, Felge, Rohr oder Kettenglied. (Bei einem Kettenverschluß wie in Abb.9 ist die Kreisform des Querschnitts unabdingbar.) Wir verwenden hier einen etwas verallgemeinerten Begriff von Torus, der nicht nur Formen mit Kreisprofil (z.B. Autoschläuche) beinhaltet, sondern auch solche mit anderen Profilen (z.B. Dichtungen oder Manschetten (Abb.71b)).

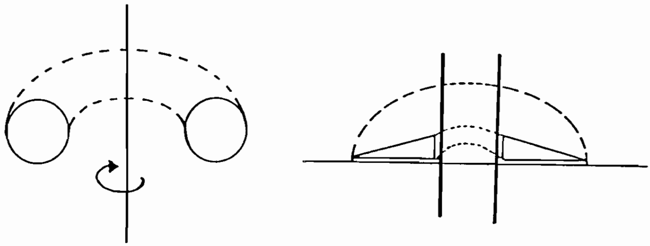


Abb.71 a b

2.3.5. Zylinder

Der Zylinder nimmt eine Mittelstellung zwischen Ebene und Kugel ein. Er enthält Geraden und Kreise als Ebenenschnitte; er ist unbeschränkt und doch in fast allen Richtungen beschränkt.

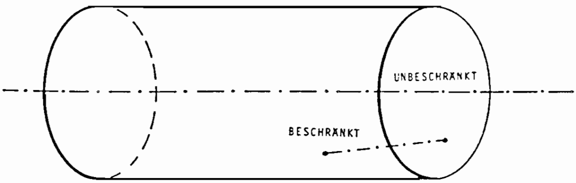


Abb.72

Wie Ebene und Kugel ist der Zylinder eine homogene Fläche; jedoch ist seine Symmetriegruppe eigentlicher Bewegungen nur zweidimensional, während sie für die beiden anderen Flächen dreidimensional ist; insbesondere enthält sie keine Bewegungen mit Fixpunkten. Echte Schnitte zweier Ebenen oder zweier Kugeln oder einer Ebene und einer Kugel ergeben nur die homogenen Linien Gerade oder Kreis. Dagegen können bei ebenen Schnitten von Zylindern zwar Gerade(npaar) und Kreis, aber auch (nicht kreisförmige) Ellipsen auftreten, und bei Schnitten von Kugeln mit Zylindern noch kompliziertere Kurven.

Zur praktischen Herstellung von Zylindern bemerken wir nur dies: Einen (endlichen) Hohlzylinder erhält man, indem man zwei gegenüberliegende Seiten einer rechteckigen, ebenen Fläche verheftet (vgl. Abb.121a). Dabei verteilt sich die zum Biegen aufgewendete Kraft gleichmäßig auf das gesamte Material und es entstehen keine Inhomogenitäten, wenn sie nicht absichtlich erzeugt werden. - Einen Vollzylinder kann man z.B. dadurch herstellen, daß man einen Tonklumpen mit der flachen Hand auf einer ebenen Unterlage immer in einer Richtung hin und her rollt.

Die Form des Zylinders wurde schon in mehreren Abschnitten angesprochen (Beweglichkeit im Lager, Bewegungsübertragung, Gerade, und besonders Kreis). Je nach Gesichtspunkten können zylinderförmige Gegenstände als Realisate von Geraden oder von Kreisen aufgefaßt werden. Das richtet sich etwa nach dem Verhältnis von Mantellinienlänge zu Grundflächenradius: Besenstiele, Wasserrohre, Möbelkanten sind Geraden; Münzen, Räder, Kabeltrommeln sind Kreise. Oder es richtet sich nach der Bewegungsart: Ein Kolben wird entlang seiner Mantellinien bewegt, eine Walze entlang ihrer Kreislinien.

Aber die zu leistenden Funktionen gehen meist über die hinaus, die Gerade oder Kreis erfüllen könnten: Der Besenstiel braucht eine gewisse Dicke, damit er gegriffen werden kann; im Wasserrohr wird etwas transportiert; die Möbelkante ist abgerundet und stellt einen Viertelzylinder dar, damit sie nicht so leicht beschädigt werden und sich niemand an ihr verletzten kann; die Kabeltrommel braucht eine gewisse Dicke, um das Kabel aufnehmen zu können. Schließlich gilt natürlich für alle Objekte, daß sich Formen nur dreidimensional materialisieren lassen.

Die homogene Zylinderform wird verwendet, weil und solange kein Grund besteht, von ihr abzuweichen. Vergleicht man sie mit anderen Formen, in denen der kreisförmige Querschnitt oder der rechteckige Längsschnitt aufgehoben ist, so stellt man fest, daß sie gewöhnlich leichter herzustellen, stabiler und ökonomischer ist. Eine bemerkenswerte Ausnahme sind die kegelförmigen Tüten, die Markthändler aus Zeitungspapier für ihre Waren rollen: Die Tüten dürfen selbstverständlich nur eine Öffnung haben; ein Hohlzylinder hat aber zwei Öffnungen, und eine davon mit Papier verschließen zu wollen, ist ohne Kleben schwierig.

Im Vergleich zur Kugel ist der Zylinder i.a. einfacher herzustellen und als Form besser zu durchschauen. Seine Eigenschaften lassen sich leichter feststellen, auch läßt er sich als realisierte Form geschickter handhaben - alles sicherlich Gründe dafür, daß man ihn in den Anwendungen häufig antrifft. Seine Definition gestaltet sich allerdings etwas schwieriger. Die folgende Möglichkeit erinnert besonders an die Eigenschaft des Zylinders, Geradenrealisat zu sein: Ein Zylinder besteht aus allen Punkten, die von einer Geraden einen vorgegebenen Abstand haben. - Offenbar setzt der Begriff des Abstandes eines Punktes von einer Geraden schon einige geometrische Begriffsbildung voraus. Mit dieser Definition stehen auch die Beweglichkeit entlang der Mantel- und entlang der Kreislinien in engem Zusammenhang, nicht so sehr jedoch die freie Beweglichkeit auf der ganzen Fläche. Diese wird auch in der Praxis wenig gebraucht. Viel wichtiger dagegen ist die Beweglichkeit entlang der Schraubenlinien.

2.3.6. Schraubenlinie

Die einzige homogene nicht ebene Linie ist die Schraubenlinie. Ihre Grundfunktion ist der Transport eines (gedachten) Zylinders entlang einer Geraden, ihre Achse, durch eine Rotation, genauer: durch eine Schraubbewegung. Das Verständnis dieser Funktion setzt eine kinematische Betrachtungsweise voraus. Offenbar läßt sich die Schraubenlinie z.B. in der Schule nur behandeln, wenn man die üblicherweise betriebene statische Geometrie der Ebene überwindet.

Die (zylindrische) Schraubenlinie mit konstantem Radius und konstanter Ganghöhe ist homogen, und das heißt: sie ist in ihrem Lager frei beweglich.

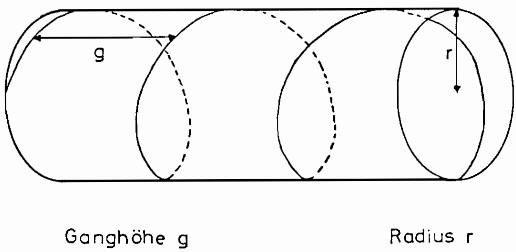


Abb. 73

Aber eine Rotation um ihre Achse ist keine solche Bewegung im Lager, jedenfalls wenn das Lager räumlich fest mit der Achse verbunden ist und jeder Punkt der Schraubenlinie einen (ortsfesten) Kreis um die Achse beschreibt (und nicht etwa noch entlang der Achse verschoben wird). Vielmehr funktioniert sie dann wie eine rotierende Zylinderfläche; eine solche wird ja insgesamt bei der Rotation überstrichen. (Man könnte daher in Umkehrung der natürlichen Genese den Zylinder als Rotationskörper der Schraubenlinie definieren.)

Wenn das Lager die Rotation der Schraubenlinie gleichmäßig mitmacht, verbleibt diese selbstverständlich in ihm, da sie relativ zu ihm ruht. In diesem Fall kann ebenfalls nicht von einer Bewegung der Schraubenlinie in ihrem Lager gesprochen werden. Diese simultane Drehung von Schraubenlinie und Lager tritt bisweilen unangenehm in Erscheinung. Zum Beispiel dann, wenn die Schraubenmutter sich auf der Schraube etwas verkantet und diese dann mit ihr mitdreht;

oder wenn ein Stückchen Fleisch auf einer Windung der Schnecke im Fleischwolf hängen bleibt und nicht zum Ausgang gedrückt wird; oder wenn der Korken nicht fest genug (!) im Flaschenhals sitzt und, bei Verwendung des weiter unten beschriebenen Glockenkorkenziehers, mit dem Korkenzieher rotiert und sich nicht aus der Flasche bewegt.

Damit eine Schraubenlinie, die um ihre Achse rotiert, sich in ihrem Lager bewegt, darf dieses nicht bezüglich der Achse in Ruhe sein und auch nicht mitrotieren, sondern es muß entlang der Achse torsionsfrei - vorläufig betrachten wir nur diesen Fall - gleiten. Tatsächlich stellt dann, jedenfalls bei passender Translationsgeschwindigkeit, die Rotation eine Bewegung der Schraubenlinie in ihren Lager dar, d.h. die Relativbewegung der Schraubenlinie gegen ihr Lager ist eine Überlagerung aus Rotation und Translation, also eine Schraubung.

Der Weg zu dieser Erkenntnis erscheint etwas umständlich, aber häufig tritt in den praktischen Anwendungen die Schraubbewegung gar nicht deutlich zutage, sondern nur eine Rotation und eine davon scheinbar unabhängige Translation. Dies kann man mit einem einfachen Versuch demonstrieren (Abb.74): Legt man einen Finger auf einen Korkenzieher und läßt diesen mit der anderen Hand (scheinbar) ortsfest rotieren, so stellt man nach genügend vielen Umdrehungen fest, daß der Finger die ganze Schraubenlinie durchlaufen hat. Oder: Ist ein Gegenstand in einer geraden Schiene frei beweglich, legt man eine Schraubenfläche an die Schiene an mit ihrer Achse parallel dazu und läßt sie rotieren, dann wird der Gegenstand entlang der Schiene verschoben (Abb.74a).

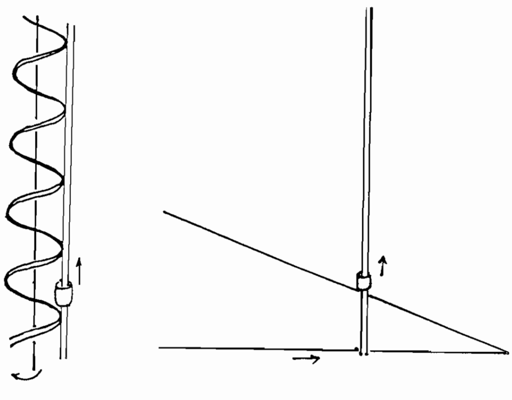


Abb.74 a b

In einer stärker geometrischen Sprache: Der Schnitt einer (homogenen) Schraubenlinie mit Radius r und Ganghöhe g mit einer Geraden (Schiene) parallel zur Schraubachse im Abstand r besteht aus (unendlich vielen) Punkten die im Abstand g aufgereiht sind. Rotiert nun die Schraubenlinie ortsfest um die Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit w, so bewegen sich die Schnittpunkte mit der konstanten Geschwindigkeit $wg/2\pi$ auf der Schiene, und jeder Punkt der Schraubenlinie durchläuft eine Kreisbahn senkrecht zur Achse und ist nach einer Umdrehung wieder an seiner alten Stelle. Zwischendurch war er genau einmal Schittpunkt mit der Schiene.

Würde man die Schraubenlinie in eine Ebene durch die Schiene abwickeln, so entstünde eine die Schiene schräg schneidende Gerade. Die Rotation der Schraubenlinie würde in eine Translation der Geraden senkrecht zur Schiene mit der Geschwindigkeit wr umgewandelt, und der Schnittpunkt würde sich wieder entlang der Schiene mit der Geschwindigkeit $wg/2\pi$ bewegen (Abb.74b). Dabei handelt es sich um das schon erläuterte Prinzip der schiefen Ebene (siehe Abb.21). So wie jeder einzelne Punkt der abgewickelten Gerade seine 'Höhe' beibehält und der Schnittpunkt mit der Schiene trotzdem nach 'oben' wandert, so bleibt auch jeder einzelne Punkt der aufgewickelten Schraubenlinie immer in derselben Ebene orthogonal zur Achse, und nur die Schnittpunkte mit der Schiene unterliegen einer Translation.

Der optische Eindruck, den eine hinreichend schnell rotierende Schraubenlinie macht, entsteht dadurch, daß der Blick in einer Gerade parallel zur Schraubachse hängen bleibt und dabei der Eindruck entsteht, als liefen die Windungen

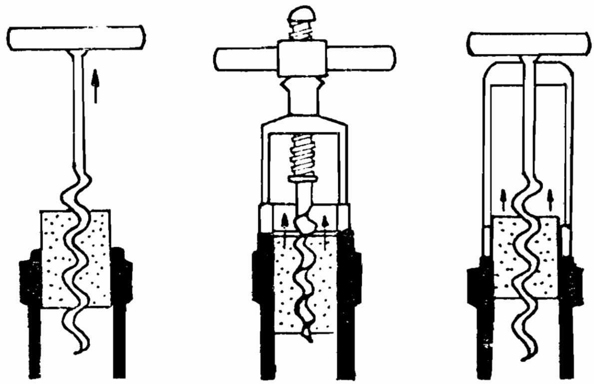


Abb.75 a b c

parallel zur Achse davon. Es handelt sich hierbei aber nicht um eine bloße optische Täuschung, wie die praktischen Versuche mit einem Gegenstand auf einer Schiene oder dem Finger auf dem Korkenzieher zeigen. (Natürlich kann man bei der Auffassung des Raums als Punktmenge nicht von beweglichen Figuren oder Punkten sprechen; man muß sich sorgfältiger ausdrücken, etwa: Im Raum werden nacheinander Teile (speziell Punkte) von einem starren Körper (einer Spitze) eingenommen.). Eine praktische Anwendung des erörterten Prinzips ist der sog. Glockenkorkenzieher (Abb.75c). (Für die folgende Beschreibung wird die Glocke als ortsfest angenommen, und die Bewegungen werden auf sie bezogen.) Nachdem sie auf die Flaschenöffnung aufgesetzt worden ist, wird der Korkenzieher in den Korken eingeschraubt, der so fest im Flaschenhals sitzt, daß er nicht mitrotieren kann und das Gewinde sich ganz durch ihn hindurchbohrt. Hat dieses seinen tiefsten Punkt erreicht und setzt man die Drehbewegung (mit genügend Kraft), jetzt ohne Translation, in derselben Richtung fort, so wird der Korken zu einer Bewegung gezwungen, da das Gewinde nicht sein Lager, das von ihm selbst gebohrte Loch im Korken, verlassen kann. Eine der beiden Möglichkeiten, die wir schon oben erörtert haben, besteht darin, daß der Korken mitrotiert. Dies kann er aber nicht, weil er in den Flaschenhals gepreßt ist und nach außen drückt. Also muß er sich rotationsfrei in Achsenrichtung bewegen, wie beim früheren Versuch der Finger. So wie der Finger nie vom Gewinde herunterrutscht, kann hier das Gewinde nie das Bohrloch verlassen, und da der Korken nicht rotieren kann, verbleibt jedes Stückchen an ihm immer in einer festen Ebene durch die Achse. Aus dem Flaschenhals gleiten kann der Korken sehr wohl, denn dabei ist weniger Reibung zu überwinden als beim Rotieren.

Natürlich sind prinzipiell nicht nur translationsfreie Rotation und rotationsfreie Translation möglich, sondern auch Bewegungsarten dazwischen: Wenn ein Lager langsamer rotiert als die Schraubenlinie, wird es auch einer Translation unterworfen. Ganz allgemein gilt: Ist g die Ganghöhe, $\vec{v}$ die Winkelgeschwindigkeit der Schraubenlinie, $\vec{w}$ die des Lagers, die größer, gleich groß, kleiner, null, entgegengesetzt sein kann, dann haben die beiden Objekte eine relative Translationsgeschwindigkeit von $g\,(\vec{v}-\vec{w})/2\pi$ längs der Achse, wobei die Richtung noch von der Orientierung der Schraubenlinie abhängt. Hier zeigt sich die prinzipielle Gleichwertigkeit von Schraubenlinie und Lager. Der Fall einer solchen Mit-Rotation des Korken könnte z.B. auftreten, wenn dieser nicht fest genug in der Flasche sitzt.

Zurück zur Aufwärtsbewegung des Korken: Im Vergleich zu dem anfänglichen Einbohren hat sich nun an der Relativbewegung des Gewindes gegenüber dem Korken nichts geändert, sie hat nach wie vor dieselbe Richtung und dieselbe Geschwindigkeit (falls die Rotationsrichtung und -geschwindigkeit gleich bleiben).
Nur wird die Kraft nicht mehr zum Bohren des Lochs, sondern zur Überwindung der Reibung des Korken am Flaschenhals aufgewendet. Relativ zur Glocke und zur

Flasche hat sich etwas geändert: Zuerst sitzt der Korken fest, und das Gewinde unterliegt einer Translation; dann bleibt das Gewinde ortsfest, und der Korken wandert entlang der Achse, da das Gewinde nach wie vor rotiert. Hat sich der Korken aus der Flasche in die Glocke bewegt, so kann er von dort wieder entfernt werden durch Drehen des Gewindes in die andere Richtung. Jedenfalls wenn das Gestell einen engen Gummihals hat, der den Korken am Mitrotieren hindert, bewegt dieser sich nach draußen.

(Es sei angemerkt, daß Glockenkorkenzieher mit diesem Funktionsprinzip sich nicht durchgesetzt haben, da es bei ihnen zu leicht passieren kann, daß der Korken mitrotiert. Stattdessen sind Glockenkorkenzieher verbreitet, die den Korken mit einer rotationsfreien Translation herausziehen. Hier dient die Glocke als Trägergehäuse für einen kraftsparenden Mechanismus, der allerdings bei gewissen Spielarten doch wieder auf Gewinden beruht. Vgl. Abb.75b.)

Das Funktionsprinzip der Schraubenlinie ist es also, relativ zu ihrem Lager zu rotieren und sich gleichzeitig dabei zu verschieben. Es kommt nicht darauf an, wie sich Schraubenlinie und Lager relativ zu einem ortsfesten Gestell bewegen, sondern nur auf ihre Bewegung zueinander. Man kann also ohne Bezugnahme auf ein solches Gestell gar nicht unterscheiden, was rotiert und was sich verschiebt, bzw. ob eine Form beides und die andere gar nichts 'tut'. Als Hauptzweck hat die Form der Schraubenlinie also Drehbewegungen in geradlinige umzusetzen und umgekehrt; d.h. ortsfeste und ortsverändernde Bewegungen ineinander überzuführen. Es kann aber auch sein, daß nur die Rotationsebene verändert wird (vgl. Abb.33). Diesen ihren Zweck erfüllt die Schraubenlinie in verschiedenen Erscheinungsformen: Am wichtigsten ist wohl der Transport von Objekten in Richtung der Schraubachse. Hierfür haben wir als Beispiel gerade den Glockenkorkenzieher in der zweiten Phase des Entkorkens kennengelernt, wo er den Korken aus dem Flaschenhals befördert.

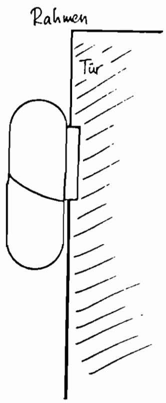


Abb.76

Es gibt Türscharniere mit schraubenförmiger Trennfläche: In geschlossenem Zustand sitzt die Tür am tiefsten und dichtet den Eingang gut ab. Beim Öffnen wird sie angehoben, so daß sie nicht auf dem Boden schleift und dann auch nicht offen stehen bleibt, sondern von selbst wieder zufällt (Abb.76).

Bei modernen Warenautomaten liegen Schraubenlinien in waagerechten Schächten. In ihre Windungen ist die Ware eingeklemmt. Nach dem Geldeinwurf dreht sich die Schraubenlinie ein Stück weit. Die Wand des Schachts hindert die Ware am Mitrotieren; dadurch wird sie nach vorne geschoben, und ist sie am Anfang des Schachtes angelangt, fällt sie herunter und kann entnommen werden.

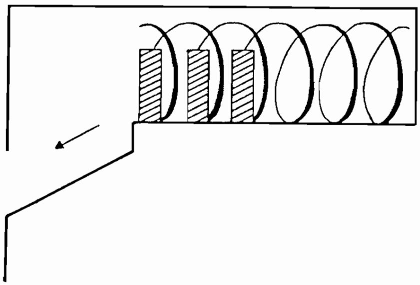


Abb. 77

Eine frappierende Anwendung dieses Transportprinzips ist die Archimedische Schnecke, mit der Wasser, Sand oder Getreide gegen die Schwerkraft nach oben befördert werden können. Sie war bereits im Altertum bekannt und wird in letzter Zeit wieder zunehmend verwendet, besonders in Klärwerken. Sie ist eine in einen Hohlzylinder passend eingelagerte Schraubenfläche (zusammengesetzt aus Schraubenlinien) mit stabiler Achse. Das Rohr wird schräg in das zu befördernde Gut getaucht, und durch die Rotation der Schraubenfläche wird in jeder Windung eine Portion des Gutes an das andere Ende des Rohrs, und damit nach oben, befördert.

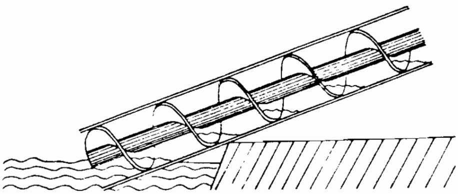


Abb. 78

Das zugrunde liegende Prinzip ist nach wie vor dasselbe wie oben erörtert; es tritt nur nicht so deutlich zutage: Bei der Rotation der Schraubenfläche gerät ein Teil des Gutes in die unterste Windung und das Rohr, die zusammen für ihn ein Behältnis bilden und ihn vom Rest trennen. Durch die Schwerkraft wird die

Menge in diesem Behältnis am Mitrotieren gehindert und verbleibt in der Fallinie des Zylinders, einer geraden 'Schiene', und wird so nach oben transportiert. Durch Ausnutzung der Schwerkraft wird also die Schwerkraft überwunden.

Die Menge in jeder Windung kann immer so groß sein, daß ihre Obergrenze bis an die Achse reicht (vgl. Abb.78); alles darüber fließt in die nächst tiefere Windung ab. Daher kann beim Hohlzylinder ohne Beeinträchtigung die obere Hälfte fehlen. Steht er senkrecht, so fließt alles Wasser ab, bzw. es wird erst gar nichts nach oben befördert. Je flacher er liegt, desto mehr Wasser kann in jeder Windung transportiert werden, jedoch gewinnt es nur langsam an Höhe. Die Kapazität läßt sich auf zwei Weisen steigern: Man erhöht die Rotationsgeschwindigkeit, jedoch nur bis zu einer gewissen Grenze, oder man windet mehrere Schraubenflächen ineinander (siehe Abb.81).

Das Prinzip der Archimedischen Schnecke ist kein anderes als das beim Glockenkorkenzieher oder beim Warenautomaten, nur ist das Lager kein fester Körper. Sogar Schiffsschrauben hat man schon so konstruiert; hier wird zwar nicht die Schwerkraft überwunden, aber wenigstens ausgenutzt.

Schraubenlinien können auch Übertragungen von Kräften ermöglichen oder verhindern: Bei Kelter, Druckerpresse, Schraubverschluß, Schraubenmutter werden mit Hilfe von Schraubenlinien je zwei Körper fest aufeinandergepreßt. Mit kleiner Ganggöhe und damit kleinem Neigungswinkel der Schraubenlinie wird erreicht, daß die Windungen angenähert Kreise sind, die orthogonal auf der Translationsrichtung stehen. Die von dem Zusammenpressen hervorgerufene Kraft wirkt in Translationsrichtung und damit nur zu einem ganz geringen Teil entlang den Windungen. Somit reicht sie nicht aus, sich dem Drehen zu widersetzen oder eine Schraubverbindung zu lockern. Darüber hinaus wird durch die Lage der Rotationsebene senkrecht zur Translationsrichtung der Einsatz langer Hebel ermöglicht. Auch die umgekehrte Bewegungsübertragung, nämlich die Translation in eine Rotation, kommt in der Praxis vor, z.B. bei gewissen mechanischen Kreiseln oder Schraubenziehern (siehe Abb.22). Natürlich müssen deren Schraubenlinien steil sein.

Bei all diesen Beispielen ist die Homogenität der Schraubenlinie unabdingbar, da diese sich jeweils in einem festen Lager zu bewegen hat. Etwas anderes ist es, wenn die Schraubenlinie etwa als Getriebeteil zum Übertragen von Rotationen in dazu senkrechte verwendet wird (vgl. Abb.33), z.B. auch bei Fischer-Baukästen. Mit der Rotation der Schraubenlinie wird ein Zylinder in Achsenrichtung transportiert. Setzt man auf diesen Zylinder senkrecht ein Rad mit fester Achse, so rollt es auf ihm ab, d.h. es wird durch seine Translation zum Rotieren gebracht. In der Praxis verwendet man aber den Zylinder nicht tatsächlich, sondern versieht das Rad mit Zähnen und hat denselben Effekt. Von der Schraubenlinie wird eigentlich nur eine Windung gebraucht, die noch nicht einmal unbedingt homogen sein muß, wenn sie nur zu den Zähnen des Zahnrades paßt. Und die Schraubenlinie insgesamt braucht schon gar nicht homogen zu sein, sie kann z.B. weitere Zahnräder mit anderen Radien antreiben und braucht dann an den entsprechenden Windungen andere Ganghöhen oder sogar andere Radien (Abb.79). Ein Zahnrad bildet kein komplettes Lager, sondern nur einen kleinen Teil, so daß die Homogenität entbehrlich wird.

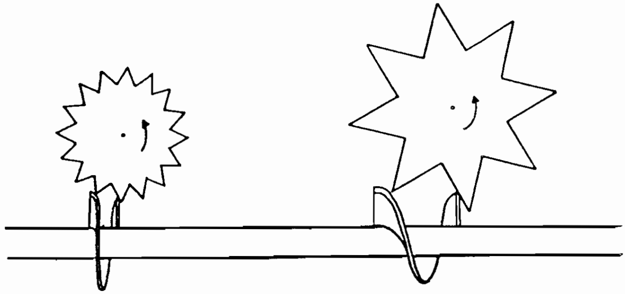


Abb.79

Häufig bestehen Gewinde aus mehreren ineinandergewundenen Schraubenlinien, z.B. bei Dosenverschlüssen (bis zu sechs kurze, s.Abb.80), bei dem Schaubenzieher in Abb.22 (zwei in jeder Orientierung) oder bei Schrauben mit Muttern.

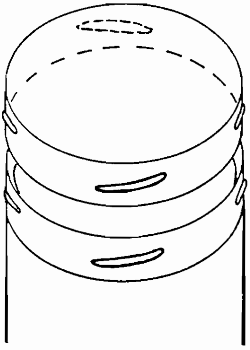


Abb.80

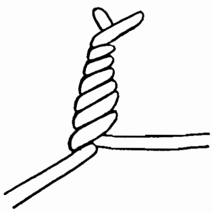


Abb.81

Damit wird die Fläche des Zylinders besser ausgenutzt, auf den die Schraubenlinien gewickelt sind, und die Schraubung kann in mehr als einer Winkelposition beginnen. Bei der Archimedischen Schnecke wird dadurch die Kapazität gesteigert (Abb.82).

Zwei Drahtenden verbindet man miteinander, indem man sie eins ums andere windet, und nicht etwa das eine gerade läßt und nur das andere um dieses herumwindet (Abb.81). -Wie sind dabei die Schraubenlinien orientiert? - Natürlich gleichsinnig. Gegensinnige Schraubenlinien würden sich dauernd überschneiden wie etwa beim Schraubenzieher von Abb.22. Bei ihm braucht man beide Orientierungen, da man durch Drücken sowohl Links- als auch Rechtsdrehungen erzeugen will zum Auf- bzw. Zuschrauben, wobei man mit einem Hebel die gewünschte Orientierung einstellt.

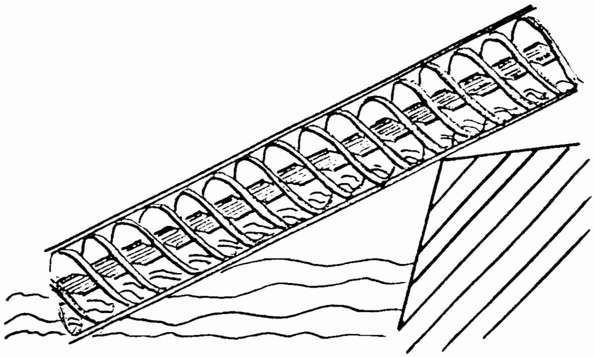


Abb.82

Da Wasser, Sand, Getreide flexible Lager bilden, ist bei der Archimedischen Schnecke Homogenität nicht unerläßlich. Bei einer Wendeltreppe oder einer Rutschbahn ist das Lager noch imaginärer, es besteht hier aus der Gesamtheit der Spuren der sich auf ihr bewegenden Personen oder Gegenstände. Diese beiden Schraubenflächen sind schiefe Ebenen mit bzw. ohne Stufen zur bequemen Überwindung von Höhenunterschieden, die aus Gründen der Platzersparnis um eine Achse gewickelt sind. (Wie das Transportprinzip der Schraubenfläche analog bei einer ausgestreckten schiefen Ebene funktioniert, haben wir schon an dem Experiment zu Abb.21 demonstriert; vgl. auch Abb.74.)

Bei diesen Geräten werden die Schraubenlinien meistens doch homogen gemacht, obwohl sie es nicht sein müßten. Oft erweist sich eine bestimmte Steigung als optimal, und es besteht eigentlich auch kein Anlaß, z.B. manche Stufen breiter als andere zu machen. Erst wenn Gegenstände auf der Rutschbahn immer schneller werden und aus der Bahn fliegen können, muß man Windungen unterschiedlich gestalten, etwa die unteren geringer krümmen (d.h. den Radius vergrößern) oder deren Ränder überhöhen. Eine quantitative Erfassung dieser Erscheinungen geht jedoch über die Elementargeometrie hinaus. Dort bieten sich eher Berechnungen an über Windungszahl, Stufenzahl und -höhe, Höhenunterschiede, Länge des Geländers usw.

Wie lang ist denn eine Schraubenlinie? - In Lehrbüchern der Analysis wird diese Aufgabe üblicherweise von einer Parametrisierung $\phi(t)=(r\cdot\cos t,\ r\cdot\sin t,\ gt/2\pi)$ ausgehend durch Berechnung des Integrals $L(\alpha) = \int_0^\alpha \|\phi'(t)\|\,dt$ behandelt. Dabei ist r der Radius, g die Ganghöhe der Schraubenlinie und α der (im Bogenmaß benannte) Rotationswinkel zwischen den Enden des auszumessenden Linienstückes. - Tatsächlich wird hier mit Kanonen auf Spatzen geschossen. Man halte sich nur an eine kinematische Erzeugung einer Schraubenlinie, etwa durch Einritzen auf dem Mantel eines Zylinders beim schrägen Abrollen auf einer scharfen geraden Kante (Abb.83) oder durch Aufwickeln eines rechtwinkligen Dreiecks auf einen Zylinder derart, daß eine Kathete ein Kreis und die andere eine gerade Mantellinie wird, wie beim Geländer der Wendeltreppe.

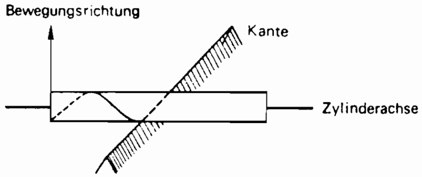


Abb. 83

Dann gilt nach dem Pythagoras-Satz für die Länge $L(2\pi)$ einer Windung $L(2\pi)^2 = g^2+(2\pi r)^2$, nach dem Strahlensatz für die Länge $L(\alpha)$ die Gleichung $L(\alpha): L(2\pi) = \alpha r : 2\pi r$, insgesamt also

$$L(\alpha) = \alpha/2\pi\sqrt{(2\pi r)^2 + g^2} = \alpha\sqrt{r^2+(g/2\pi)^2}\ .$$

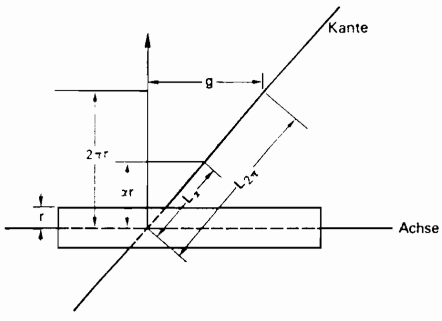


Abb. 84

Die kinematische Erzeugung der Schraubenlinie mittels Abrollen eines Zylinders auf einer Kante kann als Grundlage für die Definition der Schraubenlinie dienen und zu einer Definition der Schraubenfläche fortgesetzt werden: Sie ist die Schraubspur einer ganzen Linie. Man dreht irgendeine Kurve um eine Gerade und verschiebt sie gleichzeitig entlang dieser Geraden, beides mit konstanten (bzw. zueinander proportionalen!) Geschwindigkeiten. Dabei erzeugt jeder Punkt der Kurve eine Schraubenlinie, und die Schraubenfläche ist aus all diesen Schraubenlinien 'zusammengesetzt'. Ist die zu schraubende Kurve ein Punkt, dann entartet die Schraubenfläche zur Schraubenlinie. Die Kurve kann gerade oder krumm, endlich oder unendlich sein, sie kann in der Schraubachse enden, sie schneiden oder sie meiden. Von diesen Möglichkeiten sind nur wenige praktisch realisierbar, indem man einen Vollzylinder mit geeignetem Radius in einer bereits realisierten Schraubenlinie entlang einer scharfen Schneide, die das Profil der gewünschten Fläche hat, bewegt. Eine einfache (ideale) Schraubenfläche ist die von einer Strecke erzeugte, welche senkrecht auf der Achse steht und in dieser endet. Sie wird von der Wendeltreppe realisiert, besonders von modernen Betontreppen an Brücken u.ä., bei denen die Achse materialisiert ist und die ganze Treppe trägt.

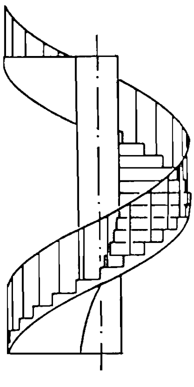


Abb.85

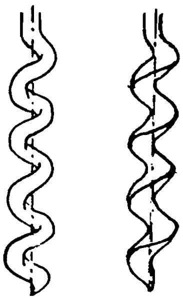


Abb.86

Jede realisierte Schraubenlinie ist eigentlich eine Schraubenfläche. Aufgrund der Herstellweise, vor allem aber aufgrund der Funktion, lassen sich dennoch Schraubenlinien von Schraubenflächen unterscheiden. Archimedische Schnecken, Wendeltreppen, Rutschbahnen sind zum Transport von Menschen und Gütern bestimmt, bei ihnen ist der flächenhafte Charakter funktional. Bei Verschlüssen, Schrauben, Druckerpressen kommt es auf die Beweglichkeit im Lager und damit auf den linienhaften Charakter an. Eine Zwitterstellung nimmt der Korkenzieher (ohne Glocke) ein: Beim Eindrehen in den Korken ist die Beweglichkeit im Lager, beim Herausziehen ein fester Halt wichtig. Es gibt den Korkenzieher auch in zwei prinzipiell verschiedenen Versionen: als gezogene Schraubenlinie und als gefräste Schraubenfläche mit einem Winkelprofil (Abb.86). Die zweite Version ist in der Herstellung billiger und im Gebrauch schlechter, weil mit ihr in die Mitte des Korken ein fast zylinderförmiges Loch gebohrt wird und dieser beim Herausziehen leichter abreißen kann.

Eine (echte) Schraubenfläche ist zwar (eindimensional) entlang ihrer Schraubenlinie beweglich, aber nicht frei (zweidimensional) in ihrem Lager. Sie ist keine homogene Fläche, es gibt auf ihr z.B. Punkte mit minimalem Achsenabstand und Punkte mit größerem Achsenabstand. Immerhin ist bei ihr nach unserer Definition die Ganghöhe konstant, und alle Schnitte senkrecht zur Achse sind kongruent. – Eine Verallgemeinerung der Schraubenfläche stellt die Schnecke in einem Fleischwolf dar (siehe Abb.42). Hier ist es der Druck auf den Holzpflock, der verhindert, daß die Nahrung mit der Schnecke mitrotiert und nicht an den Ausgang gelangt.

Auch für Schraubenlinien gibt es Verallgemeinerungen, bei denen die Homogenität aufgehoben ist und die im Prinzip nur noch die gewundene Form mit der homogenen Schraubenlinie gemein haben. Es gibt spiralige an (konischen) Schrauben oder an Sprungfedern im Bettrahmen, oder gar rechteckige im Pistolenmagazin (Abb.87). Sie alle bewegen sich nicht in ihrem Lager und sollen es auch nicht.

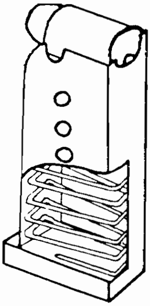


Abb.87

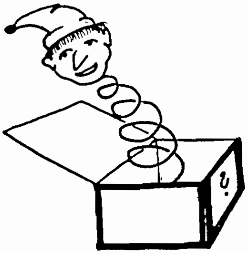


Abb.88

Viele elastische Federn sind homogene Schraubenlinien (Stoßdämpfer am Auto, Verschlüsse, Federwaage); falls erforderlich, werden sie durch einen inneren oder äußeren Zylinder in der Form gehalten. Unabhängig von der Homogenität ist es das Funktionsprinzip der elastischen Schraubenfeder, sich bei Einwirkung einer Kraft längs der Achse zu verformen und dabei eine entgegengesetzte Kraft zu erzeugen. Damit werden Stöße aufgefangen (Stoßdämpfer, Sprungrahmen), ein dauernder Druck erzeugt (Pistolenmagazin), der sich beim Lösen einer Sperre in kinetische Energie umsetzt ('Kasper in der Kiste'; Abb.88), oder Gewichte gemessen (innerhalb gewisser Grenzen ist die Änderung der Ganghöhe der Kraft proportional).

2.3.7. Starrer Körper

Eine Sprungfeder soll zwar immer in einer gewissen Grundform bleiben und auch jeweils wieder in ihre Ausgangsform zurückkehren, aber sie darf kein starrer Körper sein. Natürlich gibt es in unserer Umwelt auch gar keine starren Körper im strengen Sinne. Die Form eines jeden Körpers ändert sich unter mechanischen, thermischen oder chemischen Einflüssen. Eine Fülle von Umweltphänomenen hat damit zu tun: Bruchtests in der Industrie; Motorradhelm; Mörtel beim Bau; Gelenkmechanismen; Bremsflüssigkeit; Springen eines Balls; bewegliche Lager unter Brücken; Lücken zwischen Eisenbahnschienen, damit sie im Sommer Platz haben sich auszudehnen; Schwierigkeiten beim Schließen mit einem angewärmten Schlüssel in einem kalten Schloß; Zahnweh bei extremen Temperaturen im Mund, wenn Plombe und Zahnschmelz sich verschieden stark ausdehnen; Übergänge zwischen Aggregatzuständen; Einwirkungen durch Feuer, Säuren, Rost, Legierungen. Entsprechend haben sich in der Natur mehr oder weniger feste Körper ausgebildet: Eierschale, Chitinpanzer, Holz, Knochen, Zellwand. Bisweilen ist auch das Fehlen von Starrheit funktional, z.B. bei Pflanzenstengeln, Knochengelenken, oder bei der Haut.

Wir wollen den Ausdruck 'starrer Körper' für die Idee verwenden und ihre Realisate lieber feste Körper nennen. Die Idee des starren Köpers geht ein

- in jegliche Realisierung von geometrischen Formen (Gußform, Werkzeug, Werkstoff, Zeichengerät, usw.);
- in jegliches Funktionieren realisierter Formen;
- und insbesondere in jede Meßoperation (Maßstab, Meßbecher, Winkelmesser usw.). (Das Thema 'Messen' ist zweifellos besonders problematisch. Deswegen, vor allem aber weil wir Messen als Modellbildung auffassen, behandeln wir es erst in Abschnitt 2.4.)

Genetisch früher als das Messen sind das Realisieren von Formen und deren Funktionieren in der Hauptvariante 'eingeschränkte Beweglichkeit'. Erfahrungen dazu werden bei jedem, besonders bei werkendem Umgang mit Materialien unterschiedlicher Festigkeit gemacht. Dabei lassen sich verschiedene Themen erörtern:

- Abhängigkeit der Härte vom zu erfüllenden Zweck – z.B. kann eine gewisse Elastizität durchaus sinnvoll sein, auch wenn für die eigentliche Funktion Starrheit wesentlich ist, etwa: Ein Messer verbiegt sich unter Druck beim Schneiden harter Gegenstände und bricht nicht gleich; die Aufprallkraft bei einem Autounfall wird von der Knautschzone absorbiert; Fußball wird nicht mit einer Eisenkugel gespielt, usw.
- Methoden der Härtung (vgl. Kapitel 9).
- Auswirkungen von Temperaturänderungen auf die Ausdehnung fester Körper,

Unterschiede bei verschiedenen Materialien. - Wie könnte man feststellen, ob der reale Raum und alle darin befindlichen Körper ihre Ausdehnung gleichermaßen ändern?

- Einfluß der relativen Lage fester Körper auf ihre Ausdehnung.
- Schlechtes Funktionieren geometrischer Formen bei ungenügender Festigkeit: Man zeichne einen Kreis mit einem Zirkel mit lockerem Scharnier; dazu zahlreiche Beispiele aus dem Alltag: Einknicken eines Pfeilers bei schwerer Belastung, usw.

Für viele Funktionen ist der Begriff der 'partiellen' Starrheit wichtig: bei Gußmaterial (Gips, Mörtel, Eisen), bei Gelenkmechanismen (Zirkel, Storchenschnabel, Zollstock, Speichen am Regenschirm, gefaltetes Papier, Eisenbahnzug, Gelenkomnibus, Getriebe), bei elastischen Körpern (gerolltes Papier, Maßband, Flüssigkeit zum Volumenmessen oder als Bremsflüssigkeit). Dabei gibt es meistens gewisse ausgezeichnete Zustände, in denen die Form ihre eigentliche Funktion erfüllt: erstarrter Guß, gespannter Schirm, ausgerolltes Maßband. Es gibt aber auch solche, in denen sekundäre Funktionen wirksam werden, z.B. für den Transport: flüssiger Guß, zusammengefalteter Schirm. Schließlich gibt es auch Zustände, die bei stetigen Änderungen die Übergänge ermöglichen. In manchen Fällen sind alle Zustände gleichberechtigt funktional. Das gilt besonders da, wo die Funktion eine Bewegung ist (Motorkolben, Getriebe, Räderfahrzeug).

Jegliche Geometrie des Passens setzt den starren Körper voraus, aber in der Realität können entsprechende Operationen eigentlich fast nur mit partiell starren Körpern ausgeführt werden. - H. Freudenthal (1977) hat sich mit diesem Themenkreis ausführlich beschäftigt und eine treffende Einteilung längeninvarianter realer Abbildungen vorgenommen, nämlich in Kongruenzabbildungen (fester Körper), Flexionen von Kurven, sowie Brech- und Heiletransformationen. Allerdings ist er vornehmlich am Problembereich des Messens, an dessen psychologischer Durchdringung und Anbindung an die Mathematik interessiert.

2.3.8. Polygone

Ein wesentliches Merkmal operativer Geometrie ist die Dreidimensionalität. Wenn wir uns trotzdem zunächst mit (ebenen) Polygonen und erst im nächsten Abschnitt mit (räumlichen) Polyedern beschäftigen, so hat dies folgende Gründe: Die Realisation geometrischer Ideen durch Bearbeitung physikalischer Körper ergibt immer nur beschränkte Formen, also z.B. nicht Ebenen. Wenn nun eine endliche Form dennoch gewisse Funktionen einer Ebene erfüllen soll, z.B. konvex zu sein und an andere konvexe Formen zu passen, an eigene Abdrücke und deren Abdrücke zu passen, oder die Schwerkraft zu neutralisieren, dann muß ihre Oberfläche wenigstens in Teilen eben sein. Wir haben schon einige solcher Formen kennengelernt, etwa den endlichen Zylinder oder den Kegelstumpf. Die zumeist benötigte Funktion des Prismas (der Pyramide, des Pyramidenstumpfs) läßt sich auf die zweier grundlegender Formen zurückführen: des Zylinders (Kegels, Kegelstumpfs) und eines Polygons. Viele gebräuchliche räumliche Formen könnten wesentliche Funktionen - ideal - auch schon als ebene Formen in der Ebene erfüllen; d.h. ebene Betrachtungen reichen für das Verständnis jener Funktionen schon hin.

Polygone vereinigen Eigenschaften von Kreis und Gerade in sich. Sie sind geschlossene Kurven, die aus lauter geraden Stücken bestehen (dafür haben sie Inhomogenitäten, nämlich Ecken). Mit Polygonen werden Kurven approximiert. Für diesen approximativen Charakter von (allgemeiner gesehen) Streckenzügen an (nicht notwendig geschlossene) Kurven gibt es viele Beispiele. Wir erwähnen hier die Oberleitung über Straßenbahnschienen in einer Kurve. Während mit den Schienen auf dem Boden die Idee einer glatten Kurve realisiert wird, ist dies bei dem Leitungsdraht nicht möglich, obwohl auch er am günstigsten so ausgebildet würde. Er kann aber nur geradlinig (in der senkrechten Projektion auf den als eben angenommenen Boden) von Mast zu Mast geführt werden. Dann muß der Stromabnehmer der Bahn entsprechend breit sein.

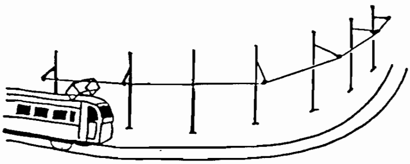


Abb. 69

Regelmäßige Polygone

Die Zwitterstellung von Polygonen zwischen Geraden und Kreisen wird bei regelmäßigen Polygonen besonders deutlich: Zu den günstigen Eigenschaften als Folge der geradlinigen Seiten - das Polygon ist konvex und paßt an andere konvexe Polygone - kommen Teile der Kreissymmetrie, nämlich diskrete Drehsymmetrie. Je größer die Eckenzahl ist, desto kreisähnlicher wird das Polygon.

Warum haben Schraubenmuttern den äußeren Rand i.a. in Form eines regelmäßigen Sechsecks? - Der Rand hat den Zweck, eine leicht herzustellende und leicht zu lösende, aber stabile Verbindung mit einem langen, i.a. starren Hebel (Schraubenschlüssel) zu ermöglichen, mit dem die Mutter kräftig um eine fest-stehende Achse gedreht werden kann. Naturgemäß braucht der lange Hebelarm für seine Bewegung viel Platz, der ihm aber durch die zu verschraubenden Konstruktionsteile eingeschränkt wird: Häufig steht nur eine kleine Umgebung der Drehebene (genauer: einer Schraubenflächenwindung) und dort nur ein bestimmter Winkelraum der Größe α zur Verfügung (Abb.90). Wird der Schlüssel angesetzt und die Mutter um ungefähr α gedreht, dann muß er für die nächste Drehung an einer etwa um α versetzten Stelle an der Mutter angreifen können, d.h. der Mutternrand muß drehsymmetrisch von der Ordnung $360°/\alpha$ sein.

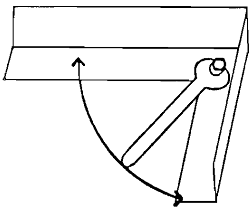


Abb.90

Die Stabilität der Mutter wächst mit ihrer Breite, die man, für die Betrachtungen in der Ebene, am besten als maximalen Durchmesser aller einzubeschreibenden Kreise definiert. Von daher gesehen wäre ein kreisförmiger Rand mit der Schraubachse durch den Mittelpunkt günstig. Das Material, das über den größten einbeschreibaren Kreis hinausragt, trägt ja zur Stabilität eigentlich nichts bei. Allerdings könnte dann der Hebel nicht fest mit der Mutter verbunden werden, denn geometrisch wäre diese in dem durch den Schlüssel gebildeten Lager frei beweglich, und lediglich Haftreibungskräfte könnten zum Halten ausgenutzt werden (Abb.91).

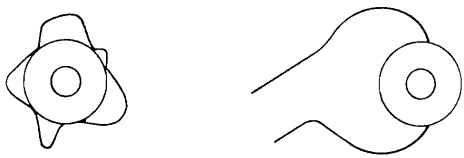


Abb.91

Der Schlüssel sollte die Mutter so angreifen, daß die Berührkanten möglichst lang sind, senkrecht zur Kraftrichtung stehen und daß ein möglichst großer Winkel umfaßt wird. Dann rutscht der Schlüssel nämlich nicht so leicht ab, obwohl seine Öffnung ja etwas größer als die (durchschnittliche) Mutter ist, damit er an allen Muttern einer bestimmten Größenordnung angesetzt werden kann. Die Formen des Schlüssels und der Mutter müssen zueinander passen; die eine ergibt das Lager der anderen.

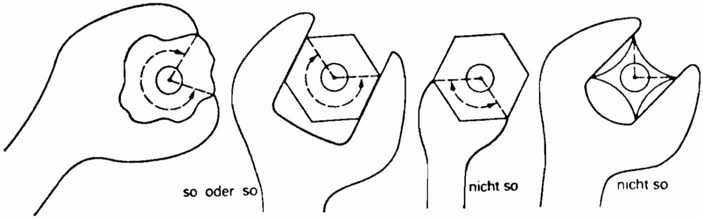


Abb.92

Schließlich muß man den Schlüssel auf die Mutter aufschieben können. Nun gibt es in der Ebene nur zwei Arten freier Bewegung im Lager: die kreisförmige und die gerade. Die Formen könnten also wie in Abb.93a oder wie in Abb.93b sein. Sind gegenüberliegende Kanten Teile konzentrischer (= paralleler) Kreise, so braucht man für eine n-fache Drehsymmetrie eine Einteilung des Randes in 2n Stücke, außerdem verlaufen die nach außen gewölbten Stücke zu sehr in Richtung der Drehbewegung (Abb.93a).

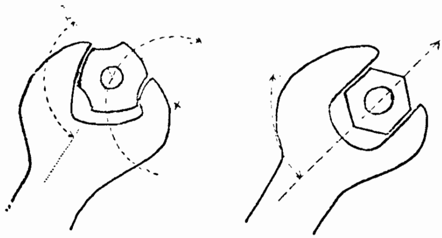


Abb.93 a b

Daher nimmt man als Randstücke paarweise parallele Strecken (Abb.93b); die ganze Figur ist dann ein regelmäßiges Polygon mit gerader, nicht zu großer Eckenzahl, etwa 4, 6 oder 8 .

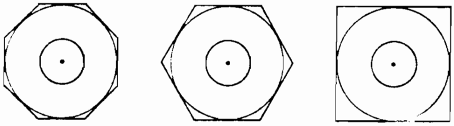


Abb.94

Die wesentlichen Größen bei einem n-Eck der Dicke 2 notieren wir für n= 4, 6, 8 in folgender Tabelle:

n	Gesamtlänge Berührkanten $4\cdot\tan\frac{180^\circ}{n}$	Ecken-winkel $(\frac{1}{2}-\frac{1}{n})\cdot 360^\circ$	Angriffs-winkel $(\frac{1}{2}+\frac{1}{n})\cdot 360^\circ$	Dreh-winkel $\frac{360^\circ}{n}$	maximaler Durchmesser $\frac{2}{\cos(180^\circ/n)}$	Fläche $n\cdot\tan\frac{180^\circ}{n}$
4	4	90°	270°	90°	2,83	4
6	2,31	120°	240°	60°	2,31	3,46
8	1,66	135°	225°	45°	2,16	3,31

Tab.1

Alle drei Formen kommen in der Praxis vor.

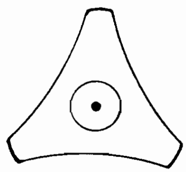


Abb.95 Wasserhahn

Für die Form von Wasserhähnen treffen die Überlegungen, die bei der Schraubenmutter angestellt wurden, gerade nicht zu: Die Hähne sind i.a. leicht zugänglich, können daher größere Ausmaße haben und müssen nicht allzu fest verschlossen werden, so daß man keinen zusätzlichen Hebel braucht, sondern es reicht, wenn man drei Finger der Hand von oben ansetzt.

In den USA werden Hydranten dadurch vor Mißbrauch geschützt, daß die Verschlußköpfe einen (regelmäßigen) fünfeckigen Querschnitt erhalten und so nur mit Spezialschlüsseln geöffnet werden können.

Noch größere Sicherheit bieten solche Verschlüsse, wenn ihr Rand nach außen gewölbt ist, etwa wie der Läufer beim Wankelmotor (vgl. Abb.25). Da hat ein gewöhnlicher Maulschlüssel keinen Ansatzpunkt mehr. Für eine gute Hebelwirkung

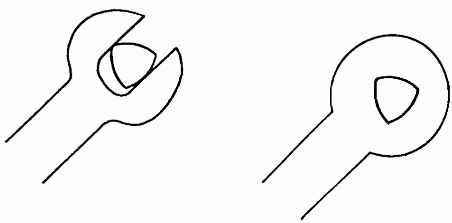


Abb.96 Reuleaux-Scheibe als Mutter

des Spezialschlüssels ist eine niedrigere Eckenzahl erforderlich (z.B. ist 3 besser als 5). Nach Moulton (1974) werden z.B. in Philadelphia (USA) die Verschlußköpfe an den Hydranten sogar als Reuleaux-Dreiecke (vgl. 2.3.11) ausgebildet.

Sie sind damit ein Spezialfall der in Abb.93 beschriebenen 'ungeeigneten' Schraubenmuttern mit Paaren konzentrischer Kreisbögen als Rand, nämlich mit verschwindendem Radius des jeweils kleineren Bogens. Ein kreisförmiger Querschnitt wiederum wäre eine zu weit gehende Erschwernis: Wegen der vollkommenen Homogenität der Kreisform würden noch nicht einmal Spezialschlüssel greifen.

Ähnliche Berechnungen (wie in Tab.1) braucht man auch bei der Untersuchung der Standfestigkeit vier- bzw. fünfbeiniger Bürostühle. Damit die Stühle nicht zu sperrig geraten, darf die Standfläche, genauer: der Umkreis durch die Auflagepunkte (der wegen der Drehsymmetrie existiert), nicht zu groß werden. Sei dieser fest vorgegeben. Die Standfläche des Stuhles ist die konvexe Hülle der Auflagepunkte, also bei n Füßen ein regelmäßiges n-Eck. Befindet sich nun der Schwerpunkt über dieser Fläche, so steht der Stuhl; anderenfalls fällt er um. Drehstühle sind dann unpraktisch, wenn es kurze Strecken vom Mittelpunkt zum Rand der Standfläche gibt, d.h. wenn der Inkreisradius der Standfläche klein ist (wie in Abb.97a,b).

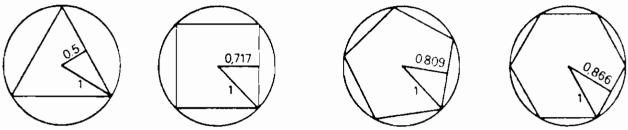


Abb.97 a b c d

Rechtecke

Haarföne erzielen eine gute Wirkung, wenn ihre Düse ein länglicher, nicht zu schmaler Schlitz ist. Je nach dem, ob man das Haar längs oder quer zu diesem Schlitz fönen will (mit schmaler oder breiter überstrichener Fläche), muß man das Gerät umständlich in verschiedene Positionen bringen, in denen es zudem mehr Kraft zum Halten fordert und schlechter kontrolliert werden kann. Es gibt nun Föne, deren Düse abnehmbar ist und auf zwei verschiedene Arten aufgesetzt werden kann, so daß jeweils der Schlitz in die gewünschte Richtung zeigt, während sich das Gerät bequem halten läßt (Abb.98).

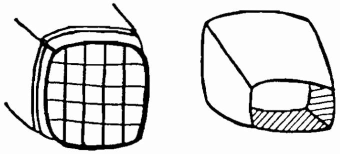


Abb.98

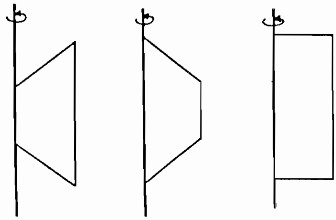


Abb.99

Das Föngehäuse und der Aufsatz müssen da, wo sie zusammengesteckt werden, drehsymmetrisch (mindestens) von der Ordnung 4 sein; diese Teile werden als Quadrate (mit abgerundeten Ecken) geformt. Die Formen würden auch mit höheren Drehsymmetrien funktionieren, etwa als Kreise; die Quadratform ist aber am einfachsten herzustellen, und mehr als zwei Richtungen werden i.a. auch nicht gebraucht.

Die Tatsache, daß regelmäßige n-Ecke auch spiegelsymmetrisch an n Achsen sind, ist in der Praxis so lange bedeutungslos, wie man die n-Ecke nicht als Oberflächenteile räumlicher Körper betrachtet. Denn die Spiegelsymmetrie läßt sich nicht durch eine Bewegung in der Polygonebene realisieren, sondern nur als Achsendrehung im Raum.

Für viele Rechtecke ist dagegen weniger ihre Drehsymmetrie wesentlich als die Eigenschaft, Schnittfläche zweier zueinander orthogonaler Parallelenstreifen (und damit zweifach spiegelsymmetrisch) zu sein. Sie sind Seitenflächen von Körpern mit drei parallelen Seitenpaaren, die senkrecht aufeinander stehen, nämlich Quadern, die ins Schwerefeld passen.

Textilien sind nach Möglichkeit rechteckig (nicht Hemd, Jacke oder Hose, sondern Handtuch, Taschentuch oder Bettlaken). Sie werden in Bahnen hergestellt und sind auch im Gebrauch praktischer, z.B. können sie besser zum Trocknen aufgehängt werden.

Bei den meisten Fenstern, Türen, Buchdeckeln und -seiten ist die mit der Drehachse zusammenfallende Seite möglichst lang, wenn auch nicht länger als nötig. Auf solche Weise können etwa die Scharniere weit auseinander liegen und das eine recht hoch angesetzt werden (Abb.99).

Bei einem Buch ist ein längerer Rücken für das Binden besser geeignet. Darüber hinaus passen rechteckige Fenster, Türen, Bilderrahmen, Fußballtore usw. in das Schwerefeld. Bücher sind dem Satzspiegel angepaßt, der im Prinzip rechteckig ist. Auch Gummiauflagen für Schreibtischplatten werden diesen in ihrer Rechteckform angeglichen.

Das Quadrat kommt in der Praxis seltener vor. Die beiden Richtungen an Rechtecken sind nämlich meistens nicht gleichberechtigt. Sie sind gelegentlich Vertikale und Horizontale im Schwerkraftfeld, deren Längen fast nichts miteinander zu tun haben. Ein Schreibtisch ist i.a. breiter als tief, da so eine größere Platte von einem Platz aus erreicht werden kann als bei quadratischer Form (Abb.100). Eine Spalte in der Zeitung ist viel schmäler als lang, weil es dem Leser leichter fällt, kurze Zeilen im Blick zu behalten. Ein Papierbogen im DIN-Format hat ein solches Seitenverhältnis, daß eine durch die kürzere Spiegelachse festgelegte Hälfte wieder dasselbe Seitenverhältnis hat.

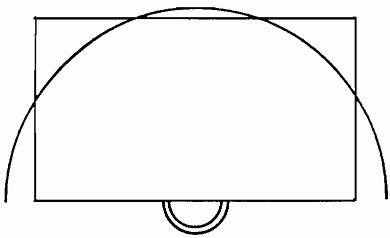


Abb.100

Obwohl die Rechteckform so gut ins Schwerefeld paßt, ist sie, jedenfalls als Kanten- und nicht als Vollmodell, nur so stabil wie die Verbindung der Seiten an den Ecken. Es nützt auch nichts, wenn noch parallele Querstreben eingebaut werden. Solche Querstreben, die man 'Zweiecke' nennen könnte, dienen zwar dazu, Abstände konstant zu halten, z.B. als Pfähle unter Pfahlhäusern, Querstreben in Gräben mit senkrechten Wänden, Abschleppstangen, Schwellen von Eisenbahnschienen, Seiten an Polygonen; sie allein halten aber nicht Winkel konstant,

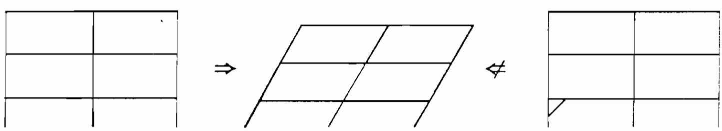


Abb.101

jedenfalls nicht, wenn sie in ein Parallelogramm parallel zu den Seiten eingebaut sind. Man muß sie vielmehr schräg einbauen, nämlich so, daß Dreiecke entstehen.

Dreiecke

Zum Stabilisieren von Baukonstruktionen werden dreieckige Teile eingefügt - an Regalen, Fachwerkhäusern, Eisenbahnbrücken, Masten, Zeltwänden, Zeltverspannungen usw. Den begrifflichen Hintergrund stellen die Kongruenzsätze dar, speziell die bis auf Kongruenz eindeutige Bestimmtheit eines Dreiecks durch die drei Seitenlängen. Beim Bauen mit Metallbaukästen lernen Schüler schon auf der Primarstufe diesen Stabilisierungseffekt kennen. Aus Strohhalmen und Bindfäden läßt sich möglicherweise das Kantenmodell eines Tetraeders, nicht aber das eines Würfels bauen. Wie kann man solche Stabilitätsfragen mit Hilfe der Kongruenzsätze angehen? - Ein aus starren Teilen zusammengesetzter Körper ist instabil, wenn diese Teile gegeneinander beweglich sind (Zollstock, Drehstuhl, Klappfenster). Wenn die Verbindung der Teile (Gelenke, Lager, Schrauben, Leim, Schweißnähte) nicht ganz gelöst werden, müssen sich Winkel ändern. Fügt man starre Teile so zusammen, daß sie ein Dreieck bilden, so sind keine Winkeländerungen möglich.

Bei dem in Abb.101a skizzierten Regal z.B. würde der Einbau bereits eines Dreiecks (theoretisch) die Stabilität erzwingen: Abb.101c. Das beruht auf dem Satz, wonach ein Viereck, bei dem einander gegenüberliegende Seiten gleich lang sind, ein Parallelogramm ist, d.h. die entsprechenden Seiten auch parallel sind. Bei jeder Verformung (im obigen Sinn) des Regals bleiben also die senkrechten Stützen untereinander und die waagerechten Auflagebretter untereinander parallel. Die Richtung aller Stützen und die Richtung aller Auflagen ist durch je eine beliebige unter ihnen bereits bestimmt. Das eingebaute Dreieck verbindet eine Stütze mit einer Auflage starr und legt somit die (relativen) Richtungen aller Stützen und aller Auflagen fest.

Ein wichtiger Aspekt der Kongruenzsätze für Dreiecke ist, daß sie für n-Ecke mit größerer Eckenzahl nicht gelten (d.h. nicht in der Form, daß mit n Seitenlängen das n-Eck festliege; man braucht vielmehr $2n-3$ bestimmende Stücke, und $n=3$ ist die einzige Lösung der Gleichung $2n-3=n$). Die Instabilität von n-Ecken für $n>3$ ist jedoch nicht nur ein Mangel, dem durch geeignete Konstruktionen abgeholfen werden müßte, sie kann sich auch als nützlich erweisen. Hier sind einige Beispiele:

- Parallelogramme bei der Geradführung an Ablagekästen, Parallelenlineal, Tafelwaage, Briefwaage, Nürnberger Schere.

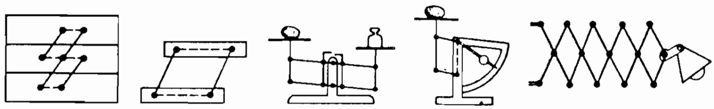


Abb.102

- Drachenvierecke zum Umwandeln einer Bewegungs- bzw. Kraftrichtung in eine dazu senkrechte an Wagenhebern, oder auch an Stromabnehmern bei E-Loks (die aber, genau genommen, spiegelsymmetrische Fünfecke sind).

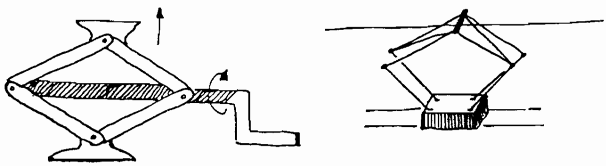


Abb.103

- Allgemeine Gelenkvierecke zum Umwandeln einer Kreisbewegung in (geradlinige) Schwingungen und umgekehrt (bei der Pumpe, bei der Dampflokomotive, wenigstens noch bei der Modelleisenbahn, beim Ottomotor) oder in kreisförmige Schwingungen (z.B. beim Scheibenwischermodell in Abb.24).

Zurück zum Dreieck: In Schulbüchern findet man ab und zu Bilder mit umweltlichen Situationen, in denen Dreiecke vorkommen: Verkehrszeichen, Hausgiebel, Turmspitzen. - Die Dreieckigkeit von Verkehrszeichen hat offenbar keine geometrische Funktion; es handelt sich um willkürliche Symbole. Funktional ist bestenfalls die Symmetrie bezüglich der senkrechten Achse. Auf Autobahnen werden solche Schilder aufgestellt - unter ihnen auch rechteckige oder kreisförmige - deren Symmetriehälften durch Scharniere verbunden sind und aufeinandergeklappt werden können. Auf diese Weise lassen sie sich als amtliche Verkehrszeichen beliebig in und außer Kraft setzen.

An Dächern, Rampen, Keilen, Schnappschlössern, an Turm-, Pfahl-, Pfeil-, Nagelspitzen oder auch an Schuttkegeln ist die Dreiecksform wesentlich für das Prinzip der schiefen Ebene. Das Dreieck tritt dabei als Grundfläche eines

Prismas oder als Querschnitt eines Kegels auf und ist meist rechtwinklig oder gleichschenklig.

Beim Schließen einer Tür wird das Schnappschloß senkrecht zur Bewegung der Tür an seiner schiefen Ebene eingedrückt. Es springt wieder nach vorn (infolge einer Federkraft), sobald es die Lücke im Türrahmen erreicht hat. Gegen eine Öffnung der Tür leistet es nun mit einer zur gewünschten Bewegung senkrechten Fläche Widerstand (Abb.104a).

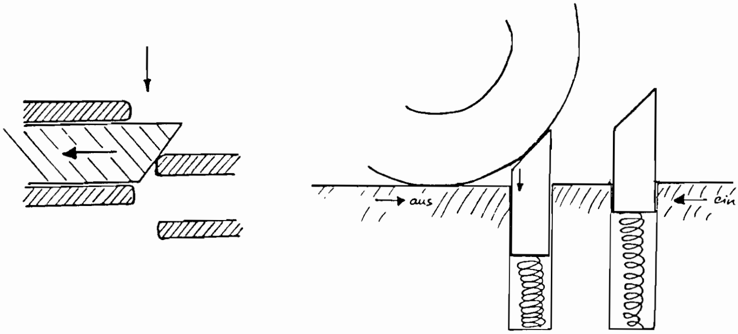
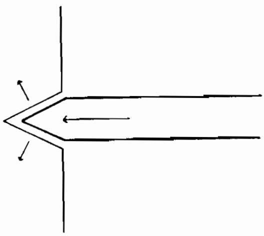


Abb.104 a b

Genau nach diesem Prinzip funktionieren gewisse Einfahrsperren an Grundstückausfahrten (Abb.104b): Quer über die Fahrbahn sind zahlreiche Stahlkeile in den Boden eingelassen. Zum Grundstückinnern hin verlaufen ihre Flächen schräg, zum Äußeren hin verlaufen sie senkrecht zum Boden. Sie sind senkrecht zu diesem beweglich und werden durch Federn nach oben gedrückt. Kommt ein Wagen vom Grundstückinneren, so drückt er die Keile an ihrer schiefen Ebene nach unten, und nachdem er gefahrlos passiert ist, schnellen sie wieder hoch. Kommt dagegen ein Wagen von außen, so sind für ihn die Keile unbeweglich, und es werden ihm unweigerlich die Reifen aufgeschlitzt.



Das Eindringen eines harten Gegenstands in einen anderen wird mit einer Spitze erleichtert. Durch diese entsteht ein großer Druck, und das nachfolgende Dreieck (Prisma, Kegel) weitet die Öffnung stetig.

Abb.105

Das gleichschenklige Dreieck (auch als Pfeilspitze) verwendet man daher auch als Symbol für eine Richtung.

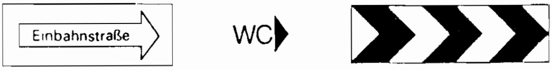


Abb.106

Das gleichseitige Dreieck gibt es an Wasserhähnen oder als Querschnitt bei dicken Kugelschreibern. Beide Formen sind der menschlichen Hand angepaßt, sie haben je einen Ansatzpunkt für Daumen, Zeige- und Mittelfinger. Die Drehsymmetrie ermöglicht den Zugriff in mehreren Stellungen.

Das wichtigste unter den besonderen Dreiecken ist das rechtwinklige. Mit seiner Hilfe werden viele Berechnungen durchgeführt, es ist ja ein halbes Rechteck und hat die Pythagoras-Eigenschaft. Dieses Stück der Geometrie wird im Schulunterricht intensiv behandelt, so daß wir auf ausführliche Erörterungen verzichten können. Wir wollen lediglich auf die Berechnung der Länge der Schraubenlinie in 2.3.6 als ein Anwendungsbeispiel hinweisen.

Woran es im Unterricht häufig mangelt, ist die Arbeit vor Ort: Messungen im Gelände und Berechnungen unzugänglicher Größen, z.B.: Wieviel Weg würde man sparen, wenn man quer über ein rechteckiges Rasenstück ginge, dessen Betreten verboten ist, statt außen herum zu gehen? Dazu natürlich die üblichen Beispiele, von denen man zahlreiche in Perelmann (1954) findet: Flußbreite, Gebäudehöhe, Baumumfang usw. sollen praktisch, am Objekt, ermittelt werden. Gewiß kostet das Zeit. Aber es ließe sich ja einmal ein Unterrichtsgang (Wandertag) diesem Thema widmen. Die dabei auftretenden 'lästigen' numerischen Rechnungen sind mit dem Taschenrechner mühelos zu erledigen.

Von den besonderen Punkten und Transversalen im Dreieck haben vor allem der Schwerpunkt und die Höhe besondere Bedeutung. Letztere teilt das Dreieck in zwei rechtwinklige; mit ihr und einer Grundseite wird die Fläche berechnet. Gewiß könnte man auch Aufgaben über den Umkreismittelpunkt in eine 'angewandte' Form kleiden, etwa: Für drei Gemeinden A, B, C soll ein gemeinsames Elektrizitätwerk gebaut werden, das von allen dreien gleich weit entfernt ist - aber diese Forderung ist nicht sehr sinnvoll (vgl. dazu 2.2.5).

Parkettierungen

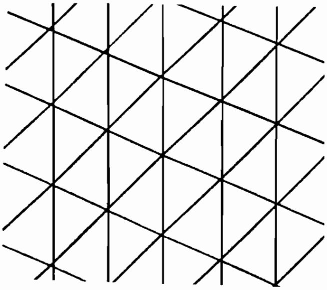


Abb.107

Mit einem beliebigen Dreieck läßt sich die Ebene parkettieren. Da die Winkelsumme im Dreieck 180° (ein halber Vollwinkel) ist, muß der Stern einer jeden Ecke (bestehend aus allen Flächen, die an diese Ecke stoßen) genau sechs Exemplare des Dreiecks enthalten, und zwar so, daß jeder Winkel zweimal vorkommt.

Auch mit einem beliebigen Viereck kann die Ebene parkettiert werden, weil die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt. Ein Stern besteht aus vier Flächen, die je einen der vier Winkel des Vierecks zur Ausfüllung des Sterns beitragen. Da zwei Vierecke nur an gleichlangen Kanten aufeinanderstoßen dürfen, liegt jedenfalls beim allgemeinen Viereck mit der Lage einer Fläche das ganze Parkett fest. Dabei sind alle Vierecke gleich orientiert.

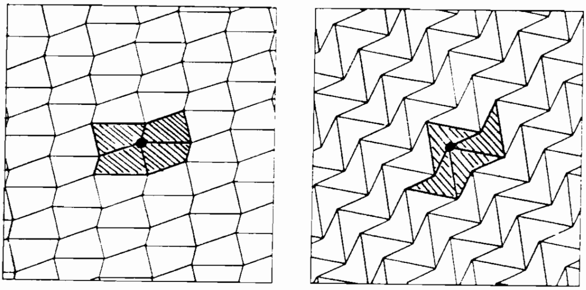


Abb.108

Hat ein Polygon größere Eckenzahl als vier, so kann nur in Spezialfällen die Ebene parkettiert werden (siehe z.B. Abb.112). Wenn man mehrere Sorten

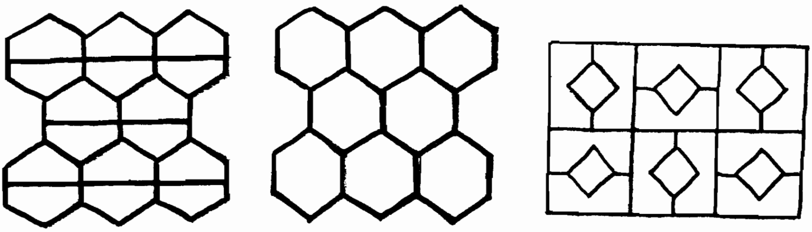


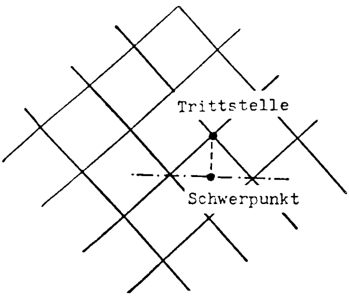
Abb.109 a b c

Flächen zuläßt, steigt die Zahl der Möglichkeiten erheblich (in Abb.109c kommen Sieben- und Vierecke vor; siehe auch Abb.168).

Parkettierungen sind von großem didaktischen Wert. Er liegt in ihrer leichten Herstellbarkeit aus bereits geometrisiertem Material und in der unmittelbaren Veranschaulichung der Funktion des Passens. Man kommt nicht umhin, ein Polygon mit seinen Winkeln im Zusammenhang mit anderen und deren Winkeln zu sehen, etwa bei der Ermittlung aller archimedischen Parkette. Dabei werden die Winkelsätze für (regelmäßige) Polygone - endlich einmal - über ihre bloße Aufstellung hinaus gebraucht.

Die in der Praxis am weitesten verbreitete Parkettierung ist die mit Rechtecken. Einmal natürlich wegen der wichtigen Rechtecksform selbst; dann aber auch, weil beim Parkettieren mit wenigen geraden Linien eine sehr feine Einteilung entsteht (Karomuster auf Papier, Aufteilung eines flachen Teigs, Zuschneiden von Papier).

Zur Pflasterung von Bürgersteigen verwendete man früher häufig quadratische Platten. Deren Nachteil ist jedoch, daß sie ausgeprägte Unebenheiten erzeugen, wenn sie sich etwa durch Frost gelockert haben: Jedesmal wenn ein Passant auf eine Ecke einer Platte tritt, wirkt ein Drehmoment. Der Untergrund wird weggedrückt, die Platte gibt mit jedem Tritt mehr nach und vollführt schließlich kleine Drehungen (Abb.110).



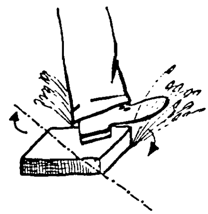


Abb.110 a b

Dabei entsteht an der Trittstelle eine Vertiefung im Bürgersteig, und die Platte steht an ihrer gegenüberliegenden Seite über und bildet eine Stolperecke. (Solche Löcher im Untergrund können auch an anderen Stellen einer Platte entstehen, und bei der Bewegung muß der Schwerpunkt nicht Fixpunkt sein.) Wenn aber das Loch unter einer Ecke entsteht, der Schwerpunkt gut unterstützt ist und die drei anderen Platten, die an diese Ecke stoßen, ebenfalls locker sind, dann werden die Unebenheiten besonders ausgeprägt wegen des langen Hebelarms von der Trittstelle bis zum Schwerpunkt.

Diese Mängel können (geometrisch) auf verschiedene Arten beseitigt werden: a) Man verwendet kleinere Platten, was aber mehr Arbeit beim Plattenlegen erfordert. b) Man setzt die Platten auf Fuge wie Ziegelsteine beim Mauern.

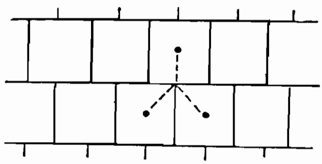


Abb.111

Jede Ecke einer jeden Platte liegt an der Seitenmitte einer anderen Platte, deren Hebelarm nur $\sqrt{2}/2$-mal, also ca. 0,7-mal so lang ist wie der zwischen Ecke und Schwerpunkt; infolgedessen fallen die Unebenheiten auch kleiner aus. c) Man verwendet für die Steine andere Formen, z.B. die in Abb.112. Dabei weicht man von der konvexen Form ab, weil nicht die Stabilität des einzelnen Steins, sondern die des ganzen Verbundes entscheidend ist.

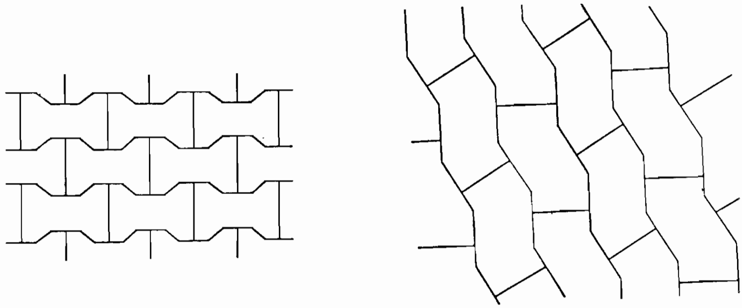


Abb.112 a b

Allerdings sind diese Steine deutlich kleiner als die besprochenen quadratischen und sind auch deswegen kleineren Drehmomenten unterworfen. (Man überlege sich einmal bei der Form in Abb.112a, wie Winkel und Seitenlängen variiert werden können, ohne daß ihre wesentlichen Eigenschaften verloren gehen, nämlich: ein Zwölfeck zu sein, die Ebene in der in der Skizze angegebenen Art zu parkettieren, und als Symmetriegruppe die Diedergruppe mit vier Elementen (Kleinsche Vierergruppe) zu haben.)

Die Parkettierung mit regelmäßigen Sechsecken wird von zahlreichen Verkehrsbetrieben bei der Aufteilung in Tarifgebiete zugrunde gelegt (z.B. in Wuppertal, nach Müller/Wittmann (1977, S.286f), und vielen anderen Städten). Da das regelmäßige Sechseck die 'kreisähnlichste' Figur ist, mit der die Ebene parkettiert werden kann, verspricht man sich von einer solchen Einteilung eine größere Tarifgerechtigkeit.

2.3.9. Polyeder

Wie schon erwähnt, setzen sich die Eigenschaften vieler Polyeder aus solchen eines polygonalen Querschnitts und ihrer jeweiligen Prismen-, Pyramiden- oder Pyramidenstumpfform zusammen. Insbesondere sind ihre Symmetriegruppen von der ihrer Polygone nicht wesentlich verschieden: beim Prisma sind sie gleich, und sonst sind sie i.a. Untergruppen vom Index 2. Wir haben schon 'echte' Polyeder kennengelernt, etwa den Quader, der zwar auch ein Prisma ist (aber ein besonderes, denn jede seiner Seitenflächen kann als Grundfläche aufgefaßt werden); oder das Rhombendodekaeder, das sich bei Bienenwaben findet (und mit dem man sogar den Raum parkettieren kann).

Im folgenden wollen wir die Oberfläche des derzeit allgemein verwendeten Fußballs analysieren.

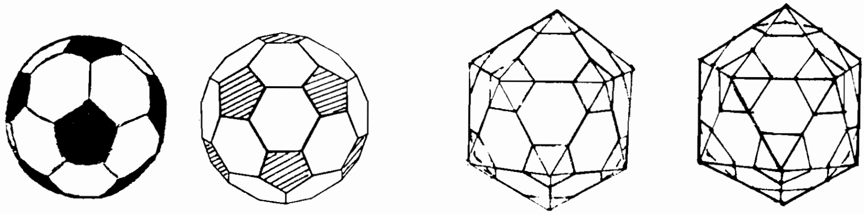


Abb.113 a b c d

Bekanntlich handelt es sich dabei um den archimedischen Körper, dessen Sterne (Polygone um eine Ecke) aus einem Fünfeck und zwei Sechsecken bestehen. Wir bezeichnen ihn kurz mit (5 6 6) , entsprechend der für jede Ecke gleichen Aufreihung ihrer Polygone.

Man stelle sich einmal ein Spiel nach Fußballregeln mit einem Rugby-Ball (Abb.167h) vor. Für Rugby ist diese Form natürlich sinnvoll: er darf getragen und aus der Hand abgeschossen werden und trifft selten den Boden. Zum Wesen des Fußballs gehört hingegen die Kugelform des Balls - nach Sepp Herbergers Motto "Der Ball ist rund". Aus praktischen Gründen ist der Ball eine luftgefüllte Hohlkugel aus elastischem, empfindlichem Material (Blase), die durch einen Überzug aus Leder geschützt ist. Im folgenden geht es um die (geometrische) Herstellung dieses Überzugs.

Wie wir wissen, kann er nicht aus einem einzigen flachen Lederstück hergestellt werden. Man behilft sich, indem man die Oberfläche als Polyeder stukturiert und den Überzug entsprechend dieser Stuktur aus kleineren flachen Stücken zusammennäht, denen beim Aufpumpen des Balls dank ihrer Elastizität noch etwas Krümmung verliehen wird. Schmale Polygone, lange Nähte und Stellen, an denen viele Nähte zusammenlaufen, sind besonders empfindlich und daher zu vermeiden. Am besten wäre es, kreisförmige Lederstücke zu verwenden, möglichst alle von gleicher Größe; in einem Punkt sollten ferner nicht mehr als drei Nähte zusammenlaufen. Da diese Forderung so nicht realisierbar ist, schränkt man sie darauf ein, regelmäßige n-Ecke zu verwenden, für die n möglichst groß ist und möglichst wenig variiert. Dahinter stecken folgende geometrische Sachverhalte: Die Schnittlinie zweier nicht paralleler Ebenen ist eine Gerade, also müssen die Ränder der Lederstücke stückweise geradlinig sein. Für jedes n hat das regelmäßige unter allen n-Ecken die flachsten Ecken, denn die Winkelsumme im n-Eck ist $(n-2)\cdot 180°$, der kleinste Winkel beim regelmäßigen n-Eck ist $180°-360°/n$, bei jedem anderen n-Eck ist er kleiner. Entsprechend hat das regelmäßige n-Eck bei gegebenem Flächeninhalt den kleinsten Umfang. Mit wachsender Eckenzahl werden die Ecken flacher und der Umfang kleiner. Nun ist eine Ecke im Raum nicht schon durch zwei, sondern erst durch mindestens drei Ebenen bestimmt. Auch hat der Ball beschränkten Durchmesser; also muß es Stellen geben, an denen drei Flächen und damit drei Nähte zusammenstoßen.

Bei gegebenem Durchmesser des Balls sollen die Lederstücke möglichst klein sein, damit der Neigungswinkel zweier Stücke möglichst klein und die Form dadurch möglichst kugelähnlich wird. Andererseits dürfen die Stücke auch nicht zu klein ausfallen, damit die Gesamtlänge der Nähte nicht zu groß wird. Da physikalische Belastungen auf alle Stellen der Oberfläche mit gleicher Wahrscheinlichkeit einwirken, sollen die Stellen natürlich möglichst ununterscheidbar sein. Bei der Polyederstruktur mit Ecken, Kanten und Flächen bedeutet das: gleiche Form aller Sterne, gleiche Länge aller Kanten und (fast) gleiche Eckenzahl aller Polygone; oder kurz: die Symmetriegruppe soll möglichst groß sein. Wegen der Polyederstruktur ist sie endlich; in Frage kommt die Ikosaedergruppe.

Nach diesen theoretischen, mehr qualitativen Vorüberlegungen nun zur praktischen Durchführung: Beim ebenen Parkettieren stellt man fest, daß nur für $n=3,4,6$ Parkette mit regelmäßigen n-Ecken gebildet werden können. In einer Ecke müssen mindestens drei n-Ecke zusammenstoßen; bei drei Fünfecken klafft eine Lücke, und vier oder mehr Fünfecke oder drei oder mehr n-Ecke mit $n > 6$ überlappen sich. Nur für $n=3,4,6$ ist der Vollwinkel $360°$ ein ganzzahliges Vielfaches des n-Eck-Winkels. Die Lücke beim Fünfeck beträgt $360° - 3\cdot(180° - 360°/5) = 36°$.

Schneidet man die Fünfeckskonfiguration in Abb.114 aus, hält das mittlere Fünfeck fest und klappt die beiden anderen an ihren Berührkanten zum mittleren gleichmäßig hoch, so stoßen plötzlich auch diese beiden an einer Kante zusammen - die Parkettierung ist gelungen! Allerdings nicht in der Ebene, sondern im Raum; jedenfalls: der allen drei Fünfecken gemeinsame Punkt liegt nicht mehr am Rand, er liegt in der Mitte der Fläche.- Wie diese Konstruktion auf beliebige n-Ecke verallgemeinert werden kann, ist in Bender (1978, S.69) ausgeführt.

Zurück zu den Fünfecken. Heftet man fünf Fünfecke an die Seiten eines sechsten Fünfecks (alle regelmäßig und untereinander kongruent) und klappt man die äußeren Fünfecke hoch, so entsteht eine Schale, die drehsymmetrisch von der Ordnung 5 ist. Und setzt man eine zweite solche Schale mit dem Boden nach oben passend auf die erste, dann hat man ein Dodekaeder gebaut. Man kann noch die beiden Schalen an einer Kante identifizieren und erhält das Schnittmuster von Abb.115c.

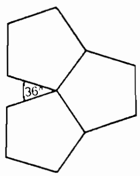


Abb.114

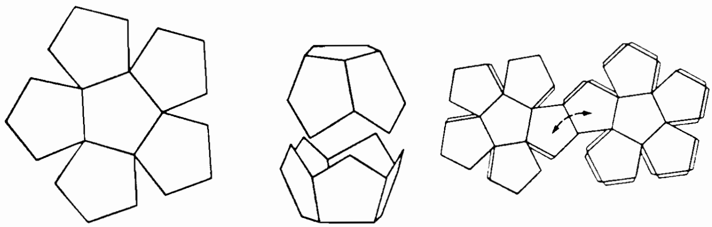


Abb.115 a b c

Bei der Konstruktion werden nur kongruente regelmäßige Fünfecke verwendet. Nach den Überlegungen über Paßlagen im Raum gibt es für je drei Fünfecke nur eine Paßlage, d.h. alle Sterne an dem gebauten Körper sind kongruent. Man hat zwar mit Hilfe der beiden Schalen das Dodekaeder eigenhändig gebaut. Es könnte aber sein, daß man dabei die Fünfecke ein wenig zu nichtebenen Flächen verformt hat. Für den mathematischen Nachweis, daß die beiden Schalen genau ineinander passen, bedarf es eines (nicht sehr tief liegenden, aber dennoch) sorgfältigen Einsatzes von Symmetrie- oder Winkelargumenten.

Wählt man nun statt Fünfecken drei kongruente regelmäßige Drei- oder Vierecke für einen Stern, so entstehen Tetraeder und Würfel. - Gibt es noch andere Möglichkeiten? - Andere n-Ecke können nicht genommen werden, weil ihre Winkel zu groß sind. - Können auch mehr als drei n-Ecke in einer Ecke zusammenstoßen? Vier- oder Fünfecke nehmen schon zu viel Winkelraum ein, aber mit Dreiecken geht es, sogar mit den beiden Möglichkeiten 4 und 5 . Damit ist bewiesen, daß es genau fünf platonische Körper (reguläre konvexe Polyeder) gibt. Beim weiteren Umgang mit ihnen muß die bei der Herstellung benötigte Sonderrolle gewisser Ecken oder Flächen beseitigt werden. Ist die Herstellung sauber genug, geschieht das von selbst, und das Bewußtmachen der Gleichberechtigung aller Ecken ist Ausgangspunkt für Symmetriebetrachtungen.

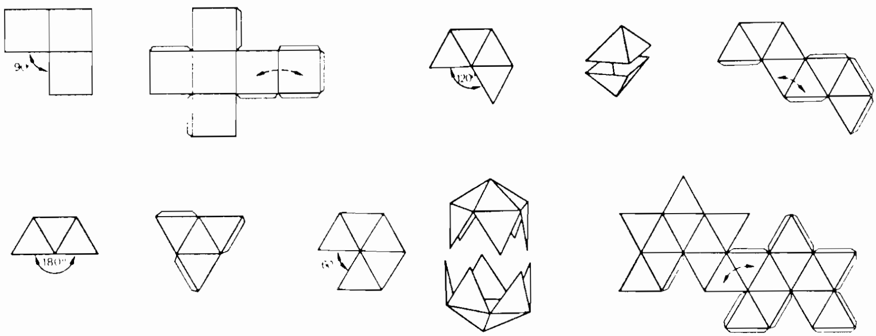


Abb.116

Als Oberfläche für den Fußball scheinen die platonischen Körper sämtlich nicht sehr gut geeignet, sie ähneln einfach zu wenig einer Kugel. Als Gütemaß könnte man z.B. den Quotienten $(\text{Oberfläche})^3/(\text{Volumen})^2$ nehmen, für unsere Zwecke günstiger ist der Neigungswinkel zweier Flächen oder einer Kante gegen die ihr an einer Ecke gegenüberliegende Fläche (beim Oktaeder ist es eine Kante). Dieser Neigungswinkel läßt sich unter Rückgriff auf die Herstellung berechnen (siehe Bender (1978), S.72f). Für das Ikosaeder beträgt der Winkel zwischen zwei Flächen 138,2° , für das Dodekaeder 116,6° . Man kann diese Winkel auch einfach messen: Dazu legt man den Körper auf eine Ebene und mißt den Nebenwinkel des gesuchten Winkels. Beim Ikosaeder sind die Kanten zwar flacher, die Ecken jedoch spitzer, und außerdem laufen bei ihm in jeder Ecke fünf Nähte zusammen. Daher erscheinen Dodekaeder und Ikosaeder nicht geeignet, von den 'kleineren' platonischen Körpern ganz zu schweigen.

Man kann nun versuchen, Neigungswinkel dadurch zu vergrößern, daß man an einer Ecke drei Polygone zusammenstoßen läßt, deren ebenes Netz eine kleinere Lücke hat: man nehme z.B. zwei Sechsecke und ein Fünfeck, wo die Lücke nur 12° beträgt (Abb.117). Allerdings kann dann kein platonischer Körper mehr entstehen. Um aber eine möglichst große Symmetrie zu erreichen, könnte man zunächst einmal fordern: Wenn schon verschiedenartige Polygone vorkommen, dann aber nur regelmäßige, und außerdem sollen nach wie vor alle Sterne kongruent sein. Beides zusammen kennzeichnet den sog. archimedischen Körper. Für unser Beispiel bedeutet dies, daß an jeder Ecke zwei Sechsecke und ein Fünfeck zusammenstoßen.

Welche Kombinationen von Polygonen könnten überhaupt noch in Frage kommen? - In jeder Ecke müssen mindestens drei Polygone zusammenstoßen, und die Summe der Winkel in einer Ecke muß kleiner als 360° sein. Man braucht die Winkel der regelmäßigen Polygone:

Eckenanzahl	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	15
Winkel in °	60	90	108	120	$128\frac{4}{7}$	135	140	144	$147\frac{3}{11}$	150	156

Eckenanzahl	18	20	24	30	36	40	45	60	72	90	120	180	360
Winkel in °	160	162	165	168	170	171	172	174	175	176	177	178	179

Tab.2

Zunächst betrachten wir den Fall, daß an einer Ecke nur drei Polygone zusammenstoßen mit den Eckenanzahlen m, n und p. Da an jeder Ecke (bis auf Symmetrie) dieselbe Anordnung von Polygonen vorliegen muß, müssen sich um jedes m-Eck abwechselnd n- und p-Ecke aufreihen (entsprechend um jedes n-Eck m- und p-Ecke und um jedes p-Eck m- und n-Ecke).

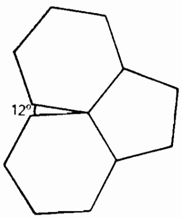


Abb.117 Parkettierung mit Fünfeck und zwei Sechsecken

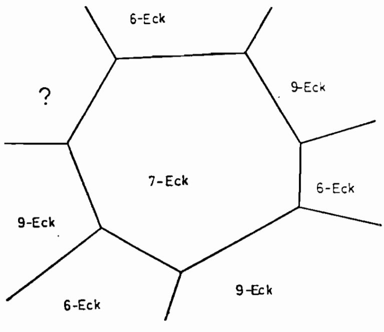


Abb.118 Kranz um ungeradzahliges Polygon

Bei ungeradem m (bzw. n bzw. p) muß dann also n=p (bzw. m=p oder n=m) sein. Mit Hilfe von Winkelbetrachtungen kann man zeigen, daß nur die Möglichkeiten (3 3 3), (3 6 6), (3 8 8), (3 10 10), (4 4 n) mit n=3,4,5,... (Prismen), (4 6 6), (4 6 8), (4 6 10), (5 5 5), (5 6 6) existieren. Entsprechend findet man auch die archimedischen Körper mit mehr als drei Polygonen an einer mehr als drei Polygonen an einer Ecke: An jede Ecke muß mindestens ein Dreieck stoßen, und es ergeben sich (3 3 3 n) mit n=3,4,5,... (Antiprismen), (3 4 3 4), (3 4 4 4), (3 4 5 4), (3 5 3 5), (3 3 3 3 3), (3 3 3 3 4), (3 3 3 3 5). Zwar gibt es für einen einzelnen Stern noch mehr Möglichkeiten; diese lassen sich jedoch nicht zur Oberfläche eines archimedischen Körpers fortsetzen, wie man mit einfachen kombinatorischen Überlegungen über eines der vorkommenden Dreiecke und seine drei Ecken mit ihren Sternen verifiziert. Alle aufgezählten Kombinationen dagegen können als archimedische Körper realisiert werden. Eine Auswahl zeigen die Abbildungen 113, 115, 116, 125a, 171.

Mit den prinzipiell gleichen Überlegungen findet man auch alle ebenen archimedischen Parkette; der Unterschied ist lediglich, daß die Winkelmaßsumme an einer Ecke nicht weniger als $360°$, sondern genau $360°$ beträgt. Es gibt genau die Parkette (3 12 12), (4 6 12), (4 8 8), (6 6 6), (3 4 6 4), (3 6 3 6), (4 4 4 4), (3 3 3 3 6), (3 3 3 4 4), (3 3 4 3 4), (3 3 3 3 3 3) (vgl. Abbildungen 107, 109b, 110a, 168).

Statt der Winkelbetrachtungen hätte man auch sofort topologische Überlegungen, etwa den Eulerschen Polyedersatz einsetzen können, um gewisse n-Eck-Variationen auszuscheiden. Beispiel: Eine zur Kugel homöomorphe Oberfläche kann nicht mit lauter Sechsecken parkettiert werden. Denn hätte sie f Sechsecke, dann hätte sie genau $k=6f/2$ Kanten und höchstens $e=6f/3$ Ecken, so daß $f+e-k \leq 0$ wäre, obwohl nach dem erwähnten Satz $f+e-k=2$ sein muß.

Alle archimedischen Körper außer Prismen und Antiprismen kann man dadurch herstellen, daß man an platonischen Körpern Ecken oder Kanten geeignet abschneidet. Die Symmetriegruppe bleibt dabei jeweils erhalten. Beim Ikosaeder kann man die Ecken so abschneiden, daß alle entstehenden Kanten gleich lang sind und aus den Dreiecken Sechsecke und aus den Ecken Fünfecke werden (siehe Abb.113c). Man kann also getrost aus je zwei Sechsecken und einem Fünfeck Eckenumgebungen herstellen und genügend viele davon aneinanderhängen. Man hat sich ja vorher überzeugt, daß ein archimedischer Körper entstehen wird.

Diesen Körper wollen wir nun etwas genauer untersuchen. Er hat 32 (=20+12) Flächen, 90 (=30+12•5) Kanten, 60 (=12•5) Ecken, und seine Symmetriegruppe ist die Ikosaedergruppe mit ihren 60 Elementen. Diese Eigenschaften lassen sich direkt aus den entsprechenden des Ikosaeders herleiten, wenn man sich nur die Herstellung aus diesem durch Abschneiden von Stücken vor Augen hält. Insbesondere stimmen die Symmetrieachsen mit ihrer Zähligkeit für das Ikosaeder und den 32-Flächner vollständig überein. - Betrachten wir als nächstes die Neigung der Flächen zueinander. Zwischen zwei Sechsecken beträgt sie wie beim Ikosaeder $138{,}2°$, zwischen einem Fünf- und einem Sechseck beläuft sie sich sogar auf $142{,}6°$. Die kleinste Neigung zwischen zwei Flächen ist also größer als 138° ; die Flächen selbst sind fast gleich groß, ihr kleinster Winkel beträgt 108° , nirgends laufen mehr als drei Nähte zusammen, die Symmetriegruppe ist größtmöglich, kurz: Es liegt die ideale Form für den Fußball vor.

Mit Betrachtungen über die Sterne kann man zeigen, daß alle anderen archimedischen Körper 'schlechter' sind. Entweder laufen an jeder Ecke mehr als drei Nähte zusammen, oder - bei Prismen und Antiprismen - die Kanten sind zu scharf, nämlich der Winkel zwischen Deckel und Seitenflächen ist 90° bzw. weniger. Oder die Lücke zwischen den drei Flächen eines Sterns, wenn sie in der Ebene um einen Punkt gelegt sind, ist groß, was zu scharfe Kanten hervorruft. Oder die Eckenzahl der vorkommenden Polygone ist zu unterschiedlich, so daß zu große ebene Stücke vorkommen. - Ein schlagkräftiges Argument ist auch die Größe der Symmetriegruppe, die, wie oben ausgeführt, eine der Gruppen der platonischen Körper ist, oder, bei Prisma und Antiprisma, eine Diedergruppe. Am kugelähnlichsten sind die Körper mit der Ikosaedergruppe, die die Ordnung 60 hat (Oktaedergruppe mit 24 und Tetraedergruppe mit 12 Elementen sind dagegen viel kleiner).

Man könnte auch noch die Archimedizität aufgeben und allgemeinere Polyeder betrachten. Nach wie vor scheint es sinnvoll zu sein, die Ikosaedergruppe als Symmetriegruppe und die Ordnung 3 für jede Ecke vorauszusetzen. Da gibt es nicht mehr viele Variationsmöglichkeiten. Aber man könnte z.B. (bei der fiktiven Herstellung des Fußballs durch Kappen der Ikosaederecken) den Schnitt so ansetzen, daß die entstehenden Kanten nicht mehr gleichlang sind, sondern die Fünfeckskanten (untereinander natürlich gleichlang) länger als die Kanten zwischen je zwei Sechsecken ausfallen (die natürlich untereinander auch gleichlang sind) (vgl. Abb.113d). Dann würden andere (viellecht bessere) Optimalitätskriterien vom Fußball erfüllt. Kürzlich wurde z.B. ausgerechnet, daß das Verhältnis von Umkugel- und Fußballvolumen dann minimal ist, wenn die ursprünglichen Ikosaederkanten nicht auf ein Drittel, sondern auf einen Anteil in der Nähe von 30% gekürzt werden (nach Pedersen 1980). Oder mit einer noch stärkeren Kürzung würde man erreichen, daß Fünf- und Sechsecke am Fußball denselben Flächeninhalt hätten. - Jedoch wären die zu erzielenden Verbesserungen zu geringfügig und müßten mit dem Nachteil erkauft werden, daß die Sechsecke nicht mehr regelmäßig wären und nicht mehr ohne Abfall aus einem ebenen Stück Leder geschnitten werden könnten.

Einige Gebrauchsgegenstände, die archimedische Körper sind, nennen wir noch in Abschnitt 4.2. Der hervorragenden Bedeutung des Würfels (auch als Quader) sind wir bereits verschiedentlich begegnet. Man könnte wohl auch mit den anderen platonischen Körpern 'würfeln', d.h. auch bei diesen kommen alle Seitenflächen mit gleicher Wahrscheinlichkeit nach einem Wurf unten zu liegen. Das Tetraeder ist aber ungeeignet, weil es zu schlecht rollt und nach dem Wurf keine Fläche, sondern eine Ecke nach oben zeigt. Die drei anderen sind aufwendiger und schwieriger herzustellen als der Würfel, u.a. weil sich die Neigungswinkel der Flächen gegeneinander nicht einfach berechnen lassen (vgl. oben). Die Kenntnis dieser Winkel würde bei der Herstellung aber benötigt, denn 'Würfel' werden ja als Vollkörper gefertigt und die Winkel stellen sich nicht automatisch ein wie bei dem Zusammenheften einer Polyederoberfläche aus einem ebenen Netz.

Geometrisch gesehen ist eine konvexe Polyederoberfläche (der Rand eines konvexen Vollpolyeders) starr. Diese Tatsache ist deswegen bemerkenswert, weil die entsprechende Behauptung für Polygone mit mehr als drei Ecken nicht gilt. Für den einfachen Fall, wo die Sterne des Polyeders alle aus drei Polygonen bestehen, kann man sich die Stabilität mit der Konstruktion räumlicher Eckenumgebungen (aus lückenhaften ebenen) plausibel machen. Dabei ist die Stabilität jeder einzelnen Seitenfläche wesentlich. Man erzielt sie dadurch, daß man Flächenmodelle und nicht Kantenmodelle verwendet. Ein Regal läßt sich nicht nur mit Dreiecken, sondern auch mit einer - vergleichsweise dünnen - Rückwand stabilisieren; diese Rückwand kann man als Kollektion beliebig vieler Stabilisierungsdreiecke auffassen.

Dagegen ist es, wie früher schon einmal erwähnt, hoffnungslos, einen Würfel als Kantenmodell etwa mit Strohhalmen und Bindfäden bauen zu wollen; er wird regelmäßig zusammenfallen. Man braucht kräftigere Verbindungen, z.B. Pfeifenreiniger. Deren Verwendung bedeutet aber, daß man nicht nur Kantenlängen, sondern auch Winkel vorgibt.

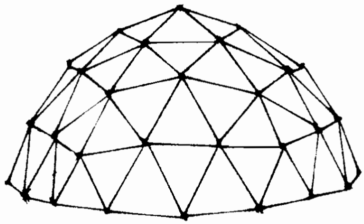


Abb.119

Es gibt auch konvexe Polyeder, die mit Strohhalmen und Bindfäden als stabile Form realisiert werden können, nämlich solche, deren Seitenflächen Dreiecke sind (Deltoide). Jedes Dreieck ist durch die Länge seiner Kanten festgelegt und damit so stabil wie eine ausgefüllte Fläche. Bekannt sind Klettergerüste, Dachkonstruktionen und ganze Häuser, deren Polyederstruktur man sich prinzipiell aus der des abgestumpften Ikosaeders (Abb.112c) dadurch hervorgegangen denken kann, daß auf jeder der 32 Flächen eine regelmäßige Pyramide errichtet wird, die gerade so hoch ist, daß die Spitze auf der Umkugel des Ausgangskörpers liegt. Das neue Polyeder hat zwölf Ecken der Ordnung 5 und achtzig Ecken der Ordnung 6 ; seine 180 Dreiecke sind gleichschenklig, aber nicht gleichseitig. Kein ebener Schnitt durch den Mittelpunkt dieses Deltoids trifft es ausschließlich in Kanten. Beim Bauen wird natürlich nur eine Hälfte realisiert (Abb.119).

Tatsächlich ist die Klasse der starren Kantenmodelle größer; z.B. gehört dazu das nichtkonvexe Oktaeder in Abb.120b, dessen Oberfläche aus zwei ineinandergesetzten Pyramiden ohne Boden besteht, wobei ihre Grundflächen identische Quadrate, ihre Höhen jedoch verschieden sind. Dagegen ist das Kantenmodell einer vierseitigen Pyramide i.a. nicht starr. Nach einer Verformung liegen allerdings die vier Ecken der Bodenfläche nicht mehr in einer Ebene, der modellierte Körper ist keine Pyramide mehr (Abb.120a). Parallelepipede (mit dem Würfel als Spezialfall) gehen bei Verformung ihres Kantenmodells wieder in ebensolche über. Daß es (nicht-konvexe) Deltoide mit beweglichen Kantenmodellen gibt, hat man zwar schon seit langem vermutet; erst Connelly (1978) gelang die explizite Konstruktion.

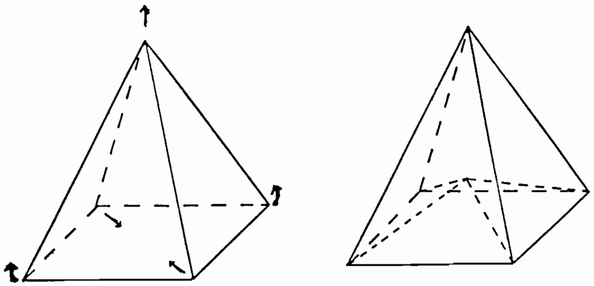


Abb.120 a b

Eine besonders stabile Form (auch als Kantenmodell) ist das Tetraeder. Es ist ein Deltoid, es ist das Polyeder mit der kleinsten Flächen-, Kanten- und Eckenzahl, und es stellt außerdem eine affine Basis des dreidimensionalen Raums dar. Wegen seiner Stabilität und Einfachheit verwendet man es in vielen Gegenden als Gerüst für Heuhaufen auf dem Felde.

Für die Tetraderform bei Getränketüten ist die Stabilität nur ein sekundäres Motiv. Sie entsteht eher zufällig (wegen ihrer Einfachheit) bei der Herstellung (vgl. Müller/Wittmann 1977, S. 128ff): Die Verpackungsfolie liegt zunächst als ein im Prinzip unendlicher Parallelstreifen vor. Dieser wird zu einem Zylinder gekrümmt, so daß die beiden Ränder sich berühren, und diese werden miteinander verschweißt (Abb.121a). In dieser Röhre läuft dann die Flüssigkeit. In bestimmten Abständen wird sie nun mit Zangen zusammengedrückt, so daß der Querschnitt an diesen Stellen nicht mehr kreisförmig ist, sondern aus zwei Strecken (ideal: einer Strecke) besteht (dies ist möglich wegen der Elastizität des Materials) (Abb.121b). Die so entstandene Röhren- und Flüssigkeitsportion wird nun abgetrennt und ihre beiden Enden zu- (die beiden Kantenpaare zusammen-)geschweißt: Fertig ist die Tüte (Abb.121c).

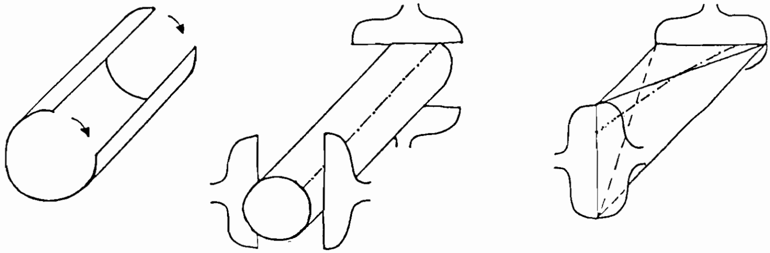


Abb.121 a b c

Der Kunstgriff ist nun, daß diese Kantenpaare von den Zangen nicht parallel, sondern (windschief) senkrecht zueinander zusammengefügt werden: Windschief, damit (ideal gesehen) überhaupt ein Körper entsteht; orthogonal, damit sein Volumen möglichst groß ist. Dieser Körper hat also zwei ausgeprägte (windschiefe, geschweißte) Kanten und vier schwache Kanten, die sich als Faltkanten von den beiden Endpunkten der einen hin zu den beiden Endpunkten der anderen Schweißkante ausbilden (man könnte das als Antiprisma mit je einer Strecke als 'Grund'- und 'Deckfläche' ansehen): Es ist ein Tetraeder hergestellt.

Damit die Verpackung dicht ist, muß vermieden werden, daß einer dieser vier Eckpunkte auf der allerersten, der Röhren-Schweißnaht zu liegen kommt. Man sorgt dafür, daß diese die Tetraederkanten genau in deren Mitte durchläuft, wodurch dann auch für die Pressungen die Richtungen im Röhrenquerschnitt festliegen (Abb.121b).

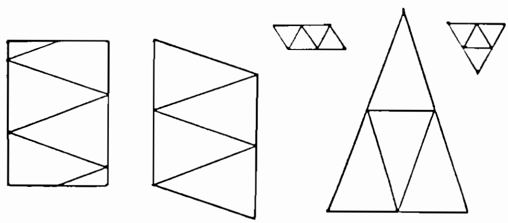


Abb.122 a b c

Das Tetraeder ist i.a. nicht regelmäßig, und das Netz, das zu dieser Herstellvorschrift gehört (Abb.122a), ist dann auch keines der beiden geläufigen (Abb.122b,c). Besonders gut zu lagern sind diese Tetraedertüten nicht; denn der Raum kann nicht mit regelmäßigen Tetraedern (auch nicht mit den gestauchten mit den Maßen der Getränkeverpackung) lückenlos ausgefüllt werden. Regelmäßige Tetraeder so aneinanderzulegen, daß jeweils Seitenflächen inzidieren und etwa um eine Kante herum der Raum vollständig ausgefüllt ist, scheitert an der Größe des Flächenwinkels: Diese beträgt

$$\arccos((3/4 + 3/4 - 1)/(2\cdot\sqrt{3}/2\cdot\sqrt{3}/2)) = \arccos 1/3 = 70{,}53^\circ \ ,$$

und 360° ist davon kein Vielfaches. So ist bei den Bienenwaben nicht jede Lücke zwischen drei Waben einer Schicht durch eine der anderen Schicht ausgefüllt (vgl. Abb.50), und die gedachten Tetraeder passen nicht lückenlos aneinander (Abb.123b).

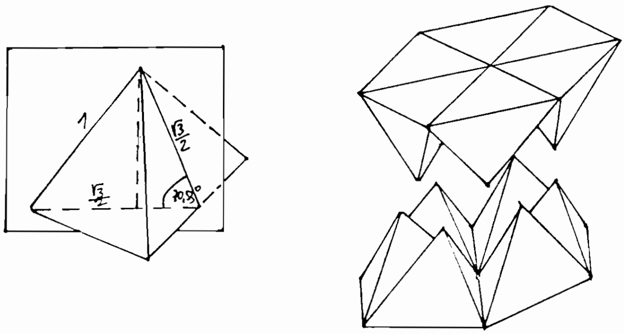


Abb.123 a b

Entsprechend läßt sich auch der Raum nicht mit regelmäßigen kongruenten Oktaedern parkettieren, da bei dieser Form der Flächenwinkel $(1/2)(180^\circ - \arccos 1/3) = 54{,}74^\circ$ ist. Jedoch läßt sich der Raum sehr wohl mit Oktaedern und Tetraedern gemeinsam parkettieren, wie man schon aus den Schnitten in Abb.123a und Abb.124a sehen kann.

Daß zwischen zwei parallele kongruente regelmäßige Oktaederhälften mit einer gemeinsamen Grundkante genau ein regelmäßiges Tetraeder paßt, ergibt sich noch einfacher aus Abb.124c: Man muß sich nur klarmachen, daß der Abstand zwischen den beiden Pyramidenspitzen die Einheitslänge ist. Es ist dies das dreidimensionale Pendant zu Wagenscheins Überlegung, warum der Radius sechsmal auf dem Kreis abgetragen werden kann; nämlich weil zwischen zwei parallele kongruente gleichseitige Dreiecke mit gemeinsamer Ecke genau ein drittes solches Dreieck paßt (Wagenschein 1974).

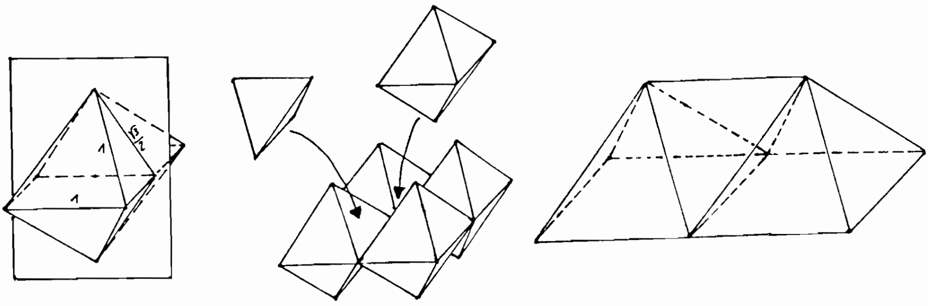


Abb.124 a b c

Von allen archimedischen Körpern kann nur mit den Prismen (4 4 3), (4 4 4) und (4 4 6), unter denen sich auch der Würfel befindet, und dem abgestumpften Oktaeder (4 6 6) der Raum lückenlos ausgefüllt werden (Abb.125).

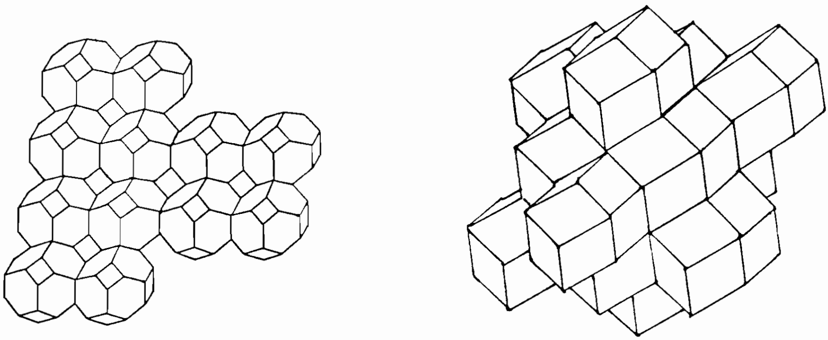


Abb.125 a b

An eine wichtige Form, mit der der Raum ebenfalls parkettiert werden kann, sei noch einmal erinnert: Das Rhombendodekaeder, ein sog. dualer archimedischer Körper (ein solcher entsteht aus einem archimedischen, indem dessen Seitenflächenmittelpunkte die Ecken des neuen Körpers liefern, hier speziell aus (3 4 3 4)).

Um einen leichteren Zugang zu seiner Parkettierungseigenschaft zu finden, stellt man es sich am einfachsten aus dem Würfel dadurch entstanden vor, daß man diesen mittels seiner Raumdiagonalen in die sechs Pyramiden zerlegt, deren Grundflächen die Würfelseiten sind und deren Spitzen der Würfelmittelpunkt ist, und jede Pyramide so verschiebt, daß sie dann auf der ihrer Grundfläche gegenüberliegenden Würfelseite nach außen aufgesetzt ist.

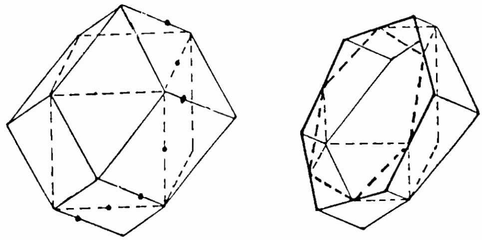


Abb. 126 a b

Die neue Figur hat dieselbe Symmetriegruppe wie der Würfel. Als Seitenflächen entstehen zwölf Rhomben mit Diagonalenlängen 1 (alte Würfelkante) und $\sqrt{2}$, Seitenlänge $\sqrt{3}/2$ und Winkelmaß $2\cdot\arcsin 1/\sqrt{3} = 70{,}53°$ (bzw. $109{,}47°$). Da schon im Würfel der Raum um eine Raumdiagonalenhälfte von drei Innenpyramiden mit jeweils kongruenten Flächenwinkeln vollständig ausgefüllt ist, ist auch beim neuen Körper das Flächenwinkelmaß $120°$. Die Pyramidendenkanten haben gegen die Grundflächen eine Neigung von $\arcsin 1/\sqrt{3} = 35{,}26°$; dann ist $90°+35{,}26°=125{,}26°$ die Neigung einer Kante gegen die ihr an einer dreizähligen Ecke gegenüberliegende Fläche. Die 24 Kanten liegen in vier Richtungen (die Würfeldiagonalen). Ein ebener Schnitt durch die Mitte der Figur senkrecht zu einer solchen Richtung trifft genau die sechs zugehörigen Kanten, teilt jede im Verhältnis 1:2 , wobei der kürzere Teil abwechselnd auf der einen und der anderen Seite der Schnittebene liegt, und schneidet ein regelmäßiges Sechseck mit Seitenlänge $\sqrt{6}/3$ aus, dessen Seitenmitten die Rhombenmitten, damit die Kantenmitten des Würfels und damit die Ecken des aus diesem ausgeschnittenen Sechsecks sind.

Färbt man nun in einer Parkettierung des Raums mit Würfeln diese schachbrettartig abwechselnd weiß und schwarz, entfernt die schwarzen und baut die weißen in der oben beschriebenen Art zu Rhombendodekaedern aus, so ergibt sich offensichtlich eine Parkettierung des Raums. Das Wabenmuster der Biene erhält man, indem man aus dieser Parkettierung einen Streifen ausschneidet, dessen Randebenen orthogonal zu einer der Würfelraumdiagonalen sind, durch Würfel- (und damit auch Rhombendodekaeder-)mittelpunkte gehen und der gerade zwei Schichten halber Rhombendodekaeder enthält, also die Dicke $(2/3)\cdot\sqrt{3}$ hat.

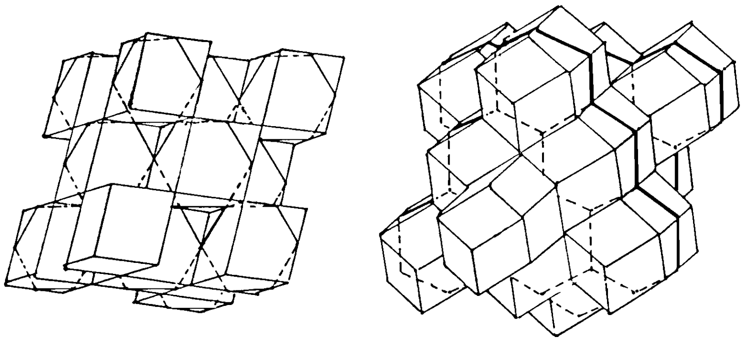


Abb.127 Würfel- und Rhombendodekaeder-Parkettierung mit Schnitt

Diese Wabendoppelschicht ist tatsächlich dieselbe wie die in 2.2.5 ausgehend von Halbkugeln konstruierte: Durch Betrachtung des unterliegenden Würfelgerüstes erkennt man sofort, daß die Konfiguration aus einer Wabe und dreier (auch untereinander benachbarter) Nachbarn ein gleichseitiges Tetraeder liefert (mit den Mittelpunkten als Ecken). Deren sechs Verbindungsstrecken durchstoßen je eine Würfelkante in der Mitte und damit je einen Rhombus in der Mitte, und zwar orthogonal, da sie jeweils die beiden Diagonalen (alte Würfelkante und Verbindungsstrecke zweier Pyramidenspitzen) orthogonal schneiden. Umgekehrt werden diese Verbindungsstrecken auch von diesen Rhomben halbiert, so daß sie ihre Mittelsenkrechten (Ebenen) sind.

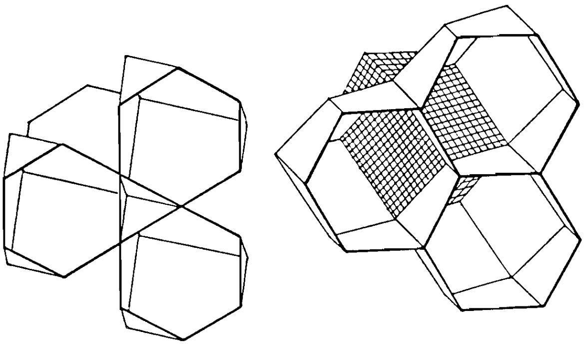


Abb.128 Vier halbe Würfel, vier halbe Rhombendodekaeder

Wie das Rhombendodekaeder aus dem sechsseitigen Prisma entstehen kann, haben wir in 2.2.5 ausgeführt (Abb.52).

2.3.10. Einige weitere grundlegende Begriffe

In diesem Abschnitt wollen wir einige Begriffe ansprechen, die sich in operativer Hinsicht von den bis jetzt behandelten unterscheiden. Sie sind zwar für die Geometrie von mehr oder weniger grundlegender Bedeutung, ihr operativer Charakter ist jedoch geringer ausgeprägt (als bei den bisher behandelten). Daher widmen wir nicht mehr jedem von ihnen einen eigenen Teilabschnitt. Es handelt sich um folgende Begriffe: Konvexität (konvexe Hülle), Orientierung, Krümmung, Winkel, Orthogonalität und Parallelität.

Konvexität

Bei vielen der bisherigen Analysen haben wir die Bedeutung der Konvexität für die Stabilität erkannt. Vor allem kommt es dabei darauf an, daß ein Körper oder eine ebene Fläche keine Einbuchtungen aufweist. Nur sekundär ist die Eigenschaft einer konvexen Menge, mit zwei Punkten immer auch die ganze Strecke zwischen ihnen zu enthalten, etwa in einem Zimmer freie Blickverbindungen oder in einem Land geradlinige Verkehrsverbindungen zu haben. Bei diesen beiden Beispielen erweist sich aber die geradlinige Verbindbarkeit als gar nicht ausschlaggebend; sie wird nämlich durch das Aufstellen von Möbeln bzw. durch die Beschaffenheit der Erdoberfläche teilweise wieder aufgehoben.

Ein halbwegs operativer Zugang zum Begriff der Konvexität ist der, eine Figur genau dann konvex zu nennen, wenn sie (als Punktmenge) der Durchschnitt von Halbräumen (mit ebenem Rand) ist. Dies entspricht der Herstellung massiver Polyeder durch Führen ebener Schnitte quer durch das Material. Die Definition schließt krummflächige Figuren ein, da die Anzahl der zu schneidenden Halbräume unendlich sein kann. Der Durchschnitt zweier konvexer Figuren ist wieder konvex, insbesondere die Ebene selbst als Schnitt der beiden durch sie definierten Halbräume.

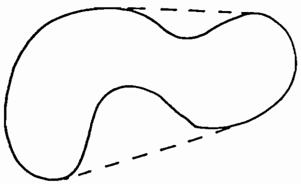


Abb.129 Konvexe Hülle

Zu jeder, auch nicht-zusammenhängenden Figur gibt es die konvexe Hülle, das ist der Durchschnitt aller die Figur enthaltenden konvexen Mengen. Die Raumstücke, die einer Figur zu ihrer konvexen Hülle fehlen, sind dann gerade ihre Einbuchtungen. Eine Figur ohne Einbuchtungen ist konvex.

Ein wichtiger Anwendungsfall des Begriffs der konvexen Hülle ist die Standfläche fester Körper auf ebenen, waagerechten Unterlagen. Viele Körper stehen sehr stabil, obwohl (bzw. weil!) sie eine ebene, nicht-konvexe Bodenfläche haben - etwa Wagen auf Rädern, Möbel auf Beinen, Teller auf einem kreisförmigen Wulst, usw. Entscheidend ist allein, daß der Schwerpunkt 'über' der konvexen Hülle der Bodenfläche liegt, d.h. daß seine Projektion (entlang der Schwerelinien auf eine ebene, waagerechte Unterlage) in dieser Hülle liegt. Einen Körper kippen heißt nämlich, ihn um eine Drehachse zu drehen, die sich in der Unterlage befindet. Ein Gegenstand läßt sich um eine Achse genau dann kippen, wenn sein Boden ganz mit einer ihrer beiden Halbebenen in der Unterlage inzidiert. D.h.: genau diejenigen Geraden auf der Unterlage sind keine möglichen Kippachsen, die das Innere der konvexen Hülle des Gegenstandsbodens treffen. An allen anderen Geraden sind Kippungen nur in Richtung der Halbebene möglich, in der der Boden nicht liegt (Abb.130b).

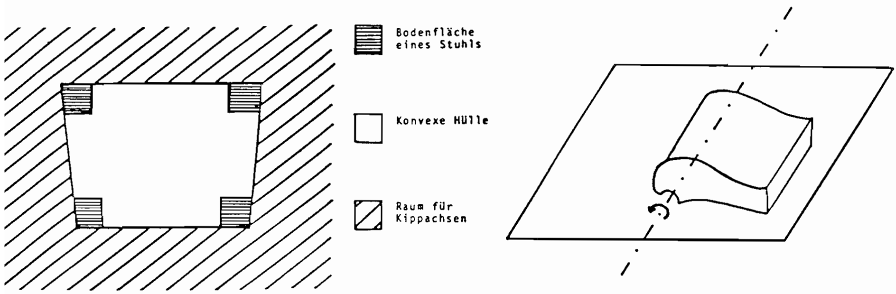


Abb.130 a b

Genau dann, wenn der Schwerpunkt über einer solchen Halbebene liegt, kippt der Gegenstand von selbst. Somit kippt der Gegenstand gerade dann nicht, wenn sein Schwerpunkt über der konvexen Hülle seines Bodens liegt. Auch für eine Behandlung des Kippens erweist sich also die Definition konvexer Mengen als Durchschnitte von Halbräumen (-ebenen) als geeignet.

Beim Kartoffelschälen ergibt sich eine anschauliche Anwendung des Begriffs der konvexen Hülle: Zunächst wird die Kartoffel mit der ganzen Klinge des Schälmessers bearbeitet. Sind die Einbuchtungen der Kartoffel hinreichend klein und haben sie geeignete Form, so wird an ihnen die Schale nicht entfernt, da die Klinge diese Stellen nicht erreichen kann.

Orientierung

Wenn von negativen Längen, Winkeln oder gar Flächeninhalten (bei der Integralrechnung) die Rede ist, steht immer der Begriff der Orientierung dahinter. Man könnte vereinfachend, aber durchaus korrekt erklären, orientieren bedeute festlegen, wo rechts ist. Jedoch birgt diese Begriffsbestimmung die Gefahr des Mißverständnisses. Bei einer allzu naiven Auffassung wird der Begriff sinnlos, weil je nach der Position des Erklärenden jeder Teil seiner Umgebung rechts von ihm liegen kann. Es ist ein sorgfältiger Aufbau des Orientierungsbegriffs notwendig, etwa schrittweise ausgehend von der Geraden über die Ebene bis zum Raum. Für die dreidimensionale euklidische Geometrie führen wir dies durch; von da aus ist dann bequem ein weiterer Ausbau auf höherdimensionale euklidische Räume, auf affine Räume oder auf Mannigfaltigkeiten möglich.

Zunächst einmal ist Orientierung eine lokale Eigenschaft des jeweiligen Raumes. Eine Gerade in einem Punkt orientieren heißt, eine der beiden durch diesen Punkt festgelegten Halbgeraden als 'rechts' auszuzeichnen. Eine Ebene orientiert man in einem Punkt, indem man zunächst eine Geraden in ihr durch diesen Punkt orientiert und dann eine der beiden Halbebenen als 'rechts' auszeichnet. Zwei Orientierungen der Ebene in einem Punkt werden identifiziert, wenn sie durch Drehungen in diesem Punkt ineinander übergeführt werden können. Entsprechend wird schließlich der Raum in einem Punkt orientiert: Nach Orientierung einer Ebene durch den Punkt zeichnet man einen der beiden Halbräume als 'rechts' aus. Auch hier werden zwei Orientierungen identifiziert, wenn sie durch Drehung in dem Punkt ineinander übergeführt werden können.

Statt mit Hilfe von Halbebenen und Halbräumen hätte man Ebene und Raum auch allein mittels Halbgeraden in einem Punkt orientieren können: In der fraglichen Ebene läßt man eine zweite Halbgerade orthogonal zur ersten in dem Punkt anfangen; im Raum läßt man dann eine dritte orthogonal zu den ersten beiden in dem Punkt anfangen (Orthogonalität ist nicht wesentlich, vereinfacht aber den Sachverhalt; wesentlich ist, daß nicht n Halbgeraden in einem (n-1)-dimensionalen Teilraum liegen). Dann bedeutet Orientierung eines n-dimensionalen euklidischen Raumes in einem Punkt (n=1,2,3,...): Festlegen einer Reihenfolge unter n Halbgeraden, die in diesem Punkt beginnen und paarweise orthogonal sind (n-Bein). (Dies ist genau der Orientierungsbegriff der Linearen Algebra.)

Sprachlich drückt man diese Reihenfolge aus, indem man anstelle von dreimal 'rechts' die Halbgeraden nacheinander 'vorn', 'oben' und 'rechts' nennt (oder in einer anderen zu vereinbarenden Folge, die sich nach dem durch den menschlichen Körper festgelegten kanonischen Dreibein richtet). Nun gilt es, die Orientierung zu anderen Punkten im Raum zu transportieren, wozu man am einfachsten Isotopien verwendet, ein Begriff, auf den wir in 2.4.2 noch einmal kurz eingehen. Abbildungsgeometrisch kann die Definition aber auch ohne den Begriff der Isotopie gefaßt werden: Zwei Orientierungen sind identisch, wenn es eine eigentliche Kongruenzabbildung (eigentliche Bewegung, nämlich: Schraubung mit den Spezialfällen Drehung und Schiebung) gibt, die die eine in die andere überführt. Dann bleiben für den euklidischen Raum, gleichgültig welcher Dimension, genau zwei Orientierungen. Einen Raum orientieren heißt nun, eine der beiden Orientierungen auswählen, d.h. ein einziges n-Bein orientieren, d.h.: bei der Geraden irgendein Einbein auswählen und es 'rechts' nennen, in der Ebene irgendein Zweibein mit 'oben' und 'rechts' belegen, im Raum irgendein Dreibein mit 'vorne', 'oben' und 'rechts' belegen.

Nun kann man davon reden, daß man auf dem Rand eines Dreiecks in der Ebene rechts herum geht oder daß eine bestimmte Schraubenlinie linkswendig ist. Hätte man den jeweiligen Raum mit der jeweils anderen Orientierung ausgestattet, dann müßte man in diesen beiden Beispielen von 'links herum gehen' und 'rechtswendig' reden. Im orientierten dreidimensionalen Raum weiß man allerdings nicht, bzw. kann man es nicht entscheiden, ob ein Umlauf um ein Dreieck rechts oder links ist, da dies davon abhängt, von welcher Seite aus man das Dreieck sieht. Abbildungsgeometrisch gesprochen gibt es eigentliche Kongruenzabbildungen des Raumes, die ein orientiertes Zweibein in der Ebene in ein entgegengesetzt orientiertes überführen, nämlich die Achsendrehung um 180° , welche in der Ebene als Achsenspiegelung wirkt, also als uneigentliche Kongruenzabbildung. In einem jeden Raum sind aber die in ihm uneigentlichen Kongruenzabbildungen nicht zur Identifizierung von Orientierungen zugelassen, weil sie nicht stetigen, starren Ortsveränderungen entsprechen. Ließe man sie zu, dann gäbe es nur eine Orientierung, 'links' und 'rechts' würden nicht unterschieden, der Begriff der Orientierung hätte keinen Sinn. Man nennt die uneigentlichen Kongruenzabbildungen in einem orientierten euklidischen Raum auch 'orientierungsverändernd', weil sie 'linke' in 'rechte' Objekte (und umgekehrt) überführen.

Von den <u>bilateralen</u> (d.h. zu sich selbst inversen) Kongruenzabbildungen z.B. sind genau diejenigen orientierungsverändernd, für die es ein orthogonales Geradenkreuz gibt, in dem sie genau eine ungerade Anzahl von Geraden umkehren und die übrigen Geraden fest lassen, bei denen also der Fixpunktraum ungerade Kodimension hat. Im dreidimensionalen Raum sind dies: die Spiegelung an einer Ebene und die Spiegelung an einem Punkt; in der Ebene: die Spiegelung an einer Achse. Orientierungserhaltend sind im Raum: die Achsendrehung um 180° ; in der Ebene: die Drehung um einen Punkt um 180° .

Wie schon erwähnt, läßt sich der Orientierungsbegriff leicht auf Mannigfaltigkeiten erweitern, und dort wird er erst richtig tragfähig. Z.B. gibt es Mannigfaltigkeiten, die gar nicht orientierbar sind; d.h. in ihnen kann ein orientiertes n-Bein durch eine stetige Bewegung in ein entgegengesetzt orientiertes überführt werden. Ein physikalisch realisierbares Beispiel ist das Möbius-Band (Abb.131). Der Buchstabe 'P' erscheint nach einmaligem Umlauf an der Mittellinie gespiegelt, und damit umgekehrt orientiert (obwohl er das Band nicht verlassen hat). Das Beispiel regt Spekulationen darüber an, ob unser Raum nicht auch in einen höherdimensionalen wie ein Möbius-Band eingebettet ist und man nur 'hintenherum zu gehen' braucht, um spiegelverkehrt wieder zu erscheinen. Gardner (1964/1967) schildert mögliche Auswirkungen. Z.B. könnte man dann gewisse Nahrungsmittel nicht mehr verdauen, weil ihre Moleküle Schraubenlinien sind, deren Windungen dann nicht mehr zu den Molekülen der Rezeptoren passen würden.

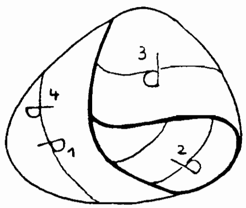


Abb.131

Anwendungen des Möbius-Bandes in der Praxis beschreibt Jacobs (1970, S.479): Bei Keilriemen oder Endlos-Tonbändern wird damit die Abnutzung halbiert bzw. die Kapazität verdoppelt.

Weitere praktische Probleme der Orientierung ergeben sich in verschiedenen Zusammenhängen:

Für die Herstellung der beiden Kotflügel eines Autos werden zwei verschiedene Formen benötigt. Eine Schraubenmutter paßt nur dann auf eine Schraube, wenn beide Gewinde gleich orientiert sind. Auch wenn man sie umdreht und mit der vorherigen Rückseite nach vorne aufschrauben will, ändert sich am Paßverhalten nichts: sie paßt so viel oder so wenig wie vorher. Man hat sich allgemein auf eine Windungsrichtung für Schrauben festgelegt; nur in Spezialfällen braucht man unterschiedliche Gewinde: Z.B. an Fahrzeugen, wo Schrauben an den beiden Enden einer Radachse durch die Rotation nicht gelockert, sondern allenfalls festgedreht werden sollen (nach Gardner (1964/1967), S. 181). - Der Seilspanner ist über zwei entgegengesetzt orientierte Gewinde mit zwei Seiten verbunden (Abb.132). Was passiert bei einer Drehung des Spanners? Was würde passieren, wenn die Gewinde gleich orientiert wären?

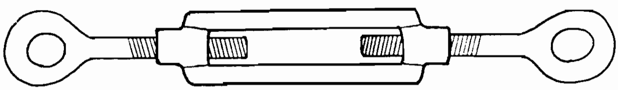


Abb.132

In der New Yorker U-Bahn hat man zeitweise - als Mittel gegen Diebstähle - Glühbirnen und Fassungen mit Linksgewinden eingebaut. Gestohlen werden konnten die Birnen zwar immer noch, aber genützt haben sie niemandem mehr.

Bis auf solche und ähnliche Ausnahmen werden aber überall auf der Erde i.a. rechtswendige Schraubenlinien verwendet. Diese Einheitlichkeit ist für Linkshänder ungünstig. Wenn sie z.B. einen Korkenzieher in einen Korken schrauben, müssen sie zur Körpermitte hin drehen und haben damit eine ungünstigere Kraftwirkung als Rechtshänder, die vom Körper weg drehen können.

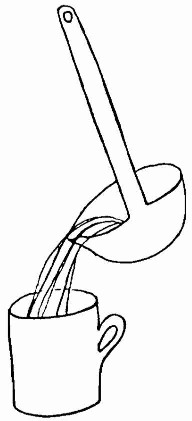


Abb.133

Auch bei Schöpfkellen mit einer Tülle sind Linkshänder benachteiligt (Abb.133). Diese Kellen sind so gebaut, daß man in der linken Hand z.B. das Trinkgefäß, in der rechten die Kelle hält und eine Flüssigkeit nach links in das Gefäß schüttet. Ein Linkshänder nimmt automatisch das Gefäß in die rechte Hand und schüttet mit der Linken: Entweder schüttet er über den runden Rand der Kelle und kann nicht genau zielen, oder er dreht die Kelle um den Stiel, hält sie dann weit genug von sich und schüttet entsprechend unsicher, oder er muß die Arme kreuzen.

Weitere Beispiele dieser Art: Die Krone an der Armbanduhr, die Saitenbespannung der Gitarre, die gewöhnliche Schere, der unsymmetrische Wellenschliff an Messern, Büchsenöffner, Brotschneidemaschine, Gewehrschaft, Zieloptik; wer in einer Zeitschrift eine bestimmte Seite sucht und dabei die Blätter über den Daumen streifen läßt, fängt als Rechtshänder vorne und als Linkshänder hinten an.

Schließlich können wir noch die alte Frage beantworten, warum der physikalische Spiegel rechts und links vertauscht und nicht etwa oben und unten: Tatsächlich vertauscht er vorn und hinten. Wir sehen darin aber eine Links-Rechts-Vertauschung, denn das Spiegelbild wendet uns ja die Vorderseite zu, und dies setzt nach aller (spiegelfreien) Erfahrung eine Drehung um 180° um die senkrechte Achse voraus. Dabei werden dann 'vorn' und 'hinten' sowie 'links' und 'rechts' verkehrt, die Vorn-Hinten-Vertauschung also mit der Vorstellung von einer realen Bewegung plausibel gemacht und dabei die mitgedachte, aber vom Spiegel nicht mitgemachte Links-Rechts-Vertauschung als unerklärt übrig gelassen. Daß (hier) die Vorn-Hinten-Vertauschung so stark über die Links-Rechts-Vertauschung dominiert, liegt einfach daran, daß am menschlichen Körper und überhaupt in unserer Umwelt der Unterschied zwischen vorn und hinten viel deutlicher als der zwischen links und rechts ist.

Krümmung

Für die Entwicklung des Begriffs der Krümmung bilden Kabeltrommeln einen möglichen Ausgangspunkt. Die in der Praxis auftretenden Probleme mit Krümmungen können meist (lokal) als ebene behandelt werden, da es sich um Verbiegung gerader Linien oder aber ebener Flächen handelt, die (lokal) nur in einer Richtung gekrümmt werden können. Die folgenden Betrachtungen werden daher auf die Ebene eingeschränkt. Da die zu verbiegenden Flächen und Linien tatsächlich planparallele Platten bzw. Zylinder mit parallelen Geraden auf der Oberfläche sind (und mit der Ebene geschnitten Parallelstreifen ergeben), erzeugt eine Krümmung Längenunterschiede an vorher gleichlangen Stücken (vgl. Abb.69). Diese Unterschiede werden durch die Elastizität des Materials in Grenzen ermöglicht. Werden diese Grenzen überschritten, dann reißt das Material. Man darf es also nicht zu stark krümmen. Wird ein Parallelstreifen der Dicke d zu einem Kreisring mit (kleinerem) Radius r gebogen, so verhalten sich in jedem Sektor äußere und innere Bogenlänge wie $(1+(d/r)):1$ (Homogenität des Kreises!). Für kleine r (und damit starke Krümmung) wird dieses Verhältnis groß. Will man nun die Krümmung eines Kabels beschränken, so heißt das, daß es an keiner Stelle Teil eines Kreises mit einem Radius unterhalb einer gewissen Grenze sein darf. Dies ist zu erreichen, indem man das Kabel auf eine Trommel aufwickelt, die diesen Mindestradius hat, bzw. beim Verlegen darauf achtet, daß jede Stelle des Kabels von allen Seiten von einem Kreis mit diesem Mindestradius berührt werden kann. Damit ist eine operative Grundlage etwa für den Begriff der Krümmung einer ebenen Kurve an einer beliebigen Stelle gelegt: Kehrwert des Radius des maximalen, lokal einbeschreibbaren Kreises.

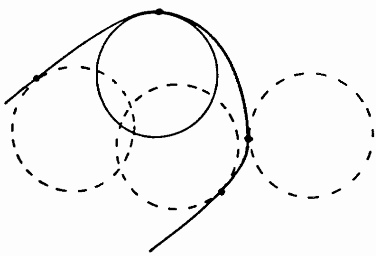


Abb.134 *Kurve mit unterschiedlichen Krümmungen, darunter einer maximalen*

Winkel

Es gibt zahlreiche praktische Situationen, in denen der Begriff des Winkels bzw. die verschiedenen Winkelbegriffe bedeutungsvoll sind. Einer operativen Begriffsbildung ist der Winkel allerdings weniger zugänglich. Wir wollen daher lediglich auf die gründliche Analyse in Freudenthal (1973, Bd.2, S.438ff) verweisen.

Orthogonalität

Ein weiterer grundlegender Begriff ist die Orthogonalität, die wir bereits in 2.2.5 (Optimierung) abgehandelt haben.

Parallelität

Schließlich wollen wir noch auf den Begriff der Parallelität eingehen: Dieser hat ja in der historischen Genese der axiomatischen Geometrie eine wichtige Rolle gespielt. In einer operativen Geometrie ist seine Rolle eher bescheidener. Trotzdem ist der Parallelitätsbegriff ein Musterbeispiel dafür, wie eine systematisierende Behandlung durch eine operative Interpretation ergänzt bzw. ersetzt werden kann.

In das Hilbertsche Axiomensystem der euklidischen Geometrie paßt die inzidenzgeometrische Definition der Parallelität: Zwei verschiedene Geraden heißen parallel, wenn sie in einer Ebene liegen und keinen Punkt gemeinsam haben. In der Praxis erweist sich dieser Begriff als ungeeignet für die Herstellung oder Überprüfung von Parallelität. Dort braucht man immer nur die Parallelität endlicher Strecken; und wenn zwei endliche Strecken sich nicht schneiden, dann heißt das noch lange nicht, daß sie in einem zweckvollen, noch näher zu bestimmenden Sinn parallel sind. Man kommt der Definition auch nicht näher, wenn man sich die Strecken als immer länger werdend vorstellt. Ausgenutzt an der Parallelität wird regelmäßig nicht die Disjunktheit von Geraden, sondern ihre Richtungsgleichheit, und noch mehr ihre Abstandskonstanz. Diese beiden Aspekte lassen sich oft nicht genau trennen, insbesondere wird die Richtungsgleichheit nicht nur durch Winkelmessung von Geraden gegen eine Bezugsebene oder Ebenen gegen eine Bezugsgerade, sondern häufig auch anhand der Gleichabständigkeit überprüft.

Kanten und Ebenen gleicher Richtung befinden sich an Gebäuden, Möbelstücken usw. als Senkrechte oder Waagerechte im Schwerefeld, an Bilderrahmen, Straßenmarkierungen und an vielen anderen Objekten, die eine bestimmte optische Wirkung ausstrahlen sollen, und besonders überall dort, wo simultane Orthogonalität gegen eine Ebene oder Gerade erforderlich ist.

Beispiele für die Bedeutung der Gleichabständigkeit sind ein Regal, bei dem man für alle Fächer nur eine Sorte von Brettern braucht, jedes Blatt Papier, jede Holz- oder Metallplatte konstanter Dicke, Eisenbahnschienen, überhaupt jedes Lager für eine geradlinige Bewegung, wie Leisten für Schubladen, Mantellinien an Zylindern, Führungsschienen für Rolläden usw. Überhaupt: Der Rolladen ist 'gespickt' mit Parallelitäten (und Orthogonalitäten):

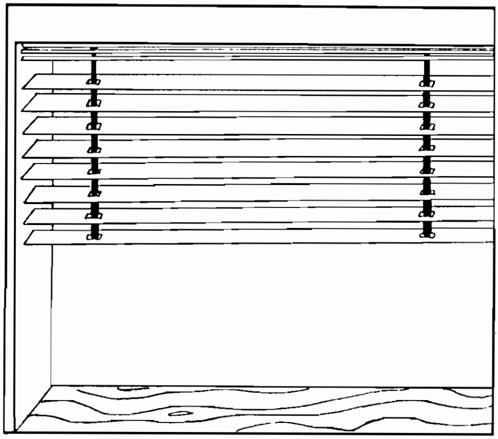


Abb.135

Mit Hilfe der Gleichabständigkeit läßt sich der Parallelenbegriff zwanglos auf nicht-gerade Linien und nicht-ebene Flächen ausdehnen: Zwei Linien (Flächen) heißen parallel, wenn sie überall gleichen Abstand zueinander haben. Für Geraden und Ebenen ergibt sich der übliche Parallelenbegriff mit all seinen Eigenschaften. Jedoch gehen bei der Verallgemeinerung zahlreiche dieser Eigenschaften verloren.

Parallel zueinander sind z.B. konzentrische Kreise (Kreisbögen in gleichem Sektor) in einer Ebene oder konzentrische Kugeln, und zwar jeweils auch zu ihrem Mittelpunkt; ein Zylindermantel zu seiner Achse; eine Schraubenlinie zu ihrer Achse; die 12-Meilen-Zone eines Meeresanliegerstaates zu seiner Küste; Eisenbahnschienen, allgemein: Lager für linienförmige Bewegungen usw.

Nicht parallel sind die Blätter eines Stapels Papier (eines Telefonbuches), wenn sie alle gleichförmig gekrümmt werden (Abb.136).

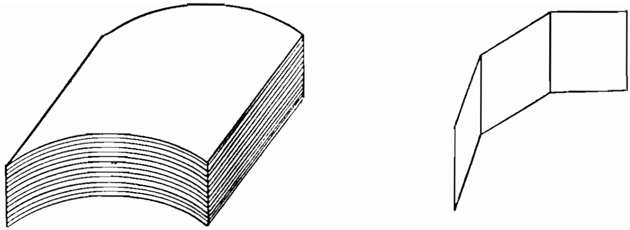


Abb.136 a b

Man kann das Problem auf ein ebenes reduzieren, indem man etwa die Vorderseite des Stapels betrachtet. Aus allen Geraden, die parallel zum Rand liegen, werden zwischen zwei Blättern gleichlange Stücke ausgeschnitten; man kann sich die Blätter durch Parallelverschiebung entlang dem Rand auseinander hervorgegangen denken. Zwei Blätter haben jedoch nicht überall denselben Abstand. Dieser nimmt vielmehr mit dem Winkel α ($0 \leq \alpha < \pi/2$) zwischen Verschiebungsrichtung und Kurve ab. Davon überzeugt man sich mittels einer Linearisierung des Problems (Abb.136b).

Die Parallelenrelation ist nicht mehr transitiv: In Abb.137a sind zwar L_1 und L_2 , sowie L_2 und L_3 , nicht aber L_1 und L_3 parallel.

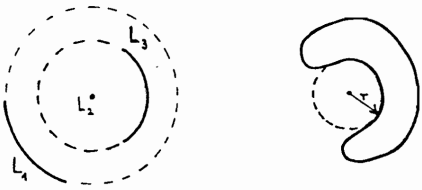


Abb.137 a b

Bei der Konstruktion von Parallelen zu vorgegebenen Linien (Flächen) kann die Tatsache ausgenutzt werden, daß die 'Abstände' zwischen zwei Parallelen senkrecht auf beiden stehen. Die Konstruktion ist unter Umständen jedoch gar nicht möglich, z.B. gibt es zu der höchst einfachen Linie in Abb.137b keine Parallele in der Zeichenebene mit einem Abstand größer als r . Schließlich kann man von Parallelität nicht mehr auf Längengleichheit schließen wie im Parallelogramm:

Wenn ein Fahrzeug in die Kurve geht, müssen die äußeren Räder einen längeren Weg zurücklegen und sich schneller drehen als die inneren (siehe auch Abb.177). Für die Stabilität von Gewölbebögen oder einer Papierrolle ist nicht die Parallelität verantwortlich, sondern die Pyramidenstumpfform bzw. die Geradlinigkeit von Papierfalten.

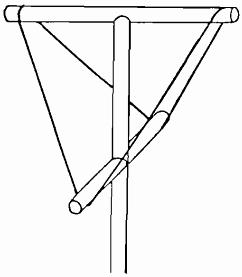


Abb.138

Es gibt auch Sachverhalte, wo Parallelität vermieden wird: Windschiefe (orthogonale) Stäbe an der Haspel zum Aufspulen eines Fadens (Abb.138). Der Faden kann von keinem der Stäbe herunterrutschen, weil er durch die Windung um den jeweils anderen Stab nach innen gezogen wird. Dies erinnert an die Herstellung der tetraederförmigen Verpackungen (siehe Abb.121c): Die Schweißkanten dort entsprechen den Haspeln hier, und die Faltkanten dem Faden.

2.3.11. Spezielle Formen

Eine Reihe von Gegenständen haben im Laufe der Zeit Formen angenommen, die von den bisher beschriebenen Grundformen recht stark abweichen. Dabei handelt es sich nicht einfach bloß um herstellbedingte Mängel oder zweckmäßige Variationen, z.B. der menschlichen Anatomie oder sonstigen vorgegebenen, vor allem biologischen Gebilden angepaßt (Skischuh, Bürostuhl, Pferdesattel). Oft stellen solche Formen Ergebnisse von oder Anstöße für Modegeschmack dar (z.B. Autokarosserien, Architektur, Möbel). Zumeist erfüllen solche Modeformen auch noch ihren Zweck, sie sind jedenfalls nicht zweckwidrig. Dieser Zweckbezug ist aber weniger eine Eigenschaft der modischen Ausformung des Gegenstandes, sondern der dahinterstehenden Grundidee. Diese muß man kennen, um die fortentwickelte Form analysieren zu können. Vom geometrisch-didaktischen Standpunkt aus sind diese Analysen nicht sehr ökonomisch; die Formen sind zum Teil schwierig zu beschreiben, bisweilen noch nicht einmal analytisch; außerdem ist die zweckmäßige Grundform jeweils schon bekannt. Eher müßten sich die (Werbe-)Pychologen damit beschäftigen. Man analysiere einmal die Form eines modernen Waschbeckens! Häufig sind auch entsprechende Flächen oder Kurven aus zahlreichen Teilflächen oder -kurven zusammengesetzt, von denen jede einzelne zwar analytisch ist, alle zusammen aber nicht.

Pseudoellipse

Eine Ausnahme sind unter anderen die Pseudoellipsen, Übergangsformen zwischen Ellipse und Rechteck mit der allgemeinen Gleichung

$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1 \qquad \text{(a,b,n positiv reell)}$$

Für a=b ergeben sich Pseudokreise; für $n > 2$ nennt man sie Super-, für $n < 2$ Subellipsen. Abb.139 enthält die Graphen einiger Pseudoellipsen mit a=b=1 . Gardner (1975/1978, S.245ff) beschreibt Anwendungen der Superellipse, bei denen es auf die ästhetische Wirkung ankommt, z.B. beim Möbeldesign.

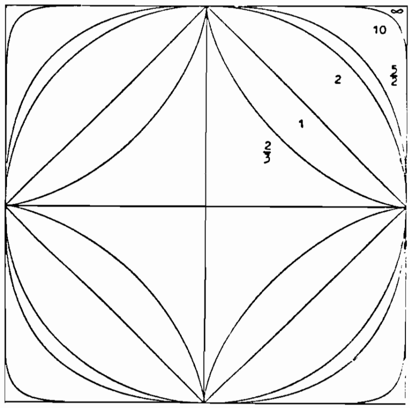


Abb.139

Reuleaux-Scheibe

Es gibt aber auch zahlreiche geometrische Sonderformen, die als solche zweckmäßig sind. Von diesen wollen wir einige wenige auswählen und sie kurz besprechen.

Die (dreieckige) Reuleaux-Scheibe ensteht aus einem gleichseitigen Dreieck, indem man jede der drei Seiten durch einen Kreisbogen zwischen ihren Eckpunkten ersetzt, dessen Mittelpunkt die gegenüberliegende Ecke ist. Sie ist eine (unter vielen) Fläche mit konstanter Dicke, d.h. gleich an welcher Stelle man einen Meßschieber (Schublehre) ansetzt, es ergibt sich eben immer derselbe Durchmesser.

Eine Anwendung haben wir schon bei Hydranten-Verschlußköpfen (Abb.96) kennengelernt. Der Läufer des Wankelmotors (Abb.25) hat zwar einen ähnlichen Querschnitt, dieser kann aber aus analytischen Gründen kein Reuleaux-Dreieck sein (nach Spallek 1984); in der Tat kommt es bei ihm auch gar nicht auf konstante Dicke, sondern lediglich auf die Außenwölbung an. Bemerkenswert sind noch eine gewisse Art der Bewegungssteuerung beim Diaprojektor (Abb.140; vgl. Zeitler 1981) und der Quadratlochbohrer (Abb.141; nach Gardner 1969/1971, S.199ff).

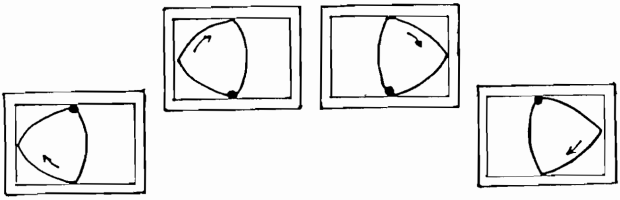


Abb.140

Der Dia-Steuerungsrahmen (Abb.140) sitzt mit zwei lotrechten Schlitzen auf zwei Stiften und ist in der Horizontalen frei beweglich. In einer rechteckigen Aussparung sitzt eine Reuleaux-Scheibe, die um eine ihrer Ecken gleichmäßig rotiert. Dabei wird der Rahmen gehoben und gesenkt. Ist er in der höchsten (oder in der tiefsten) Stellung, so bleibt er 1/6 der gesamten Umdrehungszeit des Rotors (so lange, bis dessen dem Drehpunkt gegenüberliegender Bogen vorbeigestreift ist) stehen, und in dieser Zeit wird das Dia projiziert.

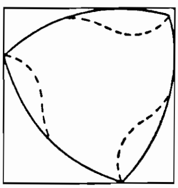


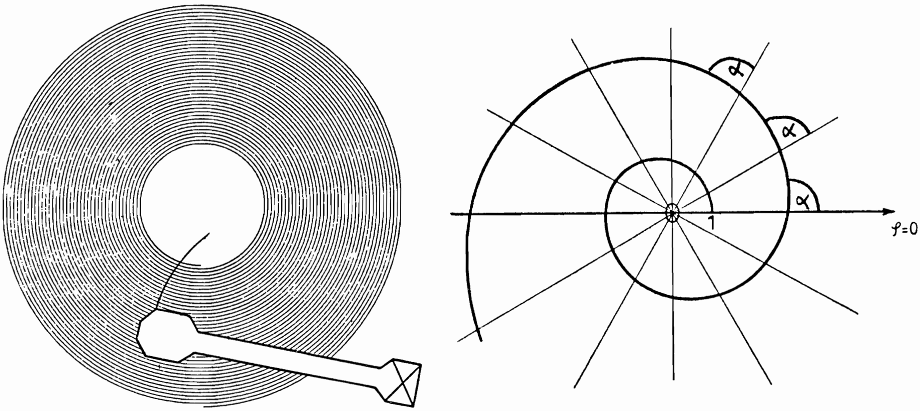
Abb.141

Die gestrichelten Linien in Abb.141 geben an, mit welchem Querschnitt der Bohrer abweichend von der Reuxleaux-Dreiecks-Form tatsächlich realisiert wird, damit er in das Material schneiden kann. Die Ecken des Quadrats werden allerdings deutlich abgerundet. Eine technische Schwierigkeit liegt darin, daß die Rotationsachse nicht ortsfest ist. Man behilft sich hier durch Verwendung eines beweglichen Bohrfutters. - Für gleichseitige Dreiecke als Lochquerschnitt gibt es solche Bohrer nicht, wohl aber für Fünf-, Sechs- und Achtecke.

Spirale

Die Spirale hat eine gewisse Verwandtschaft zu der Schraubenlinie. Auch sie ist um eine Achse unendlich oft gewunden. Als ebene Kurve ist sie sogar um einen Punkt gewunden. Mit der Ebenheit ist allerdings ein Verlust an Homogenität verbunden: Die Spirale ist in ihrem Lager kein bißchen beweglich, da ihre Krümmung variiert.

Der Begriff der Spirale umfaßt mehrere wesentlich verschiedene Abarten (logarithmische, Archimedische, hyperbolische); von diesen sind vom operativen Standpunkt die ersten beiden interessant (Abb.142a und 142b). – Die logarithmische Spirale hat die Gleichung (in Polarkoordinaten) $r = a \cdot \exp(k \cdot \varphi)$. In der Natur kommt sie häufig vor: an den Windungen von Muscheln und Schnecken, in der Anordnung von Pflanzensamen (z.B. Sonnenblume), bei Spinnennetzen u.v.a.m. Sie entsteht auch als Bewegungsspur jener berühmten unterhaltungsmathematischen Käfer, die in den Ecken eines regelmäßigen Polygons sitzen und dann plötzlich ihrem jeweiligen 'Vordermann' hinterherlaufen. Entscheidend ist aber die sie definierende Eigenschaft, daß alle Radiusvektoren unter dem gleichen Winkel mit dem Maß $\arctan(1/k)$ geschnitten werden. Aus diesem Grunde haben die Messerschneiden einer Messerrad-Häckselmaschine die Form einer logarithmischen Spirale: so wird dann ein stets gleiches Schnittwinkelmaß gewährleistet.



a: Archimedische Spirale als Schallplatte

b: Logarithmische Spirale

Abb.142

Die Archimedische Spirale hat die Gleichung (in Polarkoordinaten) $r=k \cdot \varphi$ und besitzt die konstante Windungsbreite $2\pi k$. Sie ist besonders einfach herzustellen; man braucht nur einen Streifen konstanter Dicke irgendeines Materials, z.B. Papier, aufzuwickeln. Mit dieser Spirale funktioniert die Schallplatte: Ein dünner Streifen (die Rille) wird möglichst platzsparend auf die Platte aufgetragen, und zwar so, daß seine Krümmung an allen Stellen möglichst groß ist, nämlich als Spirale. Bei der Rotation der Scheibe bleibt ein mitrotierender Gegenstand, z.B. ein Flusen, immer in festem Abstand vom Mittelpunkt; hingegen bewegt sich die Nadel des Tonarms auf einem Strahl zum Mittelpunkt hin, weil sie in der Rille gehalten wird und nicht mitrotiert. (Wird die Rotationsrichtung geändert, dann bewegt sich die Nadel nach außen; außerdem bewegt sie sich nicht auf einer Geraden, sondern auf einer Kreislinie, da der Tonarm am anderen Ende in einem Punkt festgehalten wird.) Dies erinnert an das Funktionsprinzip der zylindrischen Schraubenlinie. Als Zwischenform zwischen dieser und der ebenen Spirale kann man sich eine konische Schraubenlinie vorstellen (z.B. auf Holzschrauben). Eine wichtige Anwendung ist auch die Spiralfeder.

Klothoide

Beim Gepäckband auf dem Flughafen ist es mittels einer geeigneten Formgebung für die Glieder gelungen, den Lauf stückweise gerade und stückweise krumm zu führen (siehe Abb.68): An den Stellen, wo sich die Krümmung ändert, drehen sich die Glieder gegeneinander ab; auf Linien konstanter Krümmung (Strecken, Kreisbögen) bleiben sie relativ zueinander in gleicher Lage.

Solche Stellen, wo die Krümmung sich ändert, sind auch bei Trassen von Autostraßen und Eisenbahnstrecken problematisch: Daß dort Richtungsänderungen nicht über einen Knick herbeigeführt werden (Abb.143a), ist eine Allerweltsweisheit; vielmehr wird zwischen zwei gerade Stücke verschiedener Richtung ein Kreisbogen entsprechenden Winkels eingebaut (Abb.143b), dessen Radius r umso größer sein muß, je größer die Geschwindigkeit v ist, mit der die Fahrzeuge die Kurve durchfahren können sollen, und zwar ist r proportional v^2.

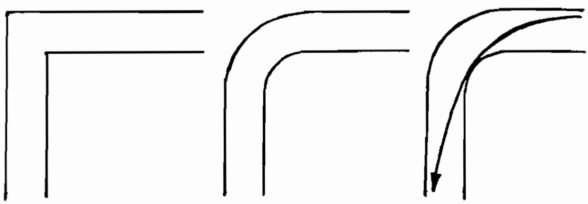


Abb.143 a b c

An den beiden Stellen, wo nun Gerade in Kurve und Kurve in Gerade übergeht, wo sich die Krümmung der Trasse sprungartig von 0 auf 1/r und von 1/r auf 0 ändert, müßten auch die Vorderräder des durchfahrenden Fahrzeugs sprungartig ihre Richtung ändern, wenn dieses genau der Trasse folgen soll. Dies ist nicht möglich; die Richtung der Vorderräder kann sich nur stetig ändern, die Kurve wird 'geschnitten' (Abb.143c).

Bei den heutzutage üblichen Geschwindigkeiten müßten die Kurven sehr flach und lang (mit erheblichen verkehrstechnischen Nachteilen) und die Fahrbahnen sehr breit (unökonomisch!) gebaut werden, damit die Stellung der Räder sich stetig der stärksten Krümmung in der Kurve und dann wieder stetig dem geraden Lauf anpassen könnten. Die Bahn, die das Fahrzeug dabei beschriebe, wäre gekennzeichnet durch eine stetige Änderung der Krümmung von 0 bis 1/r und wieder bis 0 .

Warum die Trasse dann nicht gleich so bauen? Es gibt eine mathematische Kurve, bei der die Krümmung proportional der Bogenlänge ist: die Klothoide mit der Parameterdarstellung

$$x = k \cdot \int_0^t \cos(\frac{\pi}{2} \cdot \tau^2)d\tau \qquad , \quad y = k \cdot \int_0^t \sin(\frac{\pi}{2} \cdot \tau^2)d\tau$$

deren Intergrale nicht elementar auswertbar sind, und der Bogenlänge $s=k \cdot t$, wobei k ein Ähnlichkeitsfaktor ist. Diese Kurve wurde erstmals um 1860 von M.v.Leber untersucht und 1937 von L.Oerley in den Straßenbau eingeführt: Man schaltet zwischen dem (verkürzten) Kreisbogen und den beiden (verkürzten) Strecken zwei (passende) Klothoidenstücke ein (Abb.144c) und hat so eine stetige Änderung der Trassenkrümmung erreicht (siehe Menninger 1954/1958, S.94, und Kaspar/Schürba/Lorenz 1954/1968).

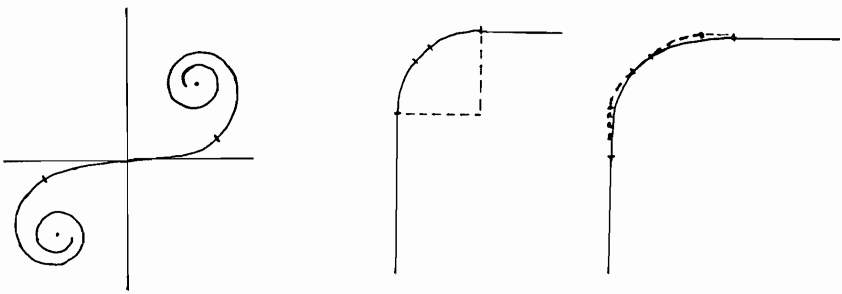
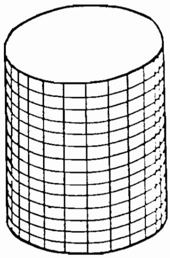
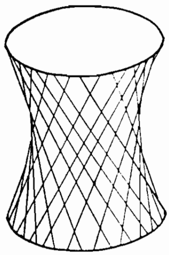


Abb.144 a b c

Rotations-Hyperboloid

Es gibt Papierkörbe in der Form von einschaligen Rotations-Hyperboloiden. Der Mantel ist an beiden Enden durch zwei gleich große verstärkte Ringe stabilisiert. Diese sind aber nicht durch parallele Stäbe miteinander verbunden, wodurch eine zylindrische Form entstünde (Abb.145). In dem Fall müßten dann die Querstreben, besonders wenn sie senkrecht zu den Mantellinien geflochten würden, stark gekrümmt werden und könnten nicht in den Ringen anfangen und enden (Abb.145a). Stattdessen geht die Konstruktion folgendermaßen: Die beiden Verstärkungsringe bilden Ober- und Unterkante eines gedachten senkrechten, endlichen Zylinders. Sie werden durch gerade Stäbe verbunden, aber die Enden eines Stabes liegen nicht genau übereinander, sondern sind um einen bestimmten Winkel gegeneinander gedreht. In der senkrechten Projektion sieht ein solcher Stab wie eine Kreissehne aus (Abb.146). Man kann leicht den Radius a der schmalsten Stelle in der halben Höhe des Papierkorbs ausrechnen: Ist α der Mittelpunktswinkel zwischen Anfang und Ende eines Stabes und haben die Verstärkungsringe den Radius r , dann ist $a = r \cdot \cos(\alpha/2)$, $0° \leq \alpha \leq 180°$. Es gibt dann zwei Scharen von Stäben, alle mit gleichem Neigungswinkel, nämlich die links- und die rechtsgeneigten (Abb.145b). Diese werden miteinander verflochten. Für das Flechten ist ein Neigungswinkel von 45° gegen den Boden günstig, weil dann die Stäbe einen Winkel von 90° gegeneinander haben. Um eine größere Höhe zu gewinnen und eine zu schmale Taille zu vermeiden, werden jedoch auch andere Winkel verwendet.





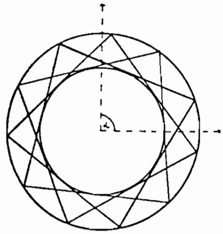


Abb.145 a b

Abb.146

Auf diese Art und Weise entsteht eine Fläche, die einschaliges Rotations-Hyperboloid genannt wird. Nun könnte man vielleicht meinen, die geschilderte Konstruktion der Fläche aus einer Schar einhüllender Tangenten verlange per se auch ihre analytische Behandlung. Das hieße allerdings. das POB auf eine verengte Weise anzuwenden, nämlich ein Anwendungsbeispiel als motivierenden 'Aufhänger' zu benutzen, um dann möglichst bald eine systematisierende (innermathematische) 'Stoffdurchnahme' anzuschließen. Zum einen würde man wohl kaum dem Hyperboloid als einem Vertreter der Flächen zweiten Grades gerecht, indem man es nur von einer (zugegeben wohl interessanten, aber) speziellen Eigenschaft ausgehend untersucht. Zum anderen entspräche dem POB allein eine Behandlung, die dem praktischen Kontext auch bei seiner Überschreitung verpflichtet bleibt, d.h. hier also: nicht Theorie der Quadriken im allgemeinen, sondern Analytische Geometrie des Papierkorbs im besonderen.

Die Gleichung des Hyperboloids lautet:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad \left(|z| \leqslant \frac{h}{2}\right)$$

(der Mittelpunkt des Papierkorbs liegt im Koordinatenursprung; seine Höhe ist h ; seine Rotationsachse ist die z-Achse). Man könnte diese Gleichung aus den Gleichungen der Stäbe gewinnen. Wir wollen sie jedoch als bekannt voraussetzen und nur nachrechnen, wie die Parameter a und b sich aus den Größen des Papierkorbs ergeben; ferner wollen wir bestätigen, daß die Stäbe in der Fläche liegen: Ist r der Radius der Öffnung und l die Länge der Stäbe, so ist die Länge s der projizierten Sehnen $s = \sqrt{l^2 - h^2}$. Dann ist

$$a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(2r)^2 + h^2 - l^2} \quad .$$

Für $|z| = h/2$ ist $x^2+y^2 = r^2$, und damit ist

$$\frac{r^2}{a^2} - 1 = \frac{h^2}{4b^2} \; ,$$

sowie

$$b = \frac{h}{2\sqrt{\frac{r^2}{a^2} - 1}} = \frac{h\sqrt{(2r)^2 + h^2 - l^2}}{2\sqrt{l^2 - h^2}}$$

Das Verhältnis $b/a \; (=h/\sqrt{l^2 - h^2})$ gibt die absolute Steigung der Stäbe gegen den Boden an (dabei sind r und l so zu wählen, daß überhaupt ein realer Korb entstehen kann, also $l > h$ und $2r > \sqrt{l^2 - h^2}$).

Jeder Stab liegt in einer Ebene senkrecht zum Boden, die die Taille des Papierkorbs (mit Radius a) berührt; und in jeder solchen Ebene liegt ein Stab. Jeder Stab liegt auch in einer dazu senkrechten Ebene, die gegen den Boden die Neigung $\pm\arctan(b/a)$ (in eine der beiden Richtungen) hat. Auch jede solche Ebene enthält einen Stab. Für die beiden Stäbe durch $(a,0,0)$ haben die Ebenen die Gleichung $x=a$ und $z=(\pm b/a)y$; allgemein lauten sie

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = a \,, \quad x\sin\varphi - y\cos\varphi = \pm \frac{a}{b} z$$

Dabei ist φ $(0^\circ \leq \varphi < 360^\circ)$ der Winkel in der x-y-Ebene links von der x-Achse; das Vorzeichen gibt an, ob die Gerade von der Außenseite des Papierkorbs gesehen nach rechts oder nach links steigt. Zu jedem Winkel φ gehört genau ein Geradenpaar und umgekehrt. Schneidet man nun die Oberfläche des Papierkorbs (als Menge die Vereinigung aller Geraden) mit einer Ebene durch die z-Achse, so ergibt sich als Schnittfigur eine Hyperbel. Wegen der Rotationssymmetrie kann man eine Ebene wählen, bei der die Gleichung besonders einfach wird, etwa die x-z-Ebene. Dann erhält man direkt die Gleichung des Hyperboloids: $y=0$ ergibt $x^2\cos^2\varphi = a^2$ und $x^2\sin^2\varphi = a^2 z^2/b^2$, und das wird zu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1\,.$$

D.h.: alle Punkte liegen auf der Hyperbel, und aus Stetigkeitsgründen sonst keine. Die zugehörige Rotationsfigur um die z-Achse hat dann die oben angegebene Gleichung des Hyperboloids. Man erhält sie auch direkt durch Quadrieren und Addieren der beiden Geradengleichungen.

Für Kraftwerks-Kühltürme ist aus strömungstechnischen Gründen die Hyperboloidform günstig. Das Prinzip eines der Bauverfahren ist wie das für den Papierkorb beschriebene: Von einem stabilen Ring aus, der in die geeignete Höhe gebracht wird, werden Stahlseile geradlinig mit entsprechender Neigung zum Boden gespannt. Diese Seile bilden dann ein Grundnetz für die Wand des Kühlturms. Ein solcher ist z.B. in Brauner/Kickinger (1982) beschrieben.

Zykloide

Die Kurve, die ein Punkt eines Kreises beschreibt, wenn man diesen auf einer Geraden abrollt, heißt Zykloide. Christian Huygens, einer der großen Physiker des 17. Jahrhunderts, verwandte sie auf raffinierte Art zum Entwurf eines Fadenpendels, dessen Schhwingungsdauer von der Amplitude streng unabhängig ist (sog. Zykloidenpendel). Letzteres ist der Fall, wenn der Pendelkörper sich statt auf einem Kreisbogen auf einer Zykloide bewegt. Huygens bleibt aber nicht bei dieser Erkenntnis stehen, er weiß sie auch zu realisieren: Man befestigt dazu auf beiden Seiten des Aufhängepunktes je eine zykloidenförmige Backe, an die sich der Pendelfaden bei seiner Schwingung anlegt. Der Pendelkörper bewegt sich dann auf einer Evolvente der Zykloide, und das ist wiederum eine zu dieser kongruente

Zykloide. Ein solches Pendel fand Verwendung in der Uhr des alten Lemberger Rathauses, die der österreichische Ingenieur Stampfer konstruiert hat.

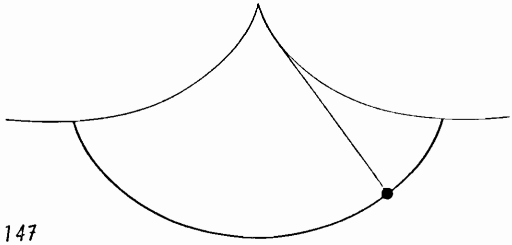


Abb.147

Parabel

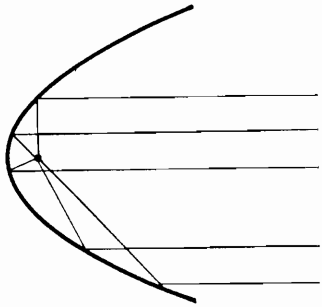


Abb.148

Die Parabel, bzw. das Paraboloid, wirft die Stahlen, die parallel zur Achse einfallen, in den Brennpunkt bzw. reflektiert alle, die von diesem ausgehen, parallel zur Achse. Sie tritt am Teleskop und am Scheinwerfer auf. In diesen Zusammenhang gehört auch die Ellipse mit ihrem Strahlengang von Brennpunkt zu Brennpunkt (z.B. der Nierenstein-Zertrümmerer in Abb.37).

Kettenlinie

Von den vielen geometrischen Sonderformen wollen wir lediglich noch die Kettenlinie $y = \cosh(ax)/a = (e^{ax} + e^{-ax})/2a$ erwähnen, als welche sich ein unendlich dünner Bindfaden mit gleichmäßiger Massenbelegung ausbildet, der an beiden Enden festgehalten wird. Hängebrücken werden als Kettenlinien gebaut.

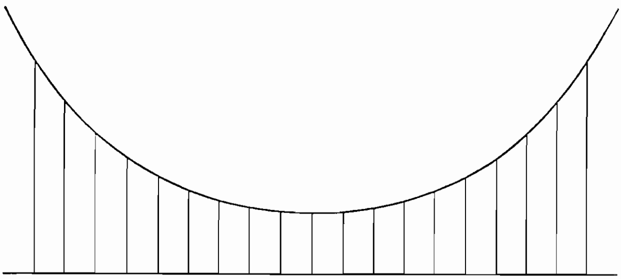


Abb.149

2.3.12. Praktisches Axiomenverständnis

An vielen Beispielen haben wir bislang die Leistung des POB beim Erwerb geometrischer Begriffe verfolgt. Die Frage liegt daher nahe: Ermöglichen die Kategorien des Operativen auch ein Verständnis von Axiomen? Nicht um die anschauliche Evidenz von Grundsätzen soll es dabei vornehmlich gehen, sondern darum, die Grundsätze in einem praktischen Kontext (möglichst operativ) verstehbar zu machen. In strengster Auslegung hieße das, geometrische Axiome operativ zu begründen, z.B. Aussagen über Ebenen und ihre Punkte auf entsprechende Homogenitätsschemata zurückzuführen. Kapitel 10 wird zeigen, daß ein solches Unterfangen schwierig genug ist.

Didaktischen Anforderungen genügt aber schon ein praktisches Verständnis unter operativen Aspekten. Am Phänomen des Tischwackelns wurde in Bender (1978, S.27ff) illustriert, wie wir uns ein solches mit der Realität verbundenes Verstehen von Axiomen vorstellen, hier: durch drei nicht-kollineare Punkte geht genau eine Ebene. Oder: Bei der Herstellung der tetraederförmigen Getränkeverpackung entsteht eine plastische Form dadurch, daß zwei Kanten windschief angesetzt werden (siehe Abb.121c). Das zugehörige Axiom fordert die Existenz von vier nicht-kollinearen Punkten. Und: Für das Axiom 'durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade' wird in der didaktischen Literatur und in Schulbüchern gern das Einfluchten der Stäbe bei Geländevermessungen als Beispiel angeführt. Vom operativen Standpunkt aus gibt es geeignetere Beispiele, z.B. die Lagerung einer Drehachse in drei Scharnieren (an Türen, Fenstern, Gitarrenkoffer; Abb.150). Bei Verwendung von drei Scharnieren wird die Mechanik (wegen kürzerer Hebelarme) weniger belastet, und das Drehelement paßt besser in sein Lager. Zugleich ist aber auch eine besonders genaue und stabile Verarbeitung erforderlich, da es sonst - eben wegen des im Axiom ausgedrückten Sachverhalts - Schwierigkeiten bereitet, das Drehelement in alle drei Scharniere simultan einzuhängen.

Abb.150

Axiome stehen, mittel- oder unmittelbar, hinter jeder Form des Geometrietreibens; natürlich nicht nur Inzidenz- und Existenzaxiome, sondern auch

Kongruenz- und Stetigkeitsaxiome (in der Hilbertschen Axiomatik), auf denen u.a. das Messen direkt beruht, und Anordnungsaxiome, die wesentlich für elementare topologische Beziehungen sind.

2.3.13. Topologische Begriffe

Nach unserer Auffassung hat der Geometrie-Unterricht vor allem die Aufgabe, den wirklichen Raum zu strukturieren und die Nutzbarkeit dieser Struktur zu erforschen. So wie sich die für uns relevante räumliche Wirklichkeit darstellt, bedeutet das zuerst Beschäftigung mit euklidischen Sachverhalten. Zweifellos werden dafür eine Reihe topologischer Begriffe vorausgesetzt (Berühren, Enthalten, Zerlegen, Kurve, Fläche usw.). Sie werden im Geometrie-Unterricht meist nicht thematisiert, weil das naive Verständnis dieser Begriffe, das man i.a. durch die Lebenserfahrung und auch implizit im Unterricht erwirbt, für den Umgang mit ihnen in der Regel ausreicht. Umstritten sind daher die Vorschläge, solche topologische Begriffe etwa im 1. Schuljahr auch explizit zu behandeln (vgl. die umfassende Diskussion in Schipper (1981)). Die Situationen, in denen diese Begriffe diskutiert werden, sind oft gekünstelt (z.B. Abb.151).

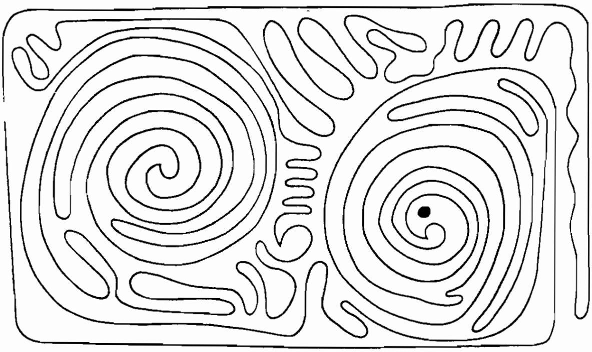


Abb.151 *Drinnen oder draußen?*

Häufig kann der Unterricht gar nichts zur Vertiefung der sowieso schon ansatzweise erworbenen Begriffe beitragen, bzw. zwecks Verschärfung müßten diese in einen sie relativierenden Kontext gestellt werden, der die Schüler (jedenfalls im 1. Schuljahr) eher verwirrt (z.B.: Ist ein Drahtkäfig mit verschlossener Tür eigentlich offen oder geschlossen?). Ein nicht hinterfragter Umgang mit diesen Begriffen bei inhaltlichen geometrischen Fragestellungen erscheint uns da passender, besonders vom operativen Standpunkt aus.

Auch aus operativer Sicht existieren durchaus interessante eigenständige topologische Fragestellungen. Zunächst müssen wir jedoch fragen, was denn eigentlich die Topologie von der Geometrie unterscheidet. (In der Mathematik ist die Trennung zwischen beiden Disziplinen schon weitgehend vollzogen, und zwar aus systematischen Gründen.) Zur Beantwortung dieser Frage nehmen wir uns das POB vor und versuchen, es auf topologische Begriffe anzuwenden: Wir haben als geometrische Schlüsselfunktion das Passen genannt, und eng verbunden damit die Idee des starren Körpers. Zwar haben wir Passen zunächst sehr allgemein als Inzidenz von Oberflächen(-teilen) definiert, und diese Definition ließe sich ohne weiteres auch auf topologische Sachverhalte übertragen. Das zweckentsprechende Passen beginnt aber in der Geometrie im allgemeinen erst dann, wenn ausgedehntere Berührstellen vorliegen und es bei gewissen Bewegungen erhalten bleibt. Hier stoßen wir also auf den Begriff des starren Körpers. Mit diesem hat es die Topologie nicht zu tun, und zweckerfüllende Realisierung topologischer Paßverhältnisse sind gleichfalls anderer Natur (z.B. Knoten). Der Ausdruck 'Passen' ist daher in der Topologie nicht angebracht. Wo - wie in der kombinatorischen Topologie - das genaue Aufeinanderpassen von Bereichen für gewisse theoretische Aussagen wesentliche Voraussetzung ist, ist wiederum die Realisierung uninteressant.

Geometrische Begriffe werden im allgemeinen nur exhaustiv realisiert; bei topologischen Begriffen gibt es eine solche Realisierung durch Ausschöpfung nicht. Entweder ist eine Linie geschlossen oder nicht, berühren sich zwei Objekte oder nicht, ist eine Menge einfach zusammenhängend oder nicht. In ihrer Allgemeinheit läßt die Topologie zwar die abstrusesten Konstruktionen zu, bei denen nicht leicht zu entscheiden ist, ob ihnen gewisse Eigenschaften zukommen (ein vergleichsweise harmloses Beispiel ist die Aufgabe aus Abb.151), und gewisse Räume werden auch als Limites anderer Räume definiert - das sind aber alles keine Fragen der Realisation, und schon gar nicht einer an Zwecke gebundenen. Beispiele für topologische Exhaustionen sind Realisierungen von Flächen, Linien oder Punkten durch dünne Platten bzw. Stangen und Kugeln.

Schließlich sind auch die Ununterscheidbarkeitsforderungen in der Topologie naturgemäß andere als in der Geometrie. Es stehen ja andersartige, und zwar weitaus schwächere Mittel zur Verfügung, um etwa Stellen einer Fläche zu unterscheiden. Z.B. lassen sich topologisch nicht die Ecken einer ganzen Würfeloberfläche von den inneren Punkten einer Seitenfläche unterscheiden, wohl aber die Randpunkte eines Quadrats von dessen inneren Punkten oder Doppelpunkte einer Kurve von deren einfachen Punkten. Bei jeglicher praktischen Realisierung werden aber solche Gebilde sämtlich als Vollkörper mit Hohlräumen und Henkeln materialisiert (Abb.152); dabei lassen sich lediglich Stellen auf der äußeren Oberfläche von solchen auf inneren Oberflächen und solchen im Innern des Körpers unterscheiden, und diese Unterscheidung ist irrelevant oder trivial.

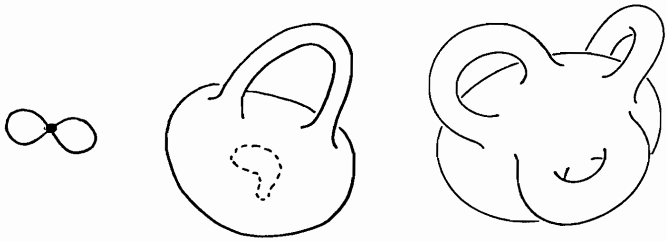


Abb.152

Die Topologie hält aber auch einiges bereit, das für Anwendungen bedeutsam ist. Vornehmlich geht es da um topologische Strukturen im Großen, z.B. die Frage nach der Anzahl der Hohlräume eines Vollkörpers und seiner Henkelstruktur. Das sind Themen von Graphentheorie, Knotentheorie und Homotopie-Theorie. Dazu zunächst einige Beispiele von Alltagsphänomenen, bei denen ein solcher topologischer Hintergrund bedeutsam ist.

Wildschweingehege

Der praktische Unterschied zwischen dem geschlossenen und dem offenen Eingangstor eines Wildschweingeheges bedarf wohl keiner Erörterung. Im einen Fall sind die Wildschweine eingesperrt, im anderen können sie entweichen. Die Maschen des Zauns sind genügend eng, und der Zaun selbst ist so hoch, daß die Wildschweine ihn nicht überwinden können. Von ihrer Bewegungsfreiheit her befinden sie sich im Hohlraum eines Vollkörpers, den man sich vom Erdboden, vom Zaun mit seinen Maschen und von einer horizontalen Raumschicht über der maximalen Sprunghöhe begrenzt vorzustellen hat. Dieser Körper trennt den Hohlraum vom Außenraum vollständig; die Wildschweine sind gefangen. Das Tor öffnen heißt, ein Stück des Vollkörpers entfernen, so daß der (vorherige) Hohl- und der Außenraum durch einen Kanal verbunden sind und es gar keinen Hohlraum mehr gibt. Der Körper ist dann topologisch äquivalent zu einem Vollgummiball. Für die Wildschweine ist es ohne Belang, welche der beiden geometrischen (oder sonstigen topologisch äquivalenten) Formen der Körper annimmt. Jedesmal gibt es nur einen Raum, nämlich den Außenraum, in dem sie sich befinden und frei bewegen können. Das umgangssprachliche Verständnis von 'innen' weicht von dem implizit im Beispiel verwendeten ab. Üblicherweise bleibt der Vollkörper mit Hohlraum auch nach dem Öffnen des Tors erhalten; denn so wie wir uns die Zaunmaschen materialisiert dachten, ergänzt man unwillkürlich auch bei geöffnetem Tor diese Lücke des Zauns durch eine Grenzwand und hat so nach wie vor einen Innen-(Hohl-)raum sowie einen Außenraum. Handelt es sich um Elefanten statt um Wildschweine, so stimmen die faktischen Gegebenheiten mit diesem topologischen Modell überein, vorausgesetzt, das Tor ist schmal und der Zaun stabil und hoch genug. Für eine Fliege dagegen würde das ganze Zaunwerk eine Vollkugel mit sehr vielen Henkeln darstellen und ihr keinerlei Raum (außer dem von ihm selbst eingenommenen) versperren.

Die Bearbeitung solcher Fragen im Unterricht der Grundschule führt manchmal zu Mißverständnissen, nämlich dann, wenn man zwar das eben skizzierte Verständnis von 'innen' und 'außen' zugrunde legt, dieses aber durch die Bewegungsmöglichkeiten von Lebewesen operationalisiert.

Der Unterschied zwischen einem Vollkörper mit und einem ohne Hohlraum läßt sich topologisch durch Zusammenziehbarkeitseigenschaften beschreiben: In den ersten kann eine (topologische) Kugeloberfläche (2-Sphäre) eingebettet werden, so daß sie nicht in ihm auf einen Punkt zusammengezogen werden kann (ohne zu reißen oder den Körper zu verlassen), im zweiten kann jede eingebettete 2-Sphäre zusammengezogen werden. (Selbstredend läßt sich diese Prüfung real nicht so durchführen.)

Angeketteter Hund

Wie ist die Situation topologisch zu beschreiben, wenn ein Hund mit einer Schlinge seiner Leine an einen Laternenpfahl gebunden wird? - Zusammen mit der Leine kann man den Hund als Vollkugel mit einem Henkel auffassen (Abb.153a), und diese wiederum ist homotopieäquivalent (d.h. sie hat dieselben Zusammenziehbarkeitseigenschaften, ist aber nicht notwendig homöomorph) zu einem (topologischen) Kreis (1-Sphäre). Wäre die Leine lang genug, die Schlinge weit genug und der Hund geschickt genug oder der Pfahl kurz genug, dann könnte der Hund die Schlinge vom Pfahl streifen. Da er das in der Realität nicht kann, muß eine adäquate topologische Beschreibung die Stange als unendlich lang annehmen. Wäre nun aber die Schlinge sehr groß, etwa mit einem Durchmesser über 13.000 km, so könnte sie nach unten über die Erdkugel gestreift werden und der Hund sich vom Pfahl befreien. Damit das unmöglich wird, setzt man auf die Erde eine weitere unendliche Stange - und zwar nicht in dasjenige der beiden durch die Schlinge definierten Gebiete auf der Erdoberfläche, in dem bereits die erste Stange steht ('innen') (Abb.153b). Denselben Effekt hätte man auch erzielt, wenn man gleich die erste Stange nicht unendlich lang gemacht, sondern gekrümmt und mit ihrem Ende im Erdboden verankert hätte, und zwar auch wieder im Gebiet 'außerhalb' der Schlinge (Abb.153c). Dadurch ist schließlich eine Konfiguration aus zwei durcheinander geführten Ringen entstanden, die im dreidimensionalen euklidischen Raum untrennbar sind; man kennt sie von Kettengliedern und von Schlüsselringen her oder als Symbol für die Unauflösbarkeit der Ehe.

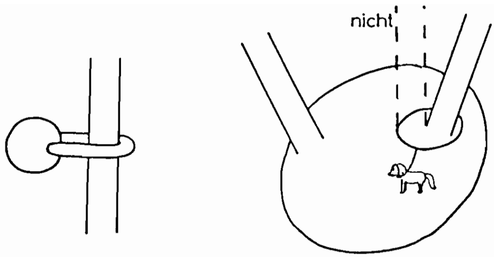


Abb. 153 a b c

Der Sachverhalt stellt sich topologisch so dar: im dreidimensionalen euklidischen Raum ist jede 1-Sphäre zusammenziehbar, d.h. der ganze Raum ist einfach zusammenhängend. Diese Eigenschaft bleibt auch erhalten, wenn dem Raum gewisse (endliche) Stücke fehlen (wo sich etwa eine Vollkugel befindet), die also nicht zu einer Zusammenziehbewegung zur Verfügung stehen, ja sogar auch dann noch, wenn ein ganzer (topologischer) Strahl fehlt. Der einfache Zusammenhang geht erst verloren, wenn eine ganze (topologische) Gerade oder eine 1-Sphäre fehlt. Dann gibt es nämlich 1-Sphären im Raum, die sich nicht zusammenziehen lassen (ohne zu reißen oder bei der Bewegung Bereiche zu benötigen, die gar nicht zum Raum gehören).

Schnürsenkel

Schließlich noch einige Bemerkungen zur Topologie von Knoten: Jeder weiß zwar, was ein Knoten ist, die meisten geraten aber in Schwierigkeiten, wenn sie die Funktionsweise erklären sollen. Etwas vage könnte man einen Knoten definieren als ein Seil, das so gelegt ist, daß es sich selbst dauernd im Wege ist. Beim Schuhschnüren stellt man fest, daß es verschiedene Arten von Knoten gibt:

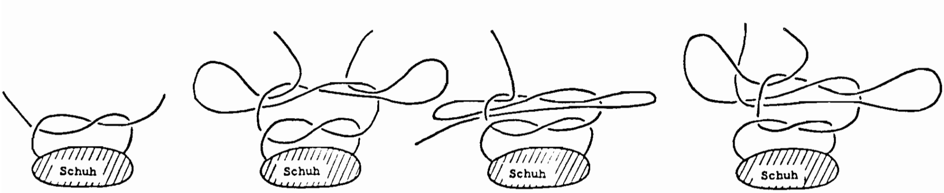


Abb. 154 a b c d

Schnürt man korrekt (Abb.154b,c), dann läßt sich der Knoten danach einfach durch Zug an den beiden Enden lösen (vorher war er nur durch physikalische Kräfte zusammengehalten worden; die Druckkraft des Fußes wirkt nicht in der Richtung, in der sich der Senkel bewegen könnte, während die Zugkraft an den Enden des Senkels genau die richtige Richtung hat). Macht man einen Fehler beim Schnüren (Abb.154d), so kommt es vor, daß man den Knoten nicht so einfach lösen kann, sondern daß er sich noch verengt und man ihn über die Enden streifen muß. Auf diese Art und Weise läßt sich natürlich jeder Knoten auflösen; will man daher die Knoten nach ihrer Auflösbarkeit klassifizieren, dann muß man die Seile entweder unendlich lang machen oder ihre beiden Enden fest miteinander verbinden. (Für das praktische Schürzen eines Knotens muß man zuerst die Enden lösen, den Knoten herstellen und sie dann wieder schließen.) In diesem Fall hat man eine Vollkugel mit einem Henkel bzw. - für die Knotentheorie völlig adäquat - eine geschlossene, doppelpunktfreie Kurve (topologischer Kreis, 1-Sphäre). Jeder Knoten ist also eine 1-Sphäre. Woher kommen dann die unterschiedlichen Eigenschaften verschiedener Knoten? - Nicht die 1-Sphäre für sich genommen, sondern die Art und Weise, in der sie in den Raum eingebettet ist, also die Struktur des umgebenden Raumes ist der Knoten.

Abb.155 Unterschiedliche Knoten

Auch diese Strukturen lassen sich wieder mit Zusammenziehbarkeitseigenschaften charakterisieren. Sie können beliebig komplex werden. Der Wollfaden, aus dem z.B. ein Schal gestrickt ist, bildet nur scheinbar einen komplizierten Knoten. Tatsächlich stellt aber ein Schal (wie überhaupt alles Gestrickte) prinzipiell einen sehr einfachen Knoten dar: Entfernt man die am Rand verarbeiteten Fäden, so kann der Schal mit Leichtigkeit aufgezogen werden. Als Knoten ist er nichts anderes als eine Strecke.

Was ist nun an all diesen Beispielen operativ? Ausgehend vom Bereich menschlicher Bedürfnisse (hier: Tiere am Weglaufen hindern, feste Verbindung zwischen Gegenständen herstellen) werden topologische Funktionen räumlicher Objekte ausgenutzt: Um für bestimmte Körper die Bewegungsfreiheit einzuschränken, werden Hindernisse aufgestellt. Zwei Körper können sich nicht gleichzeitig am gleichen Ort befinden, also haben die Hindernisse die Wirkung von Löchern im (Bewegungs-)Raum, die man nicht betreten kann. Durch eine geeignete Gestaltung der Hindernisse läßt sich erreichen, daß der Raum in zwei Zusammenhangskomponenten zerfällt (Wegnahme einer 2-Sphäre) oder den einfachen Zusammenhang verliert (Wegnahme einer 1-Sphäre). Auf diese Art und Weise kann man sich etwa die Idee der 1-Sphäre und der 2-Sphäre entstanden denken. Realisiert werden sie als Vollkörper mit Hohlraum (Hohlkugel mit dicker Schale) bzw. als Volltorus.

Dabei ist die Realisierung von Kurven und Flächen als dreidimensionale Gebilde nicht wesentlich; die zugrundeliegenden Ideen werden auch nicht exhaustiv, sondern vollständig realisiert. Es kommt aber durchaus vor, daß man sie nicht vollständig materialisiert, z.B.: Maschenzaun und fehlendes Dach beim Gehege oder endlich langer, nicht geschlossener Laternenpfahl. Gerade weil häufig die Beziehung zwischen topologischer Idee und Realisat schwer auszumachen ist und viele topololische Sachverhalte vergleichsweise elementar sind, steht das POB in der Topologie weniger im Vordergrund als in der Geometrie. In der Topologie sind zur Zweckerfüllung Homogenitäten weniger wichtig, stattdessen jedoch Abweichungen von Homogenitäten noch wichtiger als in der Geometrie. Das liegt einfach daran, daß die Topologie weniger Mittel zur Feststellung von etwaigen Inhomogenitäten zur Verfügung hat; es gibt also in der Topologie viel mehr homogene Gebilde als in der Geometrie.

Geometrie und Topologie können ihre enge Verwandtschaft nicht leugnen. Zahlreiche geometrische Begriffe stammen aus der Topologie oder lassen sich zu topologischen verallgemeinern. Manchmal wird eine geometrische Idee erst im topologischen Kontext voll verständlich oder wirksam. Wir haben z.B. das nicht-orientierbare Möbius-Band als einen Anhaltspunkt bei der Bildung des Orientierungsbegriffs vorgeschlagen; oder zum Studium der Polyeder auf den Eulerschen Polyedersatz hingewiesen. Solche Bezüge zur Topologie hätten noch an vielen anderen Gegenständen hergestellt werden können.

2.4. Geometrische Realisierungen

Wir wenden uns nun der dritten Konstituenten operativer Begriffsbildung zu: der Realisierung geometrischer Formen. Naturgemäß sind viele der einschlägigen Probleme technischer Art und daher nicht Gegenstand des Geometrie-Unterrichts; außerdem haben wir verschiedene Fragen der Realisierung schon bei einzelnen Formen mitbehandelt.

Nun möchten wir zunächst den Einfluß von Genauigkeitsanforderungen besprechen. Als eigenes Gebiet von Realisierungsfragen behandeln wir dann die Modellbildung. Die Bedeutung geometrischer Modellbildung reicht über den Unterricht weit hinaus: Bei zahllosen technischen geometrischen Problemen ist die Verwendung von Modellen unerläßlich, mindestens aber hilfreich und ökonomisch, seien es naturgetreue dreidimensionale Nachbildungen, seien es Zeichnungen, oder seien es noch abstraktere Objekte, wie die Maße eines Körpers. Auch das Messen fassen wir als eine Art der Modellbildung auf. Geometrische Modelle spielen darüber hinaus außerhalb der Geometrie eine fundamentale Rolle bei Begriffsbildung, Kommunikation und Problemlösen. Schließlich berühren wir das Gebiet der bildenden Kunst, dort ist nämlich das Herstellen von Dingen etwas weitgehend zum geometrischen Realisieren Analoges. Nur stehen künstlerische Objekte in einem ästhetischen Kontext und kaum mehr in einem unmittelbar von materiellen Zwecken bestimmten Zusammenhang.

In Kapitel 9 werden wir Fragen der Realisierung noch einmal auf einem theoretischeren Niveau behandeln.

2.4.1. Die Güte von Realisierungen

Woran sieht man eigentlich einer Fläche an, daß sie eben ist? - Eine polierte Tischplatte erweist sich unter einem genügend starken Mikroskop als zerklüftete Landschaft; und der scheinbar ebene Fußboden eines Zimmers ist in Wirklichkeit Teil einer Kugelfläche (genauer: einer Ellipsoidenfläche), wie man im Prinzip feststellen könnte, wenn man das Zimmer nur 'groß genug' machte. Im Bereich des Sports gibt es deutlich Qualitätsunterschiede zwischen den Ebenen, die bei verschiedenen Sportarten gebraucht werden. Man vergleiche nur einmal Curling, Kegeln, Billard, Prellball, Tennis, Fußball oder Schwimmen: Die Eisbahn eignet sich nicht zum Fußballspielen, auf dem Rasenplatz ist Billard unmöglich, auf dem Belag eines Billardtisches würde sich der Eisstock nicht bewegen usw. Sicherlich spielen hierbei die Größenordnungen und auch Materialeigenschaften eine Rolle; entscheidend ist jedoch dies: die jeweiligen Ebenen sind in verschiedenen Güten realisiert, und diese Güten sind durch den Zweck bestimmt.

Es kann durchaus sein, daß 'schlechter' realisierte Formen ihren Zweck besser erfüllen. So wird beim Asphaltbelag auf Fahrstraßen oder beim Tuch der Flanelltafel auf Rauheit Wert gelegt. Ein weiteres Beispiel für einen bewußten Verzicht auf praktisch durchaus mögliche gute Annäherung an eine geometrische Idee stellt das Abrunden von Kanten dar: am Würfel, damit er überhaupt rollen kann; an Möbelkanten, damit man sich nicht verletzt; an der Messerschneide, damit sie nicht schartig wird. Und so sind wir wieder allgemeiner auf die Bedeutung von Inhomogenitäten gestoßen. Es kommt auch umgekehrt vor, daß Formen besser als vom Zweck her nötig realisiert werden. Z.B. ist oft die sehr glatte Oberfläche von Kunststoffen nicht funktional, sondern durch das Herstellverfahren bedingt, und es wäre in vielen Fällen sinnlos, die Oberfläche künstlich aufzurauhen.

Bei geeigneten Verfahren kann auch die Qualität der Werkstücke durchaus die der Werkzeuge übertreffen. So kann man mit der bloßen Hand schon einigermaßen ebene

Flächen aus Teig herstellen, oder trotz eines Astlochs im Streichbrett einen guten Glattstrich erzielen. Mängel im Werkzeug werden durch homogenisierende Bewegungen ausgeglichen. Dennoch besteht natürlich zwischen gutem Werkzeug und gutem Werkstück ein positiver Zusammenhang.

Nur wird oft nicht beachtet, daß es zur Herstellung geometrischer Formen überhaupt Werkzeuge, d.h. bereits anderweitig realisierter geometrischer Formen bedarf. In der Schule wird die Gerade z.B. gerne als Kreidestrich an der Tafel, etwa als Spur eines bewegten Punktes 'eingeführt'. Dabei geht zwar die Werkzeugeigenschaft des Kreidestücks ein, seine Spitze ist der erzeugende Punkt: leicht wird indes übersehen, daß bereits eine Zeichenebene da sein muß und daß dann immer noch ein Problem darin liegt, die Geradführung ohne zusätzliche Anlehnung an eine gerade Linie (Tafelrand, Lineal) zu gewährleisten.

Die entsprechenden Schwierigkeiten sind auch beim Kreis vorhanden. Zwar entfällt das Problem der konstanten Richtung, und der Abstand zu einem festen Punkt läßt sich leicht mit einer Schnur konstant halten; aber auch hier wird eine Zeichenebene vorausgesetzt, und außerdem benötigt man für die Konstanz des Abstandes ein Realisat des starren Körpers, nämlich die gespannte Schnur. Jegliche Geometrie in der Realität basiert zwar auf der Idee des im Zeitablauf (zumindest partiell) starren Körpers; in der Kreiserzeugung ist jedoch ein weitergehender Begriff von Starrheit enthalten, nämlich die Invarianz gegenüber Bewegungen (Kongruenz). Schließlich muß man noch bedenken, daß Gerade und Kreis für sich nicht als reale zweckvolle Formen existieren können und daß die Herstellung solcher schon gar nicht durch Bewegung eines Punktes oder einer Linie erfolgt, sondern Realisate von Formen voraussetzt.

So werden z.B. Flanschringe zum Einfassen von Behältern normalerweise geschmiedet oder gegossen. Dazu braucht man eine Schmiedepresse oder eine Gußform. In der Schwerindustrie verwendet man Großbehälter mit mehreren Metern Durchmesser. und die Presse oder die Form müßten entsprechend groß und teuer angelegt werden. Auf der Hannovermesse 1978 wurde ein solcher Flanschring von 4 m Durchmesser und 8 t Gewicht vorgeführt, der weder geschmiedet noch gegossen, sondern geschweißt war; und zwar waren nicht Einzelteile aneinandergeschweißt, sondern mit einer zentralen Schweißmaschine war der ganz langsam rotierende Ringkörper mit Schweißmaterial allmählich (in 320 Stunden) aufgebaut worden. Die Zähigkeit eines solchen Ringes ist weit größer als bei herkömmlichen Methoden; außerdem kann er am Verwendungsort gefertigt und braucht nicht umständlich und teuer transportiert zu werden. Trotz all dieser Vorteile hat es bis dahin gedauert, ehe man technisch so weit war, auf eine Gußform oder ähnliches verzichten zu können. Natürlich braucht man auch bei dieser Herstellweise immer noch andere geometrische Formen, etwa eine ebene rotierende Unterlage.

Überhaupt bereiten große Maße oft auch große Schwierigkeiten bei der Herstellung, und zwar vor allem dann, wenn ein Werkstück 'aus einem Guß' (nicht wörtlich zu nehmen) bestehen soll. Meistens ist es nicht möglich, die Werkzeuge entsprechend zu dimensionieren, und wo es möglich ist, verlagern sich damit die Probleme wiederum auf deren Herstellung. Ein einfaches Exempel: Man versuche einmal, ein großes Blatt Papier durch zwei weit voneinander entfernte Punkte zu falten.

2.4.2. Modelle geometrischer Formen

Wo immer in Handwerk, Industrie und auch in der Kunst ein Werkstück hergestellt wird, das gewissen Genauigkeitsanforderungen unterliegt oder einen nicht allzu simplen (räumlichen) Aufbau hat, da wird zunächst ein Modell angefertigt, eine kongruente Kopie aus billigem Material, eine ähnliche Verkleinerung, eine Konstruktionszeichnung, eine Skizze oder nur eine verbale Beschreibung. Von einem Modell wollen wir immer dann reden, wenn es nicht den geometrischen Zweck erfüllen soll, der über operative Begriffsbildung zu einer bestimmten Form geführt hat, sondern anstelle eines eigentlich zweckerfüllenden Realisates dieser Form gewisse Hilfsfunktionen übernimmt. Ein Modell ist irgendwo zwischen der Idee selbst und dem 'echten' Realisat angesiedelt, kann aber im Extremfall durchaus auch mit einem von beiden zusammenfallen.

Was sind solche Hilfsfunktionen, die die Modellbildung übernimmt?

Ökonomie: Viele praktische Probleme, z.B. die Luftströmungsverhältnisse an einer Autokarosserie, können aus ökonomischen Gründen nicht mit den zum späteren Gebrauch bestimmten Realisaten angegangen werden. Auch die Transformation auf das ideelle Niveau bringt häufig keinen Erfolg, vielleicht weil geeignete numerische Verfahren noch nicht vorhanden oder zu aufwendig sind oder weil dabei Schwierigkeiten anderer Art übersehen werden. Hier (bei der Karosserie) kann eine Simulation im Windkanal ein ökonomisches Verfahren zum Finden einer Lösung darstellen.

Raumanschauung: Oft hätte man während der Herstellung eines Gebrauchsgegenstandes (Haus, Maschine, Kunstplastik usw.) nur eine sehr eingeschränkte Vorstellung von seiner endgültigen räumlichen Struktur, wenn man sich nicht vorher ein gutes Modell (Holzmodell, Konstruktionsplan, Skizze usw.) anfertigen würde.

Kommunikation: Modelle erleichtern die Kommunikation über Gegenstände aller Art, wobei dann auch wieder die ersten beiden Aspekte (Ökonomie und Raumanschauung) bedeutsam werden.

Gute Modelle sind so gebildet, daß die für ihre Hilfsfunktionen unwesentlichen Eigenschaften fehlen. Eine Hauptschwierigkeit besteht dann allerdings darin, zu erkennen, welches die wesentlichen Eigenschaften sind, und sie ins Modell aufzunehmen. Modellbildung stellt also eine Art von Abstraktion dar, darf aber keineswegs für abstraktive Begriffsbildugung in der Geometrie gehalten werden.

Bei der Entwicklung tetraederförmiger Getränkeverpackungen z.B. scheint als Modellösung vielleicht in einem ersten Schritt ein Zusammenschweißen der Ränder der Netze in Abb.122b,c. Sieht man die Aufgabe rein geometrisch, so übersieht man dabei jedoch Dichtheitsprobleme. Tatsächlich stellt sich heraus, daß die beiden Ecken, an denen zwei Kanten zusammenstoßen, leicht undicht werden. Erst die endgültige Lösung (Abb.122a) ist dann befriedigend.

In metallverarbeitenden Betrieben ist häufig die Modellschreinerei eine der wichtigsten Abteilungen. Holz ist leicht zu bearbeiten, die Modelle werden in handlicher Größe gefertigt, und mit ihrer Hilfe wird das Passen eingerichtet bzw. überprüft. In der Schule dagegen degeneriert die Arbeit mit körperlichen Modellen, falls sie überhaupt stattfindet, häufig zu bloßem Betrachten und Beschreiben von Voll-, Flächen- oder Kantenmodellen. Da ist es schon viel wert, wenn die Schüler wenigstens die Körper selbst herstellen.

Reliefs bilden den Übergang zu <u>ebenen</u> Modellen. Das Herstellen (und Durchschauen) ebener Modelle ist die allgemeine Aufgabe der Darstellenden Geometrie; zu ihr zählen wir nicht nur die speziellen Techniken, die üblicherweise unter diese Bezeichnung subsumiert werden, sondern auch Fotografie, Konstruktionspläne, Zeichnungen aller Arten und Genauigkeitsgrade, Papierstücke als Möbelgrundrisse (die sich auf Wohnungsgrundrissen hin- und herschieben lassen), Anaglyphen.

Was man wiederum in der Schule normalerweise an ebener Geometrie praktiziert, gehört nicht zur Darstellenden Geometrie, da man das (Begriffs-) System der ebenen Geometrie gar nicht als Modell für das der räumlichen auffaßt und die Zeichnungen höchstens Modelle für die Begriffe der ebenen Geometrie sind.

<u>Modellbildung</u> kann durchaus ganz auf <u>ideellem</u> Niveau stattfinden:

'Modellgeometrien' wie die auf der Kugel oder auf dem Torus veranschaulichen in bekannter Weise Alternativen zur Euklidizität des (physikalischen) Raums. Zugleich tragen sie durch ihre Kontrastwirkung auch zur Stabilisierung euklidischer Begriffe bei.

Die Geometrie der Ebene ist zwar ein (ideelles) Modell für die Geometrie des Raumes. Die Verwendung zweidimensionaler Modelle (ob ideell oder nicht) ist aber eine beträchtliche Quelle unzulässiger Abstraktionen. Freilich lassen sich ebene Figuren leichter darstellen und durchschauen, und daher verzichtet man nur ungern auf diese Art der Modellbildung; gleichwohl ist sie mit besonderer Vorsicht zu handhaben. Hingegen wäre der $\mathbf{R}^3$ als affiner Raum ein brauchbares Modell (das übrigens reicher strukturiert ist als das Original). Insbesondere lassen sich in ihm Bewegungen des starren Körpers adäquat beschreiben. Der Begriff der Kongruenzabbildung allerdings ('Bewegung' als Permutation des Raumes) leistet dies vom operativen Standpunkt aus nicht, da es dabei nur auf 'Anfangs- und Endzustand' ankommt, während zum Funktionieren vieler geometrischer Formen auch die Zwischenzustände gehören und bei der Modellbildung berücksichtigt werden müssen.

So kann man, im Unterschied zur Realität, abbildungsgeometrisch durchaus einen geknickten Nagel in eine starre Wand mit entsprechender Höhlung praktizieren, in Abb.156 mit einem geeigneten Koordinatensystem etwa mit der Translation $f:\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 :(x,y,z) \longmapsto (x+2,y,z)$.

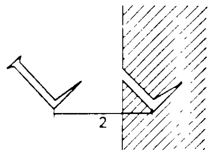


Abb.156

Allerdings muß man dabei Teile der Urbildmenge und Teile der Bildmenge simultan sehen, da eigentlich nicht nur der Nagel, sondern gleich der ganze Raum und damit auch die Wand um 2 nach rechts 'versetzt' wird, d.h.: man stellt mit dieser Betrachtungsweise nur fest, daß der Nagel der Höhlung kongruent ist und in sie passen würde.

Die Situation läßt sich aber auch der Aufgabenstellung angemessen modellieren. Sei dazu ein $\mathbf{R}^3$-Koordinatensystem fest mit der Wand verbunden, d.h. die Wand und die Höhlung seien Punktmengen W und H im $\mathbf{R}^3$, der Nagel am Anfang der Bewegung die Menge $N \subsetneq \mathbf{R}^3$, $I = [0,1]$ das Einheitsintervall und $g:N \times I \longrightarrow \mathbf{R}^3$ eine Isotopie, d.h. isometrisch in (x,y,z) und stetig, mit $g(N \times \{0\}) = N$ und $g(N \times \{1\}) \subsetneq H$. Dann stellt g (idealisiert) eine reale Bewegung dar, wenn $g(N \times I) \cap W = \emptyset$. Allerdings ist g kein Objekt der üblichen Abbildungsgeometrie, sondern der Kinematik. Aber gerade kinematische Betrachtungen sind unerläßlich für das Verständnis zahlreicher geometrischer Phänomene.

Mit Hilfe der Zeit als vierter Dimension kann sogar der vierdimensionale euklidische Raum kinematisch dargestellt werden. Ein Mittel dazu ist die Wiedergabe von Bewegungen nach dem Prinzip des Films. Dabei wird eine Bewegung dadurch veranschaulicht, daß man von dem Vorgang statische, zweidimensionale Bilder zu verschiedenen Zeitpunkten anfertigt, in denen die eingenommene Stellung jeweils charakteristisch für den Gesamtvorgang ist (z.B. beim Wankelmotor (in Abb.25)). Macht man die Abstände zwischen den Zeitpunkten klein genug und hält die Bilder dem Betrachter mit der entsprechenden Geschwindigkeit nacheinander vor Augen, dann hat dieser den Eindruck eines bewegten Bildes. Praktisch ist diese rasche Bildfolge etwa dadurch zu erreichen, daß man die Bilder passend direkt übereinander legt und die Papierblätter nacheinander schnell über den Daumen streifen läßt wie ein Kartenspiel. Der Papierstapel hat eine gewisse Dicke, die zur dargestellten Zeitdauer proportional ist. Macht man die Aufnahmezeitpunkte immer häufiger, die Abstände zwischen ihnen immer kleiner, so müssen die Blätter immer dünner und die Bewegung immer 'stetiger' werden. Im Gedankenexperiment entspricht schließlich jedes Blatt einem Punkt der vom Stapel repräsentierten reellen Strecke. Eine ebene Figur in Ruhe wird ein senkrechtes Prisma; bei einer Drehung eines Quadrats um seinen Mittelpunkt beschreibt jeder Punkt eine Schraubenlinie:

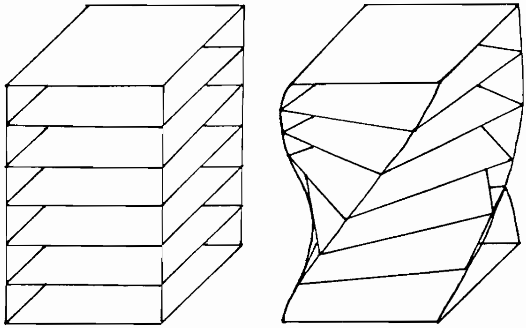


Abb.157

Eine dreidimensionale Kugel im Papierstapel würde als zeitliche Veränderung eines zweidimensionalen Bildes so beschrieben: Die unteren Blätter sind weiß. Dann erscheint ein Punkt, der sich sofort zu einem Kreis aufbläht, dessen Durchmesser d sich in Abhängigkeit von der Zeit t so ändert: $d = 2\cdot\sqrt{1-t^2}$, $-1 \leq t \leq 1$. Am Ende zieht der Kreis sich erneut zu einem Punkt zusammen, und die folgenden Blätter sind wieder weiß.

In Analogie dazu kann man sich eine vierdimensionale Vollkugel vorstellen: Man denkt sich ein leeres Raumstück, in dem plötzlich ein Punkt erscheint, der sich zu einer Kugel aufbläht, deren Durchmesser wie oben von der Zeit abhängt, bis sie wieder verschwindet. Man darf jedoch in der Bewegung nirgends innehalten, da sonst die Hyperkugel verzerrt wird.

Praktisch verwirklicht, allerdings um zwei Dimensionen niedriger, sind soche Raum-Zeit-Transformationen bei Zug-Nomogrammen (Abb.158). Eine Zugstrecke wird als geometrische Strecke, die Zeitachse senkrecht dazu, und Züge als Punkte gezeichnet. Je flacher ein Graph ist, desto schneller ist der Zug; senkrechte Abschnitte bedeuten Halte.

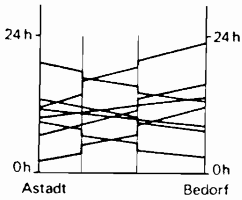


Abb.158

Falls die Züge jeweils nur in einer Richtung fahren, sind die Graphen immer monoton. Genau dann steigt ein Graph, wenn der Zug von Astadt nach Bdorf fährt. Für eine eingleisige Strecke bedeutet das Schneiden zweier Geraden einen Zusammenstoß. Es ist Konvention, die Bahn-Strecke horizontal einzuzeichnen. Wer gerne Funktionsgraphen haben will, muß das Nomogramm um 90° drehen. (Wie sieht der Graph eines Zuges aus, der über Mitternacht unterwegs ist?)

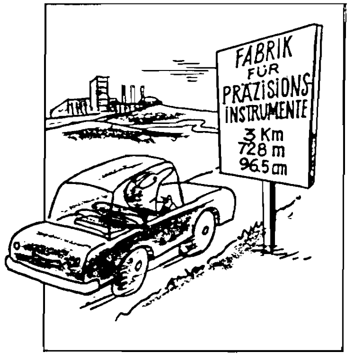
Außer mit der Zeit könnte auch mit anderen physikalischen Größen die Zahl darstellbarer Dimensionen erhöht werden, etwa mit Farb- oder Geruchsintensität. Z.B. könnte man in einem zweidimensionalen Optimierungsproblem den zulässigen Bereich zeichnerisch und das Wachsen der Zielfunktion durch Zunahme von Farbintensität darstellen: dann würde man die Lösung in der Ecke finden, in der die Farbe am dunkelsten ist. Praktisch spielen diese Möglichkeiten aber keine Rolle.

Mit dem $\mathbf{R}^3$ als Modell wird der ganze Apparat von Analysis und Linearer Algebra auf die (euklidische) Geometrie anwendbar. - Den Spezialfall numerischer Modelle behandeln wir im folgenden Abschnitt als eine Art des Messens. - Erwähnt seien an dieser Stelle nur noch Gruppen als Modelle für geometrische Formen, etwa die Kleinsche Vierergruppe für den Quader mit drei paarweise verschieden langen Kanten.

Modellbildung kann sich in mehreren Schritten vollziehen. So stellt der $\mathbf{R}^3$ zunächst ein Modell für die euklidische Geometrie dar, wird dann aber eventuell seinerseits durch eine ebene Zeichnung modelliert, worin außer dem Übergang vom Raum zur Ebene noch eine weitere Stufe der Modellbildung steckt, indem die Flecken und Striche auf dem Papier als Realisate von Punkt und Gerade zugleich auch deren Modelle sind.

Eine mathematische Beschreibung solcher Realisate selbst hat Hjelmslev in seiner sog. natürlichen Geometrie ("Virklighetsgeometrien") versucht. Gewiß ist es interessant zu sehen, wie hier das zeichnerisch Vage doch noch exakt gefaßt werden soll. Freilich ist diese Modellbildung selbst wieder eine auf ideeller Stufe. Die Objekte einer Hjelmslev-Geometrie sind daher keineswegs so etwas wie unscharfe Urbilder erst noch aus ihnen zu abstrahierender geometrischer Begriffe; vielmehr setzen sie diese gerade als bereits fertig konstituiert voraus. Mit Recht ist eine gezeichnete Gerade nicht als exakte Gerade anzuerkennen; wenn wir sie uns jedoch - übrigens wohl nur mit fraglicher Berechtigung - als ebenen Parallelstreifen vorstellen sollen, so geht dies eben nicht, ohne daß wir uns den Streifen seinereits von exakten Geraden begrenzt denken. Schon H. Weyl (1928/1966) kritisiert an Hjelmslev den vordergründigen Sensualismus von "Figuren an der Wandtafel", über den viel zu sehr vergessen wird, "daß die Geometrie zugleich ein ideelles Fundament abgeben soll für Astronomie und Atomphysik" (S.183).

2.4.3 Das Messen



In einer Verengung des Begriffs wird unter Messen oft nur das Bestimmen einer Maßzahl für eine - reale oder ideale - geometrische Form verstanden. Dabei ist dann auch das Vermessen realer Gegenstände durch Anlegen eines Maßstabs lediglich ein Teil dieser Maßzahlbestimmung.

Geht man jedoch den operativen Wurzeln des Messens nach, so muß man feststellen: Erstens ist die Maßbestimmung für ideale Formen dem praktischen Messen nachgebildet; und zweitens ist das praktische Messen als Feststellen von Kongruenzen eine Spielart des Passens und damit eine geometrische Funktion (in der Bedeutung des Schemas zum POB, in Abb.5). Entsprechend wollen wir unter Messen außer Maß(zahl)bestimmung jeden Paßvergleich von geometrischen Formen verstehen.

Passen Formen zueinander? Passen Formen zu einer dritten? - Ob man einen Schrank noch zwischen zwei andere Möbelstücke stellen kann, stellt man durch Messen fest, d.h. man prüft, ob er paßt. Eine aufwendige Methode ist der Versuch, ihn an den gewünschten Platz hinzustellen, eine günstigere, sich vom Schrank oder vom freien Platz ein Modell zu machen, etwa in Form eines gespannten Seils und zweier Markierungen darauf, und dann zu messen, d.h. zum Passen zu bringen versuchen. Selbst wenn dem Schrank und dem Platz je eine Maßzahl zugeordnet wird, so ist keine der beiden Zahlen für sich interessant, sondern nur im Vergleich zur anderen.

Diese Auffassung vom Messen umfaßt auch den Paßvergleich von mehr als zwei Formen. Ferner kann, unter Benutzung des Archimedischen (Eudoxischen) Axioms, gegebenenfalls festgestellt werden, wie oft eine Form in eine andere paßt. Damit ist dann ein handlungsorientiertes begriffliches Fundament für die Maßzahlbestimmung gelegt.

Außer dem Anlegen eines Maßstabs gibt es noch weitere praktische Meßverfahren. Hier sind einige Beispiele:

- Der Inhalt einer ebenen Fläche wird mit Millimeterpapier bestimmt.
- Die Kongruenz zweier Gegenstände läßt sich manchmal durch die Anschauung überprüfen. (Z.B. bei zwei Hälften einer spiegelsymmetrischen Figur mit halbdurchsichtigen Spiegeln. Wie unvollkommen die Spiegel- oder Drehsymmetrie einer natürlich gewachsenen Form, etwa eines menschlichen Gesichtes ist, kann man statt durch Längenvergleiche viel besser dadurch feststellen, daß man auf einer Fotografie die rechte Gesichtshälfte mit dem Spiegelbild der linken überlagert und dabei oft eine auffällige Entstellung hervorruft.)
- Zwei Gegenstände sind aneinander abzurollen (dabei muß darauf geachtet werden, daß die Bewegung ein Rollen und kein Gleiten ist).
- Man legt einen Faden entlang einer zu messenden krummen Linie und markiert die Enden. (Dabei wird vorausgesetzt, daß der Faden starr in dem Sinn ist, daß er bei Verformungen seine Länge nicht ändert.)
- Man mißt verschiedene Durchmesser an einem Gegenstand mit einem Meßschieber. (Will man von da auf andere Größen schließen, z.B. Volumen oder Oberfläche, so setzt man voraus, daß diese durch die gemessenen Größen eindeutig bestimmt sind, daß also der Gegenstand eine eindeutig bestimmte, geometrischen Berechnungen zugängliche Form hat.)
- So lange es um Paß- oder Kongruenzprüfungen geht, genügt es meist, gewisse ausgezeichnete Größen, z.B. den maximalen Durchmesser und dgl. zu ermitteln. Wenn das nicht reicht, muß die Modellbildung weiter getrieben werden, u.U. bis hin zum Anfertigen von Gipsabdrücken. Diese Art des Messens ist allerdins sehr aufwendig, technisch schwierig und versagt, wenn nicht einer der Körper kongruent zu einem Teil des anderen ist, z.B. schon beim Vergleich eines $10x25x80$-cm^3-Quaders mit einem $8x20x125$-cm^3-Quader.

Bei all diesen Verfahren werden reale Formen durch reale Modelle exhauriert.

Häufig genug wird aber der eigentliche Zweck einer Messung durch direkten Formvergleich nicht erfüllt; vielmehr sind lediglich gewisse Größen von Formen interessant, mit denen man weiter operieren will.

- Man kann mit ihnen relevante außergeometrische Größen bestimmen: Fliesenleger werden nach Fläche bezahlt; physikalische Größen wie Zeit, Temperatur, Spannung usw. werden mit Hilfe geometrischer Größen wie Länge oder Winkel gemessen; die wissenschaftliche Qualifikation der Bewerber um eine Professorenstelle wird schon auch einmal danach beurteilt, wie dick der Stapel der gedruckten Veröffentlichungen ist.
- Theorien sollen kontrolliert werden, z.B. beim Vergleich der tatsächlichen Flugbahn eines Elektrons mit derjenigen, die nach der Theorie errechnet wurde.
- Schon Archimedes benutzte erfolgreich die Methode des Wägens von Formen aus homogenem Material (Papier, Wasser usw.) zur Volumen- und Flächenmessung. Dabei richtete sich sein Interesse weniger auf die Ermittlung von Größen einzelner realer Objekte als auf die Gewinnung von Formeln für Klassen von Formen.
- Formen sollen verglichen werden können, bei denen ein direkter Paßvergleich unmöglich oder unökonomisch wäre: Einem Möbelkatalog werden nicht markierte Maßstäbe beigefügt, an denen die Maße abzulesen sind (und schon gar nicht werden die Möbel selbst zum Aussuchen verschickt). Bei der Konstruktion eines Gebäudes oder eines Werkstücks genügt es nicht, irgendwelche Teile irgendwie miteinander zu verbinden. Vielmehr wird regelmäßig nach Plan mit Maßzahlen gearbeitet, die großenteils aus anderen errechnet werden. Auch der Maßschneider benötigt die Maße eines Kunden, da dieser ihm nicht dauernd zur Verfügung steht - und wenn er diese Maße nur auf eine Kleiderpuppe überträgt.

Die verwendeten Modelle für geometrische Formen, nämlich Zahlen, sind sehr abstrakt und sagen ohne weitere Information wenig über die Formen aus, für die sie stehen. Dafür sind sie aber sehr handlich) insbesondere gestatten sie mit geringem Aufwand höhere Genauigkeitsgrade: Z.B. ermittelt sich die Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks mit Basis 1 und Basiswinkel 89° mit einem Taschenrechner bequem und viel exakter als mit einer Zeichnung zu $(1/2)\tan 89° \approx 28{,}645$.

Bei der vor jeder solchen Rechnung notwendigen numerischen Modellbildung werden reale Objekte durch ideale exhauriert. (Soweit jene Objekte ihrerseits bereits reelle Exhaustionen irgendwelcher Formen sind, wird dann durch die Maßzahlbestimmung aber nicht etwa die Idee dieser Form exhauriert, sondern die Länge der realisierten Strecke.)

Spezielle Fragen entstehen beim Herstellen der Meßskala, etwa für Längen: Welche Strecke wird als Einheit gewählt - Elle, Spanne, Fuß, Klafter, Erdumfang, Wellenlänge eines bestimmten Teilchens, usw.? Wie wird gewährleistet, daß jeder Mensch an jedem Ort über dieselbe Einheit verfügt? - Da es in der räumlichen Umwelt des einzelnen keine direkt zugänglichen Objekte gibt, die eine Maßeinheit bequem und genau liefern könnten, müssen zuerst einmal realisierte Körper als solche Maßeinheiten verteilt werden, ehe danach mit Zahlen gearbeitet werden kann. Die Verwendung unterschiedlicher Maßeinheiten bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, wenn nur einmal die Einheit des einen Systems mit der des anderen ausgemessen wurde. Fehler treten erst auf, wenn man verschiedene Einheiten mit demselben Namen bezeichnet - eine Gefahr, die besonders groß ist, wenn die Meßskala durch die menschliche Anatomie festgelegt ist. Man denke nur an die Unbestimmtheit der Einheit 'Fuß' bis ins 19. Jahrhundert.

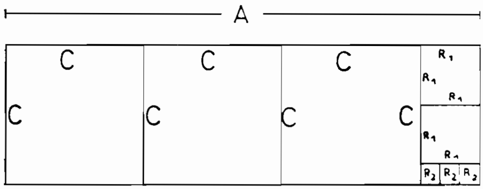
Ein anderes Problemgebiet sind Fragen der Genauigkeit. Wie genau kann nur gemessen werden? Wie genau braucht nur gemessen zu werden? Welches sind geeignete Meßverfahren?

Hinter dem gewöhnlichen Ausmessen einer Strecke A mit einer (metrischen) Meßskala steckt der Paßvergleich zweier Strecken auf folgende Weise: Zunächst stellt man durch wiederholtes Aneinanderlegen der Maßeinheit E fest, wie oft sie in A paßt. Den Rest legt man mit einer kleineren Einheit aus (meist mit 10^{-1}-facher Länge der ursprünglichen Einheit; es könnte auch b^{-1} mit $b=2,3,\ldots$ genommen werden; gebräuchlich sind noch $b=2,8,16$), den dann verbleibenden Rest mit Stücken mit b^{-2} -facher Länge, usw. Entweder geht das Auslegen einmal genau auf, oder man bricht dieses Verfahren irgendwann ab. Man hat dann die Strecke A (bzw. eine etwas kleinere) mit Stücken von b^{-n}-facher Länge der Einheit ausgelegt, die im b-adischen System gebündelt ist. Die Folge der Anzahlen der Bündel gibt die Länge von A (bezüglich E) an. Je größer n ist, desto genauer ist die Messung. Für n sind Grenzen gesetzt, einmal durch ökonomische Erwägungen, dann durch die Realisierungsgüte der Maßeinheiten, aber auch oft durch die zu messenden Objekte selbst. Z.B. kann die Länge eines Kartoffelackers nicht beliebig genau bestimmt werden, weil sie faktisch gar nicht genau festliegt. Die Zwecke, zu denen ein Kartoffelacker auszumessen ist, erfordern aber auch gar nicht allzu große Genauigkeit.

Es sind nicht nur die jeder Realisierung anhaftenden Unzulänglichkeiten, die einem exakten Messen entgegenstehen. Auch im ideellen Bereich sind exakte Messungen (bzw.: Maßbestimmungen) i.a. nicht möglich. Dabei verstehen wir unter Maßbestimmungen (Messungen im ideellen Bereich) alle Arten von Berechnungen geometrischer Größen aus gegebenen (geometrischen) Größen, etwa der Winkelmaße eines Dreiecks aus den Seitenlängen, des Flächeninhalts eines Rechtecks aus den Seitenlängen oder des Inhalts der Fläche unter einem Funktionsgraphen in einem

Intervall. In diese Berechnungen können mehrere Arten von Fehlern eingehen. Zunächst solche, die bei der Modellierung einer realen Form im ideellen Bereich entstehen, nämlich durch die Idealisierung der Form. Andere Fehler entstehen durch ungenaue Größen. Schließlich gibt es Fehlerquellen, die im ideellen Bereich selbst auftreten, nämlich in den Verfahren (etwa bei Näherungsverfahren) und bei der Diskretisierung (d.h. das Ergebnis kann nur eine der endlich vielen Zahlen eines – etwa durch die Arithmetik eines Computers – vorgegebenen Zahlengitters sein).

Diskretisierungsfehler können i.a. nicht dadurch ausgeräumt werden, daß man das Gitter enger oder passend zu den zu messenden Größen wählt. Bekanntlich gibt es Paare von Strecken, für die es kein (noch so kleines) gemeinsames Maß gibt, die also inkommensurabel sind, z.B. Seite und Diagonale eines Quadrats. Wenn nun eine Strecke A mit der Einheit E im b-adischen System nicht genau gemessen werden kann, so heißt das nicht, daß es für A und E kein gemeinsames Maß gäbe (d.i. eine Strecke, mit der man beide exakt auslegen kann), sondern zunächst nur, daß es kein gemeinsames Maß im b-adischen System gibt (dessen Länge für irgendein n das b^{-n}-fache der Länge von E beträgt). Falls ein gemeinsames Maß für zwei Strecken A und C existiert, so läßt es sich in dem Prozeß der sog. Wechselwegnahme ermitteln:



$R_1 = 3R_2 + 0$

$C = 2R_1 + R_2 = 7R_2$

$A = 3C + R_1 = 7R_1 + 3R_2 = 24R_2$

Abb. 159

A wird mit (Kopien von) C ausgelegt, etwa mit r_1 Exemplaren; es bleibt ein Rest R_1 von der Länge $l(A) - r_1 \cdot l(C)$. Mit r_2 Kopien von R_1 wird C ausgelegt; es bleibt ein Rest R_2 von der Länge $l(C) - r_2 \cdot l(R_1)$; usw. bis irgendwann einmal kein Rest bleibt. Dann ist der letzte nicht verschwindende Rest R_n ein gemeinsames Maß von A und C, und zwar das größte. Wechselwegnahme ist nichts anderes als der Euklidische Algorithmus für zwei natürliche Zahlen. Anders als dort kann es jedoch hier bei zwei Strecken passieren, daß der Prozeß nie endet, also kein gemeinsames Maß existiert, d.h. das Längenverhältnis irrational ist, z.B. $1:\sqrt{2}$ zwischen Quadratseite und -diagonale. Maßbestimmungen solcher Art weisen jedoch schon über die Geometrie, erst recht über die operative Geometrie hinaus in den Bereich der Numerik.

In diesem Abschnitt über das Messen sind verschiedene Typen von Exhaustionen vorgekommen, die in Kapitel 9 genauer behandelt werden: RR (reale Formen exhaurieren reale), IR (ideale Formen exhaurieren reale) und II (ideale Formen exhaurieren ideale). Auch der noch fehlende Typ RI kommt in der Praxis vor, z.B. beim Herstellen von Maßstäben oder beim Abtragen von Längen auf Zeichenpapier o.ä.

2.4.4. Geometrische Modelle außergeometrischer Begriffe

Zu den Hilfsfunktionen geometrischer Modelle, nämlich Ökonomie, Raumanschauung und Kommunikation, tritt in Bereichen außerhalb der Geometrie eine wichtige weitere hinzu: Mittel der Begriffsbildung zu sein.

In vielen - auch ganz abstrakt scheinenden - Disziplinen hat geometrisierende Begriffsbildung genetisch verwurzeltes Hausrecht.

Sophus Lie (1886/1960) spricht darüber in seinem Habilitationsvortrag "Über den Einfluß der Geometrie auf die Entwicklung der Mathematik". Speziell für die Analysis stellt er fest, daß "bei den meisten wichtigen Fortschritten ... die Geometrie sehr wesentlich mitgewirkt hat" (S.471). Weiter heißt es: "Daß die Geometrie eine so große Bedeutung für die Entwicklung der Analysis gehabt habe, beruht nach meiner Auffassung wesentlich auf den drei folgenden Umständen. Die Geometrie stellt viele einfache aber wichtige Probleme; sie macht andererseits viele, auf den ersten Anblick kompliziert aussehende Erscheinungen einer anschaulichen Erfassung zugänglich. Sie leitet endlich auf ganz natürlichem Wege und fast mit Notwendigkeit zur expliziten Einführung neuer wichtiger Begriffe." (S.476). Als Beispiele führt Lie an: Irrationale Zahlen aus geometrischer Inkommensurabilität; die geometrische Interpretation der komplexen Zahlen; Förderung der Gruppentheorie durch geometrische Betrachtungen; trigonometrische Funktionen; Inspiration der Infinitesimalrechnung durch geometrische Vorstellungen; der Begriff der Invarianten aus der Geometrie (z.B. bei Euklid die Invarianz des Doppelverhältnisses bei perspektivischer Transformation); Riemannsche Räume und Riemannsche Fläche.

Auf prägnante Weise hat Hermann Weyl die Kraft geometrischen Denkens in seinem Vortrag "Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege mathematischen Verständnisses" (1932) dargelegt. Unter anderem hebt er hervor: "Wie anschaulich-einfach und leicht verständlich ist das topologische Kriterium" für die Irreduzibilität eines Polynoms $f(z;x) \in C(z,x)$ - nämlich der Zusammenhang seiner Riemannschen Fläche - "(schüttle das Papiermodell und sieh, ob es auseinanderfällt) im Vergleich zu dem algebraischen! Wegen der anschaulichen Ursprünglichkeit des Kontinuums ... ist die topologische Methode so geeignet zur Entdeckung und zur Übersicht in einem mathematischen Gebiet." (S.353).

In seinem Bericht über (langfristige) Trends in der mathematischen Forschung räumt auch M.F. Atiyah (1976) der Geometrie eine hervorragende Stellung ein als traditionell eigenständiges Arbeitsgebiet, als Lieferant von Problemen und als Denkweise für die ganze Mathematik. Zahlreiche Gebiete wie Graphentheorie, Knotentheorie oder bestimmte Zweige der Kombinatorik sind von Geometrie durchsetzt, auch wenn es ihnen äußerlich nicht immer anzusehen ist. Für sie gelten ähnliche Aussagen, wie sie Lie über die Analysis gemacht hat. Natürlich ist die Geometrie auch mit Naturwissenschaft und Technik aufs engste verbunden, soweit deren Arbeitsgebiete räumliche Fragen betreffen, also insbesondere etwa Physik oder Maschinenbau.

Statt nun den vielfältigen Beziehungen der Geometrie zu anderen Zweigen menschlichen Wissens nachzugehen, wollen wir anhand einiger ziemlich willkürlich ausgewählter Beispiele die Kraft geometrischer Modellbildung bei der Lösung außergeometrischer Probleme aufzeigen. Wir begnügen uns dabei mit Stichworten und verweisen gegebenenfalls auf einschlägige Literatur.

- Die Sprache bedient sich häufig geometrischer Vorstellungen, z.B. in Wörtern wie Landkreis, Blickwinkel, Gesichtspunkt, Dreiecksverhältnis, strahlen (für lächeln), gerader Blick, nicht uneben sein, usw.

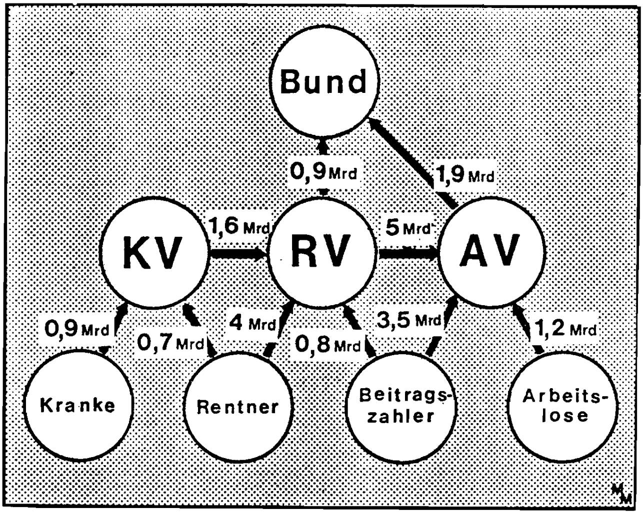


Abb.160

- Skizzen, mit deren Hilfe Strukturen oder, allgemeiner, Sachverhalte durchsichtig werden: Z.B. die Grafik (Abb.160) der für 1983 geplanten 'Sparoperation bei der Rentenversicherung' ('Frankfurter Rundschau' vom 06.11.1982).
  Weiter: Nomogramme, Organisationsplan einer Verwaltung, Flugverbindungen zwischen mehreren Städten (nach Bruner 1967/1974, S.50f), kommutative Diagramme in der Mathematik (über die es eine ganze Theorie gibt), Venndiagramme (die durchaus Beweiskraft haben), Ablaufdiagramme für Computerprogramme, Netzpläne, Rechenbäume, Graphiken aller Art: Alterspyramide, Häufigkeitspolygon, zeitliche Entwicklung von Größen als Funktionsgraph, Staatshaushalt als Kreisscheibe mit den Einzeletats als Sektoren, Gegenüberstellung von Größen als Balken mit entsprechenden Längen, usw.

- Hasse-Diagramm für Ordnungen.

- Cayley-Graphen für Gruppen.

- Wahrscheinlichkeits-Abakus von A. Engel (1975).

- Deutung linearer Probleme als Schwerpunktsprobleme (vgl. Winter 1978b).

- Es läßt sich nachweisen, daß eine natürliche Zahl n Primzahl ist, indem man feststellt, daß jedes Rechteck aus n Einheitsquadraten die Breite 1 hat.

- Lösung arithmetischer und algebraischer Aufgaben durch Operieren im n-dimensionalen Raum ($\mathbf{R}^n$): Einführung neuer Zahlen- oder Rechenarten am Zahlenstrahl, Gleichungen, Ungleichungen, (Lineare) Optimierung. Nur mit der Darstellungstheorie konnten einige wichtige Sätze der Gruppentheorie bewiesen werden. Van der Waerden (1954/1973) beschreibt, wie er einen zahlentheoretischen Satz unter wesentlicher Zuhilfenahme einfachster geometrischer Veranschaulichung beweist. In der Theorie der Ringe stetiger Funktionen drückt man algebraische Eigenschaften der Ringe durch topologische Eigenschaften der Räume aus, auf denen die Ringelemente definiert sind; ein typisches Beispiel (mit Gruppen statt Ringen) ist die Arbeit von Bender (1976): Um für die Siegelsche Modulgruppe zweiten Grades ein System von Erzeugenden und definierenden Relationen angeben zu können, läßt man die Gruppe auf einer geeigneten offenen Teilmenge des $\mathbf{R}^4$ operieren und findet dann mit Hilfe einer geometrischen Analyse der durch diese Operation induzierten Struktur das Erzeugenden- und Relationssystem, usw.

- Aus der Farbenlehre weiß man, daß jede Farbe (sichtbares Licht) als additive Mischung etwa der drei Farben Blau, Grün, Rot (mit den Wellenlängen 436 $m\mu$, 546 $m\mu$ bzw. 700 $m\mu$) aufgefaßt werden kann, wobei (nach geeigneter Eichung) gleiche Mischungsverhältnisse gleiche Farbeindrücke (Farbvalenzen) ergeben. Diese Mischungsverhältnisse lassen sich als Punkte der projektiven Ebene interpretieren, und man erhält so die sogenannte Farbtafel, die ein ungefähres Dreieck mit den Ecken Blau, Grün und Rot und nach außen gekrümmtem Rand ist (siehe Arens 1950/1957).

- Entsprechend kann man Stimmen- und Sitzverteilungen bei Wahlen darstellen: Stehen n+1 Parteien für ein Gremium zur Wahl ($n \in N$), so kann man die möglichen Stimmen- und die möglichen Sitzverhältnisse als Punkte des n-dimensionalen projektiven Raums auffassen, und zwar kommen nur solche mit nichtnegativen homogenen Koordinaten vor. Diese Menge wiederum läßt sich als gleichseitiges n-dimenionales Voll-Tetraeder in den R^n einbetten mit sog. baryzentrischen Koordinaten. Ergibt sich bei der Wahl ein Stimmenverhältnis, das genau mit einem möglichen Sitzverhältnis übereinstimmt, dann wird dieses im Gremium eingenommen. Ansonsten muß ausgerechnet werden, welcher möglichen Sitzverteilung das Wahlergebnis wohl am nächsten kommt. Dafür gibt es verschiedene Verfahren mit durchaus unterschiedlichen Ergebnissen, d.h. bei ein und derselben Stimmenverteilung können unterschiedliche Sitzverteilungen entstehen. Zwei gebräuchliche sind das Verfahren nach d'Hondt (ein Höchstzahlverfahren) und nach Hare-Niemeyer (ein Wahlzahlverfahren). (Beide Methoden sind z.B. in Kretzschmar (1975) beschrieben; die Geometrisierung des d'Hondt'schen Verfahrens ist instruktiv in Bergold (1979) dargestellt.)

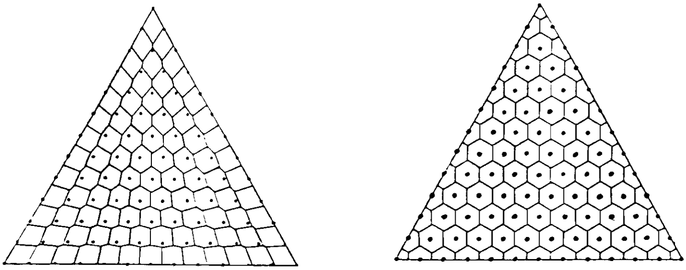


Abb.161 a: d'Hondt b: Hare-Niemeyer

Abb.161 zeigt für n=2 und zwölf zu vergebende Sitze, welche Stimmenverteilungen zu welchen Sitzverteilungen führen: Die möglichen Sitzverteilungen sind als Punkte markiert; die eingezeichneten Sechsecke geben die jeweils zugehörigen Stimmenverteilungen an. Eine Stimmenverteilung auf dem Rand einer solchen Zelle wird i.a. durch das Los einer der benachbarten Sitzverteilungen zugeordnet.

Man erkennt deutlich (in der Nähe der Ecken), wie das d'Hondt'sche Verfahren die großen Parteien bevorzugt. Diesen 'Mangel' hat das Verfahren nach Hare-Niemeyer zwar nicht; dafür läßt es aber das Paradoxon zu, daß bei einer Vergrößerung des Gremiums (bei ein und derselben Stimmenverteilung!) die Zahl der Sitze einer Partei absolut (und relativ sowieso) sinken kann. In Abb.162 sind die Gebiete markiert, in denen die Stimmenverteilung liegen, bei denen eine der Parteien jeweils in einem vierköpfigen Gremium einen Sitz, in einem fünfköpfigen keinen erhält.

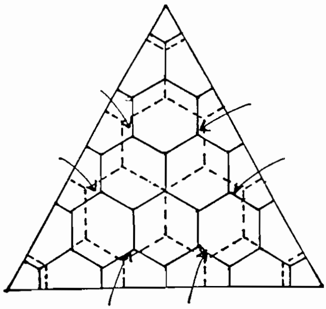


Abb.162

Betrachtet man übrigens vier Parteien und das zugehörige dreidimensionale Tetraeder, so sind die Zellen (bei Hare-Niemeyer) gerade die Rhombendodekaeder, die wir schon bei den Bienenwaben (2.2.5) und bei der Raumparkettierung durch Polyeder (2.3.9) kennengelernt haben.

- In der Chemie werden Moleküle als simpliziale Komplexe mit verschiedenen Sorten von Ecken als Atomen und bewerteten Kanten als Bindungen modelliert. Dabei sind nicht allein die topologischen Verhältnisse, sondern auch (orientierte) Winkel und 'Längen' wesentlich. Z.B. sind Weinsäuremoleküle Schraubenlinien. Es gibt links- und rechtswendige, die sich sehr wohl physikalisch unterscheiden lassen, obwohl ihr atomarer Aufbau identisch ist (vgl. Weyl (1952/1955), S.36). Auch hier spielt die Kugellagerung mit dem Tetraeder als Grundmuster (wie bei den Bienenwaben) eine wichtige Rolle.

- Duncker (1935/1963, S.1) erörtert das bekannte Problem, ein Verfahren anzugeben, "um einen Menschen von einer inoperablen Magengeschwulst zu befreien mit Hilfe von Strahlen, die bei genügender Intensität organisches Gewebe zerstören - unter Vermeidung einer Mitzerstörung der umliegenden gesunden Körperpartien". Die Lösung lautet: "Kreuzung mehrerer schwacher Strahlenbündel in der Geschwulst, so daß nur hier die zur Zerstörung nötige Strahlen-intensität erreicht wird." Der Nierenstein-Zertrümmerer in Abb.37 arbeitet nach diesem Prinzip.

- Auch in der Musik spielt die Idee des Raumes eine gewisse Rolle. Dabei ist Raum nicht gemeint als physikalisches, raum-zeitliches Medium, in dem sich das musikalische Geschehen entfaltet, sondern als Modellraum für die aufeinanderfolgenden Töne und gleichzeitigen Klänge oder als Klangfarbenraum ähnlich der Farbtafel der Farbenlehre (siehe z.B. Schreiber 1972). Auch der geometrische Begriff der Symmetrie läßt sich auf die Musik übertragen und eröffnet dort Möglichkeiten zu tiefergehenden strukturellen Studien. Ansätze dazu sowie weitere einschlägige Literatur findet man in Walther (1976) und Wille (1980).

2.4.5. Geometrie und Kunst

> Der viereckige Pfeiler hat, da die Diagonale die Seiten übertrifft, ungleiche Dimensionen der Dicke, die durch keinen Zweck motiviert, sondern durch die zufällig leichtere Ausführbarkeit veranlaßt sind, darum eben gefällt er uns so sehr viel weniger als die Säule. Schon der sechs- oder achteckige Pfeiler ist gefälliger, weil er sich der runden Säule mehr nähert, denn die Form dieser allein ist ausschließlich durch den Zweck bestimmt.
>
> Arthur Schopenhauer: Die Welt als Wille und Vorstellung, Band 2, Kap. 35

Künstlerisches Schaffen ist niemals bloßes Reproduzieren der Realität. Auch da, wo etwa bildende Künstler mit in ihrer Form schon weitgehend festgelegten Fragmenten der Realität umgehen - wie in der Fotografie, der Collage oder dem Readymade - folgen sie mehr oder weniger ausdrücklich doch einer zugrunde liegenden Idee. Die Analogie zum Geometrietreiben ist deutlich: beide Male bedeutet Herstellen von Formen ein Realisieren von Ideen. Während die Formen der Geometrie einen lebenspraktischen Zweck haben, dienen die Ideen, nach denen Kunstwerke realisiert werden, ästhetischen Zielen im weitesten Sinne. Zwischen diesen beiden Extremen liegen dekorative oder psychohygienische Zweckanforderungen von sogenannter Gebrauchskunst, Industrie-Design usw.; die Übergänge sind fließend.

Die Skala vom 'reinen' Zweckgegenstand bis zum 'reinen' Kunstwerk ist keinesfalls von vornherein mit Wertung behaftet, wonach etwa ein Objekt, das zweckmäßigen Gebrauch zuläßt, minderwertig sei gegenüber einem Werk, das nur dem reinen Ausdruck dient; oder auch umgekehrt, wonach nur der Gebrauchswert einer Sache zähle und das ästhetische Moment überflüssig sei (oder nicht zur Kenntnis genommen wird). Solche Wertungen haben keine kulturinvariante Bedeutung, ebensowenig wie Kriterien dafür, ob ein Realisat zur Kunst gehört oder nicht. Gewiß unstreitig ist der historische Zusammenhang zwischen bildender Kunst und Gebrauchsgeometrie. Aber auch ohne Rekurs auf die Geschichte ist künstlerische nicht unabhängig von geometrischer Form. Die Funktionalität selbst, die Klarheit des Aufbaus oder die Genauigkeit eines Realisats vermögen auch schon für sich ästhetisch zu wirken. Daß allgemeiner keine Kunst ohne Gestalt und alle Gestalt auf mathematischer Gestalt gegründet sei, ist schon oft beobachtet worden. So empfindet Menninger (1959, S.6) den Bau der Pyramiden, speziell der Cheopspyramide als "Gestaltung eines urhaften Gefühls für mathematische Form".

In seinen Gesprächen mit J. Gasquet bezeichnete Cezanne seine Bilder einmal als "Konstruktionen vor der Natur". Allerdings darf man die Beteiligung von Ideen am Konstruktionsprozeß nicht als Ideen-Malerei verstehen, sondern - mit Cezannes Worten - als Herstellung einer "Harmonie parallel zur Natur". Und über diese bezeugt Gasquet den Ausspruch: "Alles in der Natur modelliert sich wie Kugel, Kegel und Zylinder. Man muß auf Grund dieser einfachen Formen malen lernen, dann wird man alles machen können, was man will." - In Anlehnung daran sind die Intentionen des Kubismus zu sehen: eigengesetzliche Formgestaltung <u>mit</u> der Fläche selbst und nicht Wiedergabe von Gegenständen <u>auf</u> der Malfläche. Unter dieser Devise steht die ganze Entwicklung der Malerei bis hin zur sog. Abstraktion, mit deren Ergebnissen das größere Publikum zunächst seine Schwierigkeiten hatte. Bei plastischen Arbeiten wird diese Formgestaltung mit dem Raum und dem Material vom Laien mit 'gesundem Menschenverstand' eher anerkannt. Vielleicht kommt er dabei weniger auf den Gedanken, er hätte das Werk selbst fertigen können; gewiß wirkt aber ein dreidimensionales Objekt im wahrsten Sinne des Wortes 'gegenständlicher'.

Bei dem Versuch, die ästhetische Wirkung von Kunstwerken zu rationalisieren, bedient man sich gelegentlich auch der Geometrie. Man sieht in das Werk gewisse geometrische Formen und Beziehungen zwischen Formen hinein, unabhängig davon, ob der Künstler sie bewußt eingearbeitet hat oder nicht. Sicherlich ist Vorsicht geboten, wenn es darum geht, das Ästhetische durch das Geometrische einfach zu erklären. Gleichwohl kann es dabei zu faszinierenden Analysen kommen, nämlich dann, wenn der Künstler schon von sich aus Neigungen zu geometrischer Spekulation nachgab. Ein bemerkenswertes Beispiel dazu sind die Studien von Steck (1948) zum Werk Dürers.

Die Verwendung der Ellipse in der barocken Baukunst empfindet Menninger (1959) als Ausdruck der "Herauslösung des Menschen aus der gotischen Gläubigkeit, die, in der Renaissance begonnen, nun im Barock sich zur Selbstherrlichkeit und Selbstdarstellung ausweitet" (S.22). Dazu "sieht" man auch mit den Augen der gleichzeitig entstehenden Infinitesimalrechnung solche Formen anders als zuvor (vgl. S.22f). Oder: Spitzbögen der Gotik entspringen einer anderen Frömmigkeit als die Rundbögen der Romanik, und in beiden Epochen wäre die Verwendung der Ellipse undenkbar gewesen. Auch die in der modernen Architektur vorherrschenden Rechteckskonstruktionen entspringen nicht nur technischen Möglichkeiten.

In Ornamenten, in Maßwerk, in der japanischen Kunst des Papierfaltens (Origami) oder auch in den paradoxen Darstellungen von M.C. Escher findet die Auseinandersetzung mit den geometrischen Formen unmittelbar an diesen statt. Die Homogenität der Formen und die Symmetrie der Kompositionen sind es, die den Eindruck von Harmonie und Schönheit hervorrufen. Allerdings birgt Gleichmaß auch die Gefahr der Langeweile in sich, nämlich dann, wenn das Werk über eine geometrische Konstruktion nicht hinausgeht. Bildende Kunst benutzt geometrische Formen und stellt sie in einen neuen Zusammenhang.

Vom Standpunkt des Mathematikers aus schildert Weyl (1952/1955) "die große Mannigfaltigkeit der Anwendungen des Symmetrieprinzips in der Kunst". Eine Spielart dieses Symmetrieprinzips ist die Wiederholung von (Längen-) Proportionen, speziell der Goldene Schnitt, der eine Strecke so in zwei Teile zerlegt, daß sich der längere zum kürzeren verhält wie die Gesamtstrecke zum längeren Teil. Diesem Verhältnis ($2:(\sqrt{5}-1)$) wird gerne nachgesagt, es sei in besonderem Maße harmonisch. Mehr oder weniger genau ist es in zahlreichen Werken der Malerei, Plastik oder Architektur (z.B. von Le Corbusier mit Hilfe seines Modulors) realisiert. Auch in der anorganischen und organischen Natur finden sich Symmetrien aller Art und verleihen den Formen ästhetischen Reiz. Die Gründe für solche Wirkungen sind schwer zu fassen und bisweilen umstritten (z.B. erklärt Theis (1953) die Wohlgefälligkeit des Goldenen Schnittes nicht mit Strecken-, sondern mit durch 'organisches' Wachstum entstandenen Flächenverhältnissen).

Soweit unsere Randbemerkungen zu Geometrie und Kunst, einem Thema, das gewiß eingehender Studien lohnt und überdies pädagogisch bedeutsam ist. Verfolgt man dabei operativ-geometrische Aspekte, so kommt man vor allem im Kunstschaffen der letzten Jahrzehnte auf seine Kosten, das mit der Entwicklung von Environment Art und Urbanistik räumliche Strukturen in sehr vielfältiger (funktionsgebundener oder mehr spielerischer) Art verwendet.

3. GRUNDZÜGE EINER OPERATIVEN GEOMETRIE-DIDAKTIK

> Aller erhaltene Unterricht kann nur Vorbild sein des Unterrichts, den jeder sich selbst geben muß.
>
> Johann G. Fichte: Einleitungsvorlesung in die Wissenschaftslehre. 1813

In Kapitel 1 hatten wir grundsätzliche Überlegungen zur Begriffsbildung in der Geometrie angestellt und diese Überlegungen zum didaktischen Prinzip der operativen Begriffsbildung (POB) verdichtet. Danach haben wir in Kapitel 2 eine Reihe von praktischen Nutzanwendungen geometrischer Ideen als Beispiele für operative Begriffsbildung zusammengetragen mit der Absicht, den operativen Wesenszug der Geometrie in den Vordergrund zu stellen und zugleich eine breite inhaltliche Grundlage für einen am POB ausgerichteten Geometrie-Unterricht zu schaffen.

Dem Schulunterricht wenden wir uns nunmehr in Kapitel 3 explizit zu. Wir erörtern dabei die Fragen, wie denn das POB konkret im Unterricht zu handhaben ist, und welchen Beitrag es zur Erfüllung folgender, uns wichtig erscheinender, didaktischer Aufgaben leisten kann: Umwelterschließung, Strukturierung des Unterrichts mit universellen und zentralen Ideen, Bestimmung und Verfolgung von Unterrichtszielen, lokale und globale Stofforganisation.

In Kapitel 4 schließlich soll die Schulpraxis direkt zu Wort kommen: Dort wollen wir unsere Ausführungen an einigen Unterrichtsbeispielen konkretisieren.

3.1. Zur Anwendung des POB im Unterricht

Jeder hat im Laufe seines Lebens eine bestimmte Wirklichkeit von Geometrie-Unterricht kennengelernt, zumindest in der eigenen Schulzeit. Dieser Unterricht hat sich wohl durchweg folgendermaßen dargestellt (und das nicht nur in Deutschland): In der Volksschule: Definitionen, Einteilungen, Berechnungen von Formen und einfache Anschauungs'beweise'; in der höheren Schule zusätzlich: Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, Trigonometrie, Analytische Geometrie und Axiomatik, aber alles ohne echten Bezug zur Wirklichkeit; und in jüngerer Zeit in allen Schulformen: abbildungsgeometrischer Kalkül mit ebenen Punktmengen. In den Mathematik-Studiengängen ging die Geometrie oft in der Linearen Algebra auf oder fiel ganz weg; und auch im Schulunterricht wurde sie, was gar nicht verwunderlich ist, mehr und mehr zurückgedrängt. Was sich an kognitiven Fähigkeiten in ihr erwerben ließ, das war im Mathematik-Unterricht bequem auch in anderen Teildisziplinen zu vermitteln. Erst in den letzten Jahren gewinnt die Geometrie im Schulunterricht wieder an Bedeutung, vielleicht nicht zuletzt dank einer Besinnung auf ihre mögliche umwelterschließende Funktion. Hier gibt es einige erwähnenswerte Ansätze, die sich kurz folgendermaßen charakterisieren lassen:

- Orientierung an Phänomenen (z.B. IOWO; siehe Schoemaker u.a. 1981),
- Orientierung an Anwendungen (z.B. Meyer 1980, Müller 1981, Zeitler 1980, 1981),
- Orientierung an Problemen (z.B. Stowasser 1974).

Mit dieser (Rück-)Besinnung sind aber die grundsätzlichen didaktischen Probleme des herkömmlichen Geometrie-Unterrichts keineswegs alle ausgeräumt. Gerade die Gefahr der Isolierung besteht nach wie vor: Es kann leicht geschehen, daß entweder Unterrichtsinhalte ohne theoretische Durchdringung und ohne sonstige Querverbindungen nacheinander abgehandelt werden, oder aber ein begriffliches System zwar aufgebaut wird, aber ohne echte Bezüge zu den praktischen Beispielen bleibt.

Mit dem POB im Unterricht können diese beiden Formen von Isolierung gar nicht erst entstehen: Zu seinem Wesen gehört ja gerade die Integration von Idee und Realisat, von geometrischer Theorie und geometrischer Praxis, von Alltagswelt und Schulunterricht. Es ist auch nicht damit getan, einige oder auch viele Beispiele für sich zu betrachten und 'auf operativ' zu trimmen. Realisierung des POB im Unterricht bedeutet, daß es dem gesamten Geschehen unterliegt, manchmal ganz direkt, manchmal mehr im Hintergrund: angefangen mit qualitativen Zweckanalysen in der Primarstufe bis hin zu Fragen des Verständnisses und der Rechtfertigung von Axiomen in der Sekundarstufe II.

Der Aufbau eines Begriffssystems

Die Konstruktion des dabei entstehenden Begriffssystems umfaßt: Schaffen einer Fachsprache (Definitionen), Aneignung von Faktenwissen (Sätze, Regeln, Beispiele), Entwicklung von Handlungsvorschriften (und Konstruktionen, Algorithmen), Entdeckung grundlegender Prinzipien und zentraler Ideen (Passen als eingeschränkte Beweglichkeit, Optimierung und Messen; Symmetrie aus Homogenität; Approximation aus Exhaustion), schließlich auch axiomatische Fundierung und deduktives Schließen.

Dabei hat man sich selbstverständlich an der Struktur der zugrundeliegenden Wissenschaft, also der Geometrie, zu orientieren. Heißt das aber nicht, daß man dann doch wieder bei Theorien landet, die sich aus Axiomensystemen über Relationen zwischen Punkten, Geraden, Ebenen usw. ergeben? - Nein; denn Struktur einer mathematischen Disziplin ist mehr als ihre mathematische Struktur. Wir verstehen ja Geometrie als Lehre von der räumlichen Wirklichkeit. In diesem Verständnis ist die mathematische Theorie durchaus enthalten, aber eben interpretiert durch diese räumliche Wirklichkeit zu deren Strukurierung und Nutzbarmachung. Äußerlich unterscheidet sich also ein operativer Geometrie-Unterricht über weite Strecken - nämlich da, wo es um Theorienbildung geht - gar nicht so sehr vom herkömmlichen.

Diesen Aufbau eines Systems geometrischer Begriffe hat man sich mit dem POB folgendermaßen vorzustellen: Mit einem einmaligen Durchlaufen der Begriffsbildungsschleife (Abb.5) für einen Begriff ist es nicht getan. Bereits von der Analyse eines einzigen Zwecks aus können sich durch eine Diskussion möglicher Alternativen mehrere Durchläufe ergeben. Solche Alternativen werden zumindest gedanklich oder im Modell realisiert und dann eventuell wieder verworfen (vgl. auch Tjalve 1978).

Greifen wir noch einmal das Beispiel des Ziegelsteins aus 1.4 auf: Wie wäre es beispielsweise, wenn zum Mauern Quader mit anderen Seitenverhältnissen, etwa Würfel, verwendet würden, oder Prismen mit sechseckigen Grundflächen, Parallelepipede, Rhombendodekaeder oder Kuboktaeder, mit denen sich ja der Raum auch parkettieren läßt (siehe Abb.125), oder Ikosaeder oder krummflächig begrenzte Körper? - Wo kommen noch Quader vor? - Zimmer, Möbelstücke, Kartons sind häufig quaderförmig. - Auch bei diesen Realisaten ergibt eine sorgfältige Analyse wieder die Funktion der variablen Raumparkettierung im Schwerefeld mit 'handlichen' Stücken. - Warum werden aber Konservendosen i.a. nicht quader-, sondern zylinderförmig hergestellt? - Hier ist das Material zur Erzeugung von Ecken und Kanten nicht geeignet.

Andere Begriffsbildungsschleifen werden durchlaufen, die mit der über den Ziegelstein nur einzelne Stationen gemeinsam haben: etwa die Rolle des Quaders bei der Ausbildung des Volumenbegriffs. Was ergibt sich bei Prismen allgemein, bei Kegeln, Pyramiden? - Oder mit der Spezialisierung des Quaders auf den Würfel: Einordnung des Würfels in das System der platonischen bzw. der archimedischen Körper; Zweckbetrachtungen, die auf den Würfel führen. Was hat der Würfel dem Quader voraus (hohe Symmetrie), und wie wird dies ausgenutzt? Z.B. als Spielwürfel oder als Einheit bei der Volumenmessung.

Dieses mehrfache Durchlaufen einzelner Schleifen bzw. gemeinsamer Stationen mehrerer Schleifen gestattet, ja verlangt einen spiraligen (wir müßten sagen: schraubenlinienförmigen) Unterrichtsaufbau und paßt damit zu dem grundlegenden didaktischen sog. 'Spiral'prinzip. Eigentlich werden die Schleifen gar nicht mehrfach durchlaufen, vielmehr findet man sich nach einem Umlauf grundsätzlich auf einem anderen, meist höheren Niveau.

Nehmen wir als Beispiel den Ebenenbegriff, und zwar den Aspekt der Äquipotentialfläche im (homogen gedachten) irdischen Schwerkraftfeld. Betrachtet man sie als Fläche, die senkrecht auf einem Bündel paralleler Geraden steht, so gehen die Begriffe 'Gerade', 'parallel' und 'senkrecht' ein, die ihrerseits (in unserem Aufbau) den Ebenenbegriff voraussetzen. Sie setzen ihn jedoch nicht als vollständig entwickelten voraus. Vielmehr reicht ein Begriff von Ebene, der zwar die Bildung dieser drei weiteren Begriffe zuläßt, aber den Aspekt der Äquipotentialfläche noch nicht enthält. Indem dieser dann einbezogen wird, ist der Ebenenbegriff auf ein höheres Niveau gehoben, und man hat jedenfalls keinen logischen Zirkelschluß begangen.

Der Aufbau eines geometrischen Begriffssystems und die Aufgabe, die rämliche Umwelt zu strukturieren, machen die Geometrie zu einer eigenen Disziplin und zu einem eigenen Unterrichtsfach, das sich trotz enger Verbindung zu Fächern wie Werken, Technik oder Physik von diesen doch deutlich abhebt. Die Gewinnung geometrischer Ideen aus praktischen Bedürfnissen, die Herstellung von Formen, die Variation von Genauigkeitsgüten bei der Realisierung einer Form durch verschiedene Werkstoffe oder Bearbeitungsweisen, die Erprobung von Formen in der Praxis, die Untersuchung der Wirkung physikalischer Kräfte als Verformungen und Bewegungen oder das Studium der Natur des physikalischen Raums, das alles wirkt bei der geometrischen Begriffsbildung mit und stiftet vielfältige Beziehungen zwischen der Geometrie und jenen Gebieten. Die Aufgabe des Geometrie-Unterrichts ist allerdings nicht die Vermittlung manueller Fähigkeiten, werkstoffkundlicher Kenntnisse oder die Analyse und Anwendung physikalisch-technischer Sachverhalte. sondern eben die Strukturierung der räumlichen Wirklichkeit – unter anderem durch die Bildung eines Begriffssystems.

Das Schema des POB im Unterricht

Am reinsten zu verwirklichen wäre das POB, wenn Schüler in Problemsituationen gebracht werden könnten, in denen sie die Probleme durch Bildung geometrischer Begriffe mit Herstellung und Anwendung geometrischer Formen zu lösen hätten. Es ist aber die Eigenart von Schulunterricht, daß – bis auf seltene Fälle – die Probleme keine echten, sondern gestellte Probleme sind. In vielen gestellten, erst recht in echten Problemen sind die zweckentsprechende Realisierung und der praktische Gebrauch geometrischer Formen technisch oder zeitlich überaus aufwendig. Man denke etwa nur an die Herstellung von Möbelstücken, an den Bau eines Fahrzeugschuppens, an die Reparatur eines defekten Uhrwerkes oder auch an die manuelle Produktion von Ziegelsteinen. Solche Aktivitäten haben, selbst innerhalb praktischer Fächer, keinen Platz in der real existierenden Schule mit all ihren institutionellen Mängeln, aber auch nicht in einer idealen Schule, jedenfalls wenn diese einigermaßen 'realistischen' Ideen verpflichtet ist. So muß die operative Begriffsbildung durch Herstellen einfacher Modelle, oft aus bereits geometrisiertem Material, gefördert werden: Funktionsmodell eines Scheibenwischers aus Baukastenteilen, Flächenmodell eines Würfels aus Pappe, geometrisches Zeichnen (von 'freihändig' bis 'Darstellende Geometrie').

Modelle nehmen eine Mittelstellung zwischen Idee und Realisat ein; je nach ihrer Abstraktheit (z.B. algebraisches oder Holzmodell eines Würfels) tendieren sie mehr zum einen oder anderen der beiden Pole. Es entspricht der operativen Begriffsbildung durchaus, wenn Probleme, ehe ihre Lösung auf die Realität angewandt wird, zunächst einmal im Modell gelöst werden. Hier ist der technische Aufwand noch nicht so groß, und Schwierigkeiten mit der Exhaustion, d.h. Güte der Realisierung, spielen noch keine Rolle.

Mit einer eigenständigen Begriffsbildung kann im Geometrie-Unterricht aber nicht vor jeder Geometrie begonnen werden. Die Schüler haben schon vielfältige Erfahrungen mit geometrischen Formen in ihrer Umwelt gemacht - mit Ebenen (Schreibtischplatte, Heftseite, Unterrichtsmaterial aus Plastik), Kugeln (Gegenstände zum Spielen), Parallelität (Eisenbahnschienen, Möbelkanten, Fahrbahnmarkierungen), usw. An solchen Erfahrungen kann ein genetischer Unterricht nicht vorbeigehen, er muß sie bewußt machen, ordnen und ausbauen.

Auch wenn eine Diskussion über einen geometrischen Begriff im Geometrie-Unterricht von menschlichen Bedürfnissen, von einem Problem ausgeht (z.B. Verpackung eines Getränks für den Weg von der Produktionsstätte bis zum Verbraucher), beziehen die Schüler die ihnen geläufigen Realisate geometrischer Formen doch mehr oder weniger explizit in die Diskussion ein. Diese Vorkenntnisse dürfen nicht nur nicht als störend aufgefaßt werden, sie sind auszunutzen. Die anschaulichen Objekte sollten früh betrachtet, die mit ihnen verbundenen Bedürfnisse, Zwecke und Funktionen analysiert, ihre Form begründet und Herstellvorschriften für sie entwickelt werden. Die Begriffsbildungsschleife wird dann also beim Realisat begonnen. Etwa am Beispiel der Getränkeverpackung: Ausgehend von Schulmilchtüten beschreiben die Schüler die Herstellweise, begründen sie und vollziehen sie nach; es ergeben sich Bezüge zum gesellschafts- und zum naturwissenschaflichen Bereich des Sachunterrichts, natürlich auch zur weiterführenden Geometrie.

Eine solche Orientierung an Handlungen wird zur Zeit vor allem im Geometrie-Unterricht der Primarstufe verwirklicht (oder angestrebt), allerdings eher aus psychologischen oder methodischen Gründen. Das POB fordert sie darüber hinaus für den Geometrie-Unterricht aller Stufen, und zwar vorrangig aus inhaltlichen Gründen: Die Handlungen sind Teil der Begriffsbildung, und die Begriffe haben sich in ihnen zu bewähren. Auch das Reden über Handlungen und die Entwicklung von Herstellvorschriften gehören zu einem handlungsorientierten Unterricht. Schließlich darf das Schema des POB nicht starr, nicht 'schematisch' gehandhabt werden. Es ist, wie wir oben beschrieben haben, ein Grundmuster in dem komplexen Geflecht geometrischer Begriffe und ist keineswegs isoliert für einzelne Begriffe zu sehen.

Wir können die Erläuterungen zum Begriffsbildungsschema (Abb.5) in folgenden Grundsätzen zusammenfassen:

- Diskussion verschiedener Zwecksetzungen und Situationen, die zum selben Begriff führen,
- Erprobung alternativer Formen für denselben Zweck,
- keine bloße Nachahmung historischer Genese,
- Einbezug der zu bildenden Begriffe in ein geometrisches System,
- Problemlösen, zumindest in Modellen,
- wo irgend möglich: Herstellung von Realisaten, zumindest aber deren praktischer Gebrauch,
- Aufbau auf Vorerfahrungen und damit häufig Anfang der Schleife beim Gebrauch einer Form,
- Vermeidung eines starren Schematismus.

Einige didaktische Grundannahmen

Zum Schluß dieses Abschnittes möchten wir noch einige Bemerkungen zu unseren didaktischen Grundannahmen machen:

Jeder Unterricht ist Fachunterricht und hat sich an der Struktur des Faches zu orientieren. Unter der Struktur einer mathematischen Disziplin verstehen wir hier aber mehr als bloß ein an innermathematischen Prinzipien ausgerichtetes System inhaltsleerer Begriffe: Vielmehr sind diese Begriffe mit Inhalt zu füllen, in der Geometrie etwa dadurch, daß man sie in der räumlichen Wirklichkeit interpretiert.

Gebiete, bei denen eine solche Interpretation zu schwierig oder unmöglich ist, haben im Schulunterricht nichts zu suchen. Daß sie vielleicht elementar zu behandeln sind und, wie wohl jede mathematische Tätigkeit, die kognitiven Fähigkeiten der Schüler fördern können, reicht allein zur Rechtfertigung nicht aus.

Sich an der Struktur des Faches zu orientieren bedeutet auch, daß vor der Untersuchung bestimmter Lernprozesse auf der Sachseite geklärt wird, was die Kinder lernen sollen und wie sie es lernen sollen. Wir stellen also die didaktische und die Sachanalyse vor die psychologische und methodische. (Auch bei puren psychologischen Untersuchungen kognitiver Strukturen, z.B. die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde betreffend, muß zunächst einmal völlig unabhängig von diesen kognitiven Strukturen festgelegt werden, um was für ein fachliches

Konstrukt es geht, im Beispiel also, was man überhaupt unter Zahlbegriff verstehen will.)

Selbstredend kann man die genannten wesentlichen Teile der Unterrichtsvorbereitung nicht getrennt voneinander behandeln; sie werden sich vielmehr gegenseitig beeinflussen. Ein Begriff darf aber z.B. nicht so sehr (scheinbar) vereinfacht werden, daß er falsch wird, nur damit er 'leichter' gelernt werden kann (z.B.: "Eine Primzahl ist eine Zahl ohne Teiler."). Wenn eine didaktische Analyse einen Begriff als wichtig erweist, so gibt es über sachlich verantwortbare Vereinfachungen und intensive Bearbeitung hinaus nur eine Konzession: seine Behandlung zeitlich zu verschieben.

Angesichts des scheinbaren Gegensatzes 'Wissenschaftsorientiertheit versus Kindgemäßheit' haben wir uns aber keineswegs gegen die Kindgemäßheit entschieden. Im Gegenteil: Den operativen Ansatz im Geometrie-Unterricht halten wir aus naheliegenden Gründen für in der Tat kindgemäß. Der Einbezug der Umwelt in die Begriffsbildung, die Gelegenheit zum praktischen Handeln und die Anschaulichkeit der Objekte, kurz: die Sinnhaftigkeit des ganzen Unterrichts, wirken sich positiv auf die Motivation und auf den Lernprozeß aus, wie sich das auch in unseren eigenen, teilweise in Kapitel 4 dokumentierten Unterrichtsversuchen gezeigt hat.

'Kindgemäß' heißt u.E. allerdings nicht, daß "der Lehrer ... die Jugend ... ungestört auf der Wiese des Zufalls grasen zu lassen" habe, weil "in jeder planmäßigen Führung der Schüler eine Gefahr für deren freie Entwicklung" zu erblicken sei (drastisches Zitat über "pädagogische Dadaisten" nach Kempinsky (1920/1952), S.9). Auch und gerade ein genetischer Unterricht verlangt Konstruktion durch den Lehrer, und wenn diese nur darin besteht, daß er die Gelegenheit zum Forschen und Entdecken gibt.

3.2. Umwelterschließung

Bei der allgemeinen Diskussion darüber, wie und ob die Aufnahme bestimmter Inhalte und ganzer Disziplinen der Mathematik in den Stoffkanon der Schule zu rechtfertigen sei, begegnet man häufig Hinweisen auf den möglichen Erwerb kognitiver Strategien und intellektueller Techniken (vgl. Winter 1972 und Wittmann 1974/1978). Von diesen führt ein Weg zu allgemeineren Erziehungszielen, wie sie Hentig (1969) formuliert hat. Wir fassen derartige Vorstellungen zu einem Gesamtziel 'Umwelterschließung' zusammen. Es liegt auf der Hand, daß Erschließung der Umwelt immer auch geometrisches Denken und Tun (bezogen auf den umweltlichen Raum) verlangt. Die Geometrie wird also gewiß eine bedeutsame Rolle dabei spielen.

Zunächst stellt sich die Frage, weshalb der Mathematik-Unterricht überhaupt eine umwelterschließende Funktion haben soll. Winter (1976) nennt dazu zwei (pädagogische) Gründe "aus dem Selbstverständnis der allgemeinbildenden Schulen heraus:

"(i) Unbestritten ist die Forderung, daß in der Schule Fertigkeiten und Fähigkeiten entwickelt werden müssen, die eine daseins<u>sichernde</u> Funktion haben, mit deren Hilfe das Kind jetzt und künftig gewisse typische Situationen meistern soll ...
(ii) Über die Forderung nach Ertüchtigung für das Leben hinaus geht die nach Lebens<u>bereicherung</u>. Der Mensch will ja nicht nur sich in seiner Welt zurechtfinden und Situationen beherrschen, sondern er will seine Umwelt auch verstehen, über sie nachdenken, sie mitgestalten ..." (S.340).

Für den Geometrie-Unterricht beschreibt Winter (1978a) genauer, was Umwelterschließung sein kann und wie sich die Forderung nach Umwelterschließung begründen läßt.

"Umwelterschließung erschöpft sich nicht in der Präsentation umweltlicher Situationen als Einstiege (von denen man eine Motivation der Schüler erhofft) und auch nicht im Anbieten von 'lebensnahen Anwendungsaufgaben', die einer Theorie nachgereicht werden und diese festigen sollen. Es geht darüber hinaus und viel mehr darum, die Beziehungen zwischen erfahrbarer Wirklichkeit und Geometrie durchgehend aufzudecken und zu nutzen, um dadurch gleichzeitig umweltliche und geometrische Sachverhalte in wechselseitiger Stützung zu entwickeln. Dieses beziehungshaltige Wechselspiel kann als doppelte Modellierung angesehen werden: geometrische Begriffssysteme bilden idealisierte Modelle von Wirklichkeitsausschnitten, und umgekehrt sind Phänomene der Wirklichkeit Verkörperungen geometrischer Sachverhalte. Durch Umweltorientierung soll keineswegs die Geometrie zur Magd anderer Disziplinen degradiert noch gar zu einem Sammelsurium von Gebrauchsrezepten für das spätere Berufsleben ausgezehrt werden. Im Gegenteil: Umwelterschließung im Geometrieunterricht führt (entgegen einer verbreiteten Meinung) nicht nur nicht zur mathematischen Verarmung und auch nicht zum Verzicht auf das Einüben strenger Argumentation (Geometrie als disciplina mentis), sondern vielmehr zur inhaltlichen Bereicherung im Sinne von mehr Substanz."

"Die Forderung nach Umwelterschließung im Geometrieunterricht läßt sich wie folgt begründen: Erstens ist die Erfahrungswirklichkeit wohl die wichtigste Anregerin für geometrische Fragestellungen, wie ja nicht zuletzt die Geschichte belegt. Zweitens wird durch den Wirklichkeitsbezug die Intuition des lernenden Schülers viel stärker angesprochen als in einem sich selbst genügenden Geometrieunterricht; und ohne pflegliche Einbeziehung der Intuition ist ein kreativer, sinnstiftende und dauerhafte Erkenntnis sichernder, wirkliches Interesse weckender und auf Allgemeinbildung hin zielender Geometrieunterricht undenkbar. Drittens können die Schüler die Geometrie in ihrer praktischen Nutzbarkeit erfahren, wodurch auch ein Beitrag zur allgemeinen Berufsqualifikation erbracht wird. Viertens sichert der Wirklichkeitsbezug eine stärkere Konzentration auf substantielle Inhalte und arbeitet damit der Gefahr entgegen, daß der Geometrieunterricht zu einem Terminologie-Kurs entartet. Fünftens erzwingt Wirklichkeitsorientierung eigenständige Reaktivierung und Reorganisation des vorhandenen Wissens, was damit an Beweglichkeit und Verfügbarkeit gewinnt."

Wir knüpfen noch einmal an die beiden pädagogischen Gründe für Umwelterschließung im Mathematik-Unterricht an: Nicht nur die Nutzbarkeit der Geometrie ist zu erfahren, sondern auch die der Struktur des Raumes; nicht nur der mögliche Nutzen für die eigene Person ist zu erforschen im Zuge der Daseinssicherung, sondern auch als Akt der Lebensbereicherung soll ganz allgemein Verständnis erlangt werden von Zweck und Funktion einer künstlichen Form, von der Funktion einer biologischen Form, von den Gesetzmäßigkeiten, nach denen sich unbelebte natürliche Formen gebildet haben, usw. Unter diesen Voraussetzungen stellt operative Begriffsbildung über weite Strecken nichts anderes dar als eben Umwelterschließung, und läßt man einmal die 'Erklärung' natürlicher Formen als eher zu den Naturwissenschaften gehörig beiseite (die sich insoweit wiederum auf geometrische Sätze stützen), dann wird sogar die Erschließung der gesamten (von Menschenhand herrührenden) Formenwelt durch operative Begriffsbildung gefördert. Diese Koinzidenz ist nicht verwunderlich, da die hier skizzierte Auffassung von Umwelterschließung im Hinblick auf das POB entstanden ist; sie ist aber dennoch bemerkenswert, denn schließlich entspringt das POB epistemologischen, hingegen die Forderung nach Umwelterschließung pädagogischen Überlegungen.

Das POB schlägt eine Brücke zwischen erfahrbarer Wirklichkeit und geometrischem System im Unterricht, und zwar im Rahmen zweier Anwendungsformen: Zum einen die äußerst seltene operative Begriffsbildung in Reinform, wo aus den Zwecken heraus Ideen erfunden und in die Wirklichkeit eingebracht werden; zum anderen die übliche Modifikation, wo vom praktischen Gebrauch nützlicher Formen ausgehend deren Zweck und daraus die hinter ihnen stehende Idee rekonstruiert sowie ihre Zweckmäßigkeit überprüft wird. In beiden Fällen stellen die Begriffe der Geometrie nicht Widerspiegelungen umweltlicher Phänomene dar, sondern sind Grundlagen für die Herstellung zweckvoller Formen in der Realität ('Ergreifung' der Wirklichkeit), sei es, daß im Prozeß einer 'reinen' operativen Begriffsbildung die Ideenbildung ohnehin der Realisierung von Formen vorausgeht, sei es, daß bei einer rekonstruierenden Begriffsbildung die geometrischen Begriffe als jeglicher planvollen praktischen Formgebung zugrundeliegend erkannt werden.

Für die Möglichkeiten zur konkreten Ausgestaltung der umwelterschließenden Funktion des POB verweisen wir auf die Unterrichtseinheiten in Kapitel 4 und auf die Beispiele in Kapitel 2. An dieser Stelle möchten wir lediglich noch zwei für Umwelterschließung wesentliche inhaltliche Prinzipien besprechen, die in der Praxis des Geometrie-Unterrichts leider häufig nicht beachtet werden:

(i) Gemäß der Dreidimensionalität des wirklichen Raumes müssen auch im Geometrie-Unterricht dreidimensionale räumliche Sachverhalte betrachtet werden.

(ii) Da die Funktion zahlreicher geometrischer Formen eng mit ihrer Beweglichkeit verknüpft ist, müssen kinematische Gesichtspunkte berücksichtigt werden.

Die Notwendigkeit dieser beiden Forderungen läßt sich mit zahlreichen geometrischen Sachverhalten belegen, die bei einer Beschränkung auf ebene Geometrie oder einem Verzicht auf den Bewegungsaspekt einfach nicht verstanden werden können. Das schlagkräftigste Beispiel dafür ist wohl die Schraubenlinie.

Zu (i): Zugunsten einer Reduzierung der Geometrie auf die Ebene spricht die Ökonomie der Darstellung (Zeichnungen) und die Einfachheit der Struktur: Axiome, Definitionen und Sätze lassen sich kürzer und übersichtlicher formulieren, weil weniger verschiedene Fälle auftreten; außerdem sind sie leichter nachvollziehbar, unser Gesichtsfeld ist zweidimensional und wir können uns folglich zweidimensionale räumliche Sachverhalte leichter vorstellen. Wer also Geometrie als etwas ansieht, das Schülern - mit welchen Zielen auch immer - zuvörderst als mathematische Theorie vorzuführen ist, der kann sie auch mit Fug und Recht auf zwei Dimensionen reduzieren. Aber schon wenn man ebene Geometrie auch nur mittelbar in den Dienst von Umwelterschließung stellt, etwa als Vorlauf zur eigentlichen (räumlichen) Geometrie. dann muß man mit Freudenthal argwöhnen, ob nicht die "räumliche Einbildungskraft ... durch zu viel und zu einseitig geübte Planimetrie erstickt" werde (1973, Bd.2, S.382). Immerhin trifft im Raum z.B. nicht zu, daß

- zwei nicht parallele Geraden sich schneiden,
- volumengleiche Polyeder zerlegungs- oder ergänzungsgleich sind,
- jede eigentliche Bewegung eine Drehung oder eine Verschiebung ist,
- höchstens vier Gebiete paarweise benachbart sein können;

und viele Schwierigkeiten treten erst mit der dritten Dimension auf.

Es reicht allerdings nicht, die ebene Geometrie nur halbherzig zu verlassen, sich nur mit Körpern zu beschäftigen, die 'kanonisch' in das rechtwinklige Koordinatensystem passen (z.B. Prismen, Zylinder, senkrechte quadratische Pyramiden), und dann auch nur diejenigen ihrer Eigenschaften zu behandeln, die schon den erzeugenden Figuren in kanonischer Lage in der Ebene zukommen. Denn so lernt man z.B. nicht, wie ein Regal durch eine Tür transportiert werden kann, dessen Höhe und Breite die Höhe der Tür übertreffen (vgl. Abb.16). Die Entstehung des Hyperboloids aus geraden Mantellinien, die Optimalität der Polyederstruktur des Fußballs oder die Ursache für die Rhombendodekaederform der Bienenwaben wird nicht einsichtig.

Oft nimmt man Bezug auf die Ebene, denn Winkel sind eben, in Ebenen sind die kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten Strecken, und das menschliche Gesichtsfeld ist zweidimensional. Aber nicht Beschränkung auf ebene Probleme kann die Konsequenz sein, sondern ständiger Wechsel zwischen den Dimensionszahlen 2 und 3 .

Der geistige Nachvollzug des Herstellprozesses erweist sich als erfolgreiches Hilfsmittel zum Verständnis geometrischer Formen: der scheinbar seltsame Verlauf der Schweißnähte an Milchtüten, die geometrische Struktur des Lederfußballs, oder auch die Schraubenlinie (als auf einen Zylindermantel aufgewickeltes rechtwinkliges Dreieck) werden durchschaubar.

Zu (ii): Mit der letzten Bemerkung sind wir schon mitten in der Kinematik. Noch mehr als in die Herstellung gehen kinematische Aspekte in den Gebrauch der Formen ein. Wir haben die eingeschränkte Beweglichkeit bereits als eine - um nicht zu sagen die - wesentliche Grundfunktion zweckgerichteten Geometrietreibens erkannt und dies mit einer Vielzahl von Beispielen belegt.

3.3. Universelle Ideen der Mathematik und zentrale Ideen der Geometrie

Dem Geometrie-Unterricht wie auch dem Mathematik-Unterricht im allgemeinen drohen zwei Gefahren: Stoffülle und Stoffisolation. Schon Whitehead (1929/1962, S.260) stellt dazu fest: "Die Schüler stehen ratlos vor einer Unmenge von Einzelheiten, die weder zu großen Ideen noch zu alltäglichem Denken eine Beziehung erkennen lassen". Zur Abhilfe schlägt er vor, "sich offenkundig auf unmittelbare und einfache Weise mit einigen wenigen allgemeinen Ideen von weitreichender Bedeutung" zu beschäftigen. Später hat auch Bruner (z.B. 1960/1970) ein allgemeines didaktisches Prinzip der Strukturorientierung gefordert, wonach der Unterricht hauptsächlich anhand der für das Fach (wie Bruner sie nennt) "fundamentalen" Ideen zu konstruieren ist. In letzter Zeit hat Atiyah (1976) es begrüßt, daß in der modernen Mathematik die Rolle einiger Grundideen wie Symmetrie, Stetigkeit und Linearität mit ihren weiten Anwendungsbereichen betont wird, und empfohlen, im Unterricht diese Rolle bei jeder sich bietenden Gelegenheit zu reflektieren. Halmos (1981) hat dann den Katalog Atiyahs wesentlich erweitert und hat, ganz aus der Perspektive des 'working mathematician', ein gutes Dutzend von 'Elementen der Mathematik' aufgezählt.

Das Konzept Bruners läßt sich zu dem der universellen Idee eines Faches präzisieren; zu konkretisieren ist es für die Mathematik. Dabei haben wir an allgemeine Schemata zu denken, die im Prozeß der Mathematik eingesetzt werden, die diesen Prozeß in Gang setzen oder weitertreiben (wichtige Methoden, Beweisideen, Theoreme, Begriffskonstruktionen etc.) und deren Universalität nicht bloß auf häufiger, sondern auf vielseitiger fruchtbarer Verwendung in unterschiedlichen Teildisziplinen beruht. Insbesondere sind universelle Ideen ihrerseits nicht wiederum als Fundament der Mathematik aufzufassen, sie sind vielmehr begrifflich noch nicht scharf umgrenzte Anhaltspunkte der eigentlichen mathematischen Theorienbildung. Sie haben zwar oft in einer Theorie präzisierte Entsprechungen, gehören aber ursprünglich einem vorwissenschaftlichen (nicht: unwissenschaftlichen) Denken an. Dabei stiften sie Ordnung in der internen Struktur des Faches und seinen Beziehungen zur Umwelt; noch wichtiger ist ihre ordnende Funktion beim Eindringen in diese Struktur und beim Erschließen der Umwelt.

Universelle Ideen zeichnen sich also aus durch

- Weite ('logische' Allgemeinheit),
- Fülle (vielfältige Anwendbarkeit in Teildisziplinen),
- Sinn (Verankerung im Alltagsdenken).

Mit diesen Kriterien läßt sich selbstredend nicht eindeutig festlegen, was als universelle Idee aufzufassen ist und was nicht. Der folgende Katalog universeller Ideen (vgl. Schreiber 1983) ist dann auch ganz provisorisch:

Exhaustion	Quantität	Ideation
Iteration	Kontinuität	Abstraktion
Reduktion	Optimalität	Repräsentation
Abbildung	Invarianz	Raum
Algorithmus	Unendlich	Einheit

Tab.3

Repräsentation und Kombination universeller Ideen in bestimmten Teilgebieten führen auf (gebietsspezifische) zentrale Ideen. In der Genese eines einschlägigen Wissensgebietes ist das Verhältnis zwischen zentralen und universellen Ideen allerdings eher umgekehrt: Was in einer Teildisziplin und der Auffassung darüber, wie mit ihr umzugehen sei, als zentrale Idee gilt, hängt zwar außer vom Gegenstand der Disziplin von universellen Ideen ab; zu den universellen Ideen gelangt der Lernende aber zuallererst über die zentralen Ideen (aus verschiedenen Disziplinen), weil diese den jeweiligen konkreten Fachinhalten näher stehen.

Speziell in der Geometrie ist dieser genetische Primat zentraler Ideen vor universellen nicht nur mit didaktischen Überlegungen zu begründen. Da die Mathematik ihren faktischen Ursprung in der Geometrie hat und jahrtausendelang von dieser befruchtet worden ist, verwundert es nicht, daß viele der universellen Ideen ihr entstammen und Universalität dann beim Eindringen in andere Teilbereiche erworben haben.

Zunächst ist Geometrie ohne die Idee des Raumes und operative Geometrie ohne die des starren Körpers (als Konkretisierung der Invarianz) nicht denkbar. Als weitere zentrale Ideen diskutieren wir (explizit vor allem in Teil II) Exhaustion; Homogenität (ebenfalls eine Form der Invarianz) mit der Ebene als Musterfläche; Ideation und, mehr geometrie-spezifisch, das Passen mit seinen Unterformen der eingeschränkten Beweglichkeit, des Messens und der Optimierung, soweit diese unter die Idee des Passens fallen.

Im folgenden wollen wir noch für einige der in Tab.3 aufgeführten universellen Ideen der Mathematik unter didaktischen Gesichtspunkten prüfen, ob und wie weit sie für eine operative Genese der Geometrie relevant sind.

Die Bedeutung der Idee der Optimalität etwa geht über den dem Passen untergeordneten Teil weit hinaus. Optimalität ist eine grundlegende Kategorie, über die sich Bezüge zwischen Lebenswelt und Geometrie herstellen lassen. Zwecken ist, in einem keineswegs genau definierten Sinn, optimal durch geometrische Formen zu genügen. Praktisch die ganze Zweck- und Funktionsanalyse bei der operativen Begriffsbildung läuft auf das Finden und Erfüllen von Optimierungskriterien hinaus (Größe von Ziegelsteinen, Form von Geschirr, Heizkörpern, Schiffsrümpfen, Lagerung von Gegenständen usw.). Dieser Vorgang ist viel komplexer als mathematische Optimierung, wo ja 'nur' eine Zielfunktion zu minimieren ist: Diese Zielfunktion muß erst aufgestellt werden, und das ist häufig gar nicht möglich, wenn sie nämlich von zu vielen oder von nicht mathematisch faßbaren Einflußgrößen abhängt oder ihr Definitionsbereich nicht bekannt ist. Ein Beispiel ist die Analyse der Polyederstruktur des Lederfußballs in 2.3.9 und 4.2. Gerade bei der Entwicklung optimaler geometrischer Formen spielten und spielen daher Probierverfahren eine bedeutende Rolle. Dabei kann es durchaus vorkommen, daß eine aus Erfahrung für optimal gehaltene Form durch eine wesentliche Änderung noch zu verbessern ist. Man denke an ellipsenförmige Kettenblätter bei Fahrrädern, an die Nasen bei Schiffsrümpfen oder an die ungewöhnliche Form moderner Scheren - Errungenschaften, an die vor wenigen Jahren noch niemand realistisch gedacht hat.

Nach den Überlegungen zur Optimierung ist die Aufstellung und Ausführung von Herstellvorschriften die nächste wesentliche Konstituente im operativen Begriffsbildungsprozeß. Hier befindet sich eine vortheoretische Basis für die Idee des Algorithmus, die genetisch vor jedem Umgang etwa mit Computern liegt. Anders als so manche Veröffentlichung im Zuge der derzeitigen Informatikwelle in der Mathematik-Didaktik glauben macht, hat die Informatik keineswegs die Priorität bei der Ausbildung algorithmischen Denkens. Man muß jedoch zugeben, daß im Geometrie-Unterricht die Chance zu einer wirklichen Grundlegung dieses Denkens verpaßt wird: Es werden keine Gebrauchsgegenstände hergestellt oder wenigstens Herstellnormen entwickelt; es fehlt eben die Operativität.

Allerdings fördert auch der herkömmliche Geometrie-Unterricht sehr wohl algorithmisches Denken, zwar erst auf einem abstrakteren Niveau, aber immer noch vor der Informatik, nämlich mit geometrischen Konstruktionen (und Messungen). Gewiß gibt es hier berechtigte Vorbehalte, insbesondere gegen die traditionelle Beschränkung der Werkzeuge auf Zirkel und Lineal. Aber auch diese kann sinnvoll sein, etwa wenn es in einem elaborierten mathematischen Kontext um ein Satzgefüge geht, in dem Beweise durch die Konstruktion von Figuren geführt werden.

Neben diesen Konstruktionen auf ideellem Niveau gibt es in Unterricht und Praxis auch solche auf reellem Niveau: Ebene, zeichnerische Modelle räumlicher Gebilde, also Darstellende Geometrie in weitem Sinn, und, noch allgemeiner, Modelle aller Art von Sachverhalten aller Art. Hier kommt die universelle Idee der Repräsentation ins Spiel, die sich, auch in der Geometrie, natürlich nicht nur auf ebene Zeichnungen beschränkt. In 2.4.4 haben wir zahlreiche Beispiele genannt.

In einem operativen Geometrie-Unterricht besteht Darstellende Geometrie nicht nur aus der zeichnerischen Konstruktion von ebenen Projektionen von Körpern; vielmehr müssen mindestens folgende zwei Problembereiche mit erörtert werden: Zum einen haben Darstellungen ihren Zweck, und dieser kann die Darstellungstechnik und -genauigkeit erheblich beeinflussen; zum anderen sind Zeichnungen unvollkommene Realisate, bei denen das Verhältnis zwischen erforderlicher und erzielbarer Güte geprüft werden muß. Die notwendige Genauigkeit hängt nicht nur vordergründig vom Zweck ab, vielmehr ist z.B. auch die Fehlerfortpflanzung zu beachten, die u.U. so deutlich spürbar werden kann, daß vielleicht ein alternatives Konstruktionsverfahren angewendet werden muß. Dieses ist aber eventuell erheblich aufwendiger, so daß sich sein Einsatz nicht lohnt. Schon ist man mitten in Fragen der Ökonomie, in die wieder die Idee der Optimalität hereinspielt.

Gerade an solchen Wirtschaftlichkeitsanalysen wird die Wesensverwandtschaft algorithmischen Denkens in der Informatik zu dem in der Geometrie augenfällig.

All diese Überlegungen sind keineswegs nur auf Konstruktionsalgorithmen beschränkt, sie gelten ähnlich für Meßalgorithmen. In der Idee des Messens treffen sich mehrere zentrale bzw. universelle Ideen. Ursprünglich ist Messen eine bestimmte Form des Passens: Wie viele Exemplare einer Einheitsform, die aneinander zum Passen gebracht werden, passen in eine vorgegebene, nämlich die zu messende Form? Die zu messenden Objekte besitzen eine Größe, und Messen heißt, diese Größe zu bestimmen.

Ob man den Größenbegriff in einem strukturbetonten Vorgehen abstraktiv vor dem Messen oder operativ mit dem Messen gewinnt, die Idee der Quantität hat jedenfalls einen fundamentalen Anteil am Wesen des Messens. Mathematisch ist Messen als eine Abbildung aufzufassen, die jedem meßbaren Objekt seine Größe (sein Maß) zuordnet, in der Regel eine Zahl (oder ein n-Tupel). Man kann Größen als besonders sparsame Repräsentationen dieser Objekte auffassen. In der Geometrie ist das Messen eng mit der Idee des starren Körpers und damit der Invarianz verbunden: Die Verwendung von Kopien eines Einheitsobjekts ist nur sinnvoll, wenn die Eigenschaft, Einheitsobjekt zu sein, invariant gegenüber räumlichen (und zeitlichen) Verlagerungen ist. Die Idee der Invarianz bleibt natürlich auch wesentlich, wenn es um nicht-geometrische Größen und Meßalgorithmen geht, die es ja in Hülle und Fülle gibt. Bei vielen dieser Algorithmen ist der Bezug zur mathematischen Theorie durchaus tiefergehend. In der Geometrie z.B. sind nicht nur Kongruenz- und 'Stetigkeits'axiome Grundlage für das Messen. Man denke etwa an die Bestimmung der Länge einer unzugänglichen Strecke, wo man eventuell Pythagoras-, Strahlen- und Parallelogrammsätze benutzt, usw.

Die Idee der Abbildung ist nun schon mehrfach angeklungen. Nach über einem Jahrzehnt Abbildunsgeometrie an unseren allgemeinbildenden Schulen werden von Lehrern und - soweit sie überhaupt ein Verständnis für die Sache entwickeln - von Schülern unter dem Begriff der Abbildung in der Geometrie jedoch durchweg geraden- bzw. form- bzw. längentreue Permutationen der Ebene verstanden. Schon der Größenbegriff, die Darstellende Geometrie oder effektive Bewegungen im Raum haben dann mit dem mathematischen Abbildungsbegriff nichts mehr zu tun. Größen werden lediglich als Eigenschaften von Figuren aufgefaßt, Darstellende Geometrie kommt im Unterricht sowieso kaum vor, und Bewegungen erscheinen als unmathematische Vorstufe für den eigentlichen Abbildungsbegriff, die im Begriffsbildungsprozeß zwar fleißig eingesetzt wurden, vom Lernenden am Ende aber wieder aus der Vorstellung zu tilgen sind.

Für eine globale Strukturierung der Geometrie und ihre möglichst inhaltsarme Darstellung als mathematische Disziplin unter anderen (mit der Leitlinie 'Menge - Struktur - Abbildung') ist diese Algebraisierung wohl geeignet. Voraussetzung für eine solche Auffassung ist aber eine gewisse mathematische Souveränität, über die Schüler während ihrer Schulzeit i.a. nicht verfügen und die auch vielen Mathematiklehrern abgeht. Diese Strukturorientiertheit des Geometrie-Unterrichts (des Mathematik-Unterrichts überhaupt) hat sich in der Vergangenheit als undurchführbar erwiesen und ist inzwischen aus den Schulbüchern teilweise wieder verschwunden.

Die meisten Verfechter der Abbildungsgeometrie berufen sich heute lediglich noch auf den Werkzeugcharakter geometrischer Abbildungen. In der Tat sind zur Klärung geometrischer Sachverhalte abbildungsgeometrische Argumente durchaus brauchbar (etwa: Bei einer Punktspiegelung ist jede Bildgerade zu ihrer Urgeraden parallel). Allerdings kommt man durchweg auch ohne sie aus, und bei genauerem Hinsehen entpuppen sie sich oft als gar nicht abbildungsgeometrisch, sondern als kongruenzgeometrisch, eventuell in Verbindung mit kinematischen Vorstellungen (z.B.: Bei einer Punktspiegelung ist jede Bildgerade deswegen zu ihrer Urgeraden parallel, weil man sich diese um 180° gedreht vorstellen kann.). In Zeiten der Struktur-Euphorie hat man - konsequenterweise - den Schülern solche Plausibilitätsüberlegungen austreiben wollen und damit komplettes Unverständnis erzeugt.

Geometrische Abbildungen sind keine adäquaten Beschreibungen realer Bewegungen oder gar Handlungen (etwa: feststellen, ob ein Schrank in ein Zimmer paßt), es fehlt ihnen völlig die immer wieder unterstellte Dynamik, und operativ sind sie nur in einem äußerst eingeschränkten Sinn, nämlich als mathematische Operationen auf einer Struktur.

Für eine umfassende Diskussion der Problematik der Abbildungsgeometrie siehe Bender (1982).

Nun ist es keineswegs so, daß die Idee der Abbildung in der Geometrie, gar in einer operativen. nichts zu suchen hätte, im Gegenteil: Schon in den lebensweltlichen Anfängen operativer Begriffsbildung spielt die Analyse funktionaler Abhängigkeiten eine wesentliche Rolle. - Wie wirken sich an Gegenständen Änderungen von gewissen Teilen (Bewegung, Verformung) auf andere Teile aus (beim Wankelmotor, beim Scheibenwischer, beim Korkenzieher, usw.)? Solche Überlegungen, deren mathematische Fassung für viele einfache Objekte gar nicht so elementar ist, bilden die Grundlage für ein abstrakteres funktionales Denken in der Mathematik im Sinne der Meraner Reformvorschläge von 1905: Wenn bei einer Funktionsvorschrift der Definitionsbereich in irgendeiner Weise durchlaufen wird, wie sieht dann der zugehörige Weg durch den Wertebereich aus?

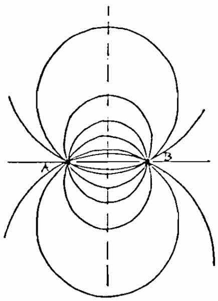


Abb.163 Umfangswinkelsatz

Zur Ausbildung eines solchen Denkens ist die Geometrie besser geeignet als die Analysis, weil sie mit Ebene und Raum als Punktmengen reichhaltigere Definitionsbereiche anbietet, in denen man auch wirklich unterschiedliche Wege gehen kann. Beispiel: Für zwei gegebene, verschiedene, feste Punkte A , B wird jedem anderen Punkt X das Winkelmaß $\omega(X) := \omega(AXB)$ zugeordnet. Wie ändert sich $\omega(X)$, wenn man X variiert, z.B. speziell auf einem Kreis durch A und B ?

Auch Figurenmengen liefern in der Geometrie sinnvolle Definitionsbereiche. Eine Bewegung (ein 'Wandern') ist dann nichts anderes als eine Abfolge von Elementen dieses Bereichs (bzw. von Teilmengen des euklidischen Raums), eine Abfolge von Lagen, bei der funktionale Betrachtungen angestellt werden können, z.B.: Wie ändert sich das Volumen einer Figur bei einer (als Bewegung gedachten) Streckung?

Erst in der Veränderlickeit zeigt sich die Abhängigkeit, und es ergibt sich u.U. die Notwendigkeit, Definitions- und Wertebereich einzurichten und die Abbildungsvorschrift genauer zu spezifizieren: Beim Übertragen einer Zeichnung mit einem Storchenschnabel, beim Ermitteln von Maßzahlen an Formen, beim Herstellen von Formen nach Eingangsvoraussetzungen aller Art (Kantenmodell eines Quaders mit bestimmten Kantenlängen, Deckel für eine vorgegebene Öffnung, Torricelli-Punkt eines Dreiecks usw.).

In einer elaborierten mathematischen Sprache, der viele dieser funktionalen Abhängigkeiten gar nicht so einfach zugänglich sind, kann das Wandern im Definitionsbereich seinerseits wieder als Abbildung bzw. eine Schar von Abbildungen dargestellt werden: Ist z.B. E der euklidische Raum, $F \subsetneq E$ eine Figur, $M \subsetneq \mathbb{R}$ eine Menge reeller Zahlen (für M kommen auch andere Mengen in Frage), dann stellt $f{:}F{\times}M \longrightarrow E$ (bzw. die Schar $f_t{:}F \rightarrow E$ $(t \in M)$) ein solches Wandern dar. Ist dann $w{:}P_w(E) \longrightarrow W$ die betrachtete Funktion auf einer Menge von Figuren (Teil der Potenzmenge von E) in einen Wertebereich W , dann ist für die Teilfiguren $G \subsetneq F$, für die $f(G,t) \in P_w(E)$ für alle $t \in M$ gilt, auf natürliche Weise eine Funktion $w{\circ}f_G{:}M \rightarrow W$ definiert, die dann das Untersuchungsobjekt ist.

Diese Abbildungsauffassung ist jedoch begrifflich so schwierig, daß sie für die meisten Schüler nicht zugänglich ist. Sie ist aber für den Unterricht in der Sekundarstufe I in dieser Explizierung auch gar nicht erforderlich; ein naives Verständnis vom Wandern im Definitionsbereich einer Funktion (z.B. der Volumenfunktion) ist völlig ausreichend, zumal der verständige Umgang mit dem formalen 'Wander'begriff einige inhaltliche Sicherheit in Analytischer Geometrie voraussetzt.

Wählt man übrigens $M = \{0,1\}$ und $F = E$, so hat man den Spezialfall der Permutation. Genaugenommen ist f_1 die Permutation; wo es aber um Eigenschaften von Figuren geht, werden i.a. Urbild und Bild simultan betrachtet, und diesem Umstand ist die Darstellung $f(F \times \{0,1\})$ bzw. $f_0(F) \cup f_1(F)$ angemessener.

Weder für die Ausbildung des formalen Abbildungsbegriffs noch für die Förderung funktionalen Denkens sind Ebenen- und Raumpermutationen zunächst geeignet: Sie stellen den Sonderfall dar, wo Definitions- und Wertebereich übereinstimmen. Bei der fast ausschließlichen Untersuchung von (meist beschränkten) echten Teilmengen des Definitionsbereichs gerät dieser ganz aus dem Blick; und Änderungen von Konfigurationen im Definitionsbereich (die ihrerseits wieder wie oben formalisiert werden könnten, eventuell mit weiteren Permutationen) ziehen allzu harmlose entsprechende Änderungen an Bildfigurationen nach sich.

Ist M ein Intervall, f stetig, und ist $f(F.t_0)$ kongruent zu $f(F,t_1)$ für alle $t_0,t_1 \in M$, so liegt mit f (analog mit f_t) eine kontinuierliche Bewegung eines starren Körpers und damit die Idealisierung einer realen Bewegung vor. Solche lückenlosen Abfolgen von Figuren bilden die Grundlage für die Idee der <u>Kontinuität</u>, die in Analysis und Topologie dann in anderem Gewande wieder auftaucht.

Geometrische Sachverhalte funktionieren in der Praxis durchweg mit kontinuierlichen Bewegungen: Andernfalls würde der Scheibenwischer ungereinigte Stellen hinterlassen; beim Abhören einer Schallplatte würden Stücke fehlen; man könnte durch Wände gehen (vgl. Abb.156), usw. Dabei gehören zum Begriff der Stetigkeit Sonderlagen wesentlich dazu: Bei welchen Stellungen des Läufers im Wankelmotor hat eine Kammer minimales Volumen, wann rastet ein Türschloß ein, wann überquert der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks bei stetiger Wanderung einer Ecke den Rand? Ebenso umfaßt der Stetigkeitsbegriff auch echte Störungen, Unstetigkeitsstellen, 'Katastrophen': Wird ein Sprungbrett zu stark belastet, dann federt es nicht mehr zurück, sondern bricht; wandert eine Ecke eines Dreiecks zu der Geraden durch die beiden anderen Ecken, dann ist auf einmal kein Umkreismittelpunkt mehr definiert; für die Funktion ω in Abb.163 sind A und B eigentliche Unstetigkeitsstellen, denn jedes Winkelmaß zwischen 0° und 180° kommt in jeder noch so kleinen Umgebung um A oder B vor.

Mit einer Variation des Frageprinzips für das funktionale Denken, nämlich: 'wie kann man den Definitionsbereich durchlaufen, so daß sich im Wertebereich nichts ändert?' stößt man erneut auf den Begriff der Invarianz. Gesucht sind also zu gegebenem $w:P_W(E) \longrightarrow W$ Mengen M und Funktionen f, für die für ein bestimmtes oder möglichst viele G gilt, daß $w \circ f_G : M \longrightarrow W$ konstant ist. Hier bedeutet Invarianz also Konstanz einer Funktion auf einem Teil des Definitionsbereichs. Invariant ist z.B. (1) w bei einer Wanderung auf einem Kreisbogen von A nach B ;(2) der Flächeninhalt bei der Verschiebung einer Dreiecksecke parallel zur gegenüberliegenden, festgehaltenen Seite; (3) eine Schraubenlinie als Punktmenge bei einer kontinuierlichen Schraubung; (4) ein Würfel als Punktmenge bei geeigneten Wanderungen in E , die man sich als diskontinuierliches Springen von einer Sonderlage zur nächsten bei bestimmten Rotationen vorstellen kann; (5) die Orientierung bei Doppelspiegelungen.

Beim üblichen Invarianzbegriff ist die Sichtweise etwas anders: Im Definitionsbereich wandern bedeutet dort, einen einzigen Schritt zu machen von einem Objekt zum nächsten, bzw. von allen Objekten zugleich zu je einem nächsten, wobei der Schritt durch die Funktionsvorschrift (z.B. Ebenenpermutation) festgelegt ist. Gilt für ein Merkmal, daß es bei jedem Objekt dieselbe Ausprägung wie bei dessen Bild hat (z.B. Volumen bei einer Spiegelung), so heißt es (das Merkmal) invariant unter der Funktion (z.B. der Permutation). Das Merkmal kann zwar auch wieder als Funktion dargestellt werden, die Betonung der Funktionsauffassung liegt aber beim Wandern (in endlich vielen diskontinuierlichen Schritten) im Definitionsbereich. Die letzten beiden der fünf Beispiele von oben würden also auch gut zu diesem Invarianzbegriff passen; allerdings zeigen die drei anderen, daß der von uns favorisierte tragfähiger ist.

Im dritten und vierten Beispiel erscheint die Symmetrie als besondere Form der Invarianz: Sei $i:P(E) \longrightarrow P(E)$ die Identität auf der Menge der Figuren, F eine bestimmte Figur. Für welche f und M ist dann $i \circ f_F(t) = F$ für alle $t \in M$? Bei Beispiel (3) kann $M = \mathbf{R}$ und f als kontinuierliche Schraubung, bei Beispiel (4) kann $M = \{0, 2\pi/3, 4\pi/3\}$ und f als kontinuierliche Rotation um eine Würfeldiagonale mit passender Parametrisierung gewählt werden.

Bei einem zweckgerichteten Funktionieren geometrischer Konfigurationen liegt i.a. nur eine eingeschränkte Beweglichkeit der betroffenen Teile als eine Art des Passens vor. Als Bewegungsarten kommen Translation, Rotation und Schraubung in Frage, die als einzige die freie Bewegung einer Form in ihrem Lager zulassen (es sei denn, Form und Lager wären eine der homogenen Flächen 'Ebene', 'Kugel' oder 'Zylinder'). Jedenfalls lassen sich mit diesen Bewegungstypen (eigentlich ist es nur einer, da Translation und Rotation spezielle Schraubungen sind) für einen starren Körper zwei beliebige Lagen ineinander überführen. Der 'Vorzug' dieser kanonischen Bewegungen liegt darüber hinaus darin, daß sie (eine) Fix(punkt)achse(n) mit Abstands- oder Richtungskonstanz haben.

Das Funktionieren geometrischer Formen beruht oft darauf, daß Formen in verschiedenen Positionen in ein und dasselbe Lager passen: Schraubenmutter, Sägeblatt, Kugellager, Korkenzieher usw. Es stehen hier der Begriff der Symmetrie (als kontinuierliche oder diskontinuierliche Invarianz von Raumstücken, die ein starrer Körper bei einer kanonischen Bewegung einnimmt) und der der Homogenität (als Ununterscheidbarkeit von Stellen) in engem Zusammenhang. (Mehr darüber in Teil II.)

Die Spiegelsymmetrie muß auf andere Art operationalisiert werden: Eine Form heißt spiegelsymmetrisch, wenn es eine Ebene gibt, so daß die Form aus jeder zur Ebene orthogonalen Gerade ein Stück ausschneidet (u.U. die leere Menge), das symmetrisch bezüglich des Schnittpunkts der Gerade mit der Ebene ist. Die Punktsymmetrie einer Teilmenge einer Gerade ist einfach die Kongruenz der durch den Punkt definierten beiden Hälften der Teilmenge <u>und</u> der beiden Hälften der Restmenge.

Der übliche mathematische Begriff von Symmetrie erscheint viel eleganter und ist auch leicht generalisierbar: Eine Figur F heißt (φ-)symmetrisch, wenn es eine Permutation $f: E \longrightarrow E$ vom Typ φ gibt, für die $f(F) = F$ ist und die nicht die Identität auf E ist. Da wirkt die oben entwickelte Fassung doch schwerfälliger. Sie entspricht jedoch, auch und gerade bei der Spiegelsymmetrie, der geometrischen Praxis: Zu einer Form für die Herstellung von (unsymmetrischen) linken Kotflügeln braucht man eine zweite für die rechten Kotflügel; und die beiden Formen sind im Prinzip von einer Ebene ausgehend so zu konstruieren wie in der Definition angegeben. Die Eleganz der mathematischen Formulierung erweist sich in diesem Fall für die Praxis nicht als nützlich.

3.4. Ziele für den Geometrie-Unterricht

Eines der Hauptanliegen des allgemeinbildenden Schulunterrichts ist die Umwelterschließung für die Schüler, wobei die Geometrie für die räumliche Umwelt zuständig ist. Nach unseren Überlegungen in 3.2 können wir folgendes Programm für den Geometrie-Unterricht an die Spitze eines inhaltlichen Lernziel-Katalogs stellen:

Strukturierung des wirklichen Raumes und Erforschung der Nutzbarkeit dieser Struktur.

Von diesem grundsätzlichen Ziel ausgehend wollen wir nun einen etwas detaillierteren Kanon von (immer noch allgemeinen) Lernzielen für einen umwelterschließenden Geometrie-Unterricht entwickeln.

Beginnen wir mit zwei Einwänden, die man unserem Vorgehen entgegenhalten könnte:
(i) Man sieht die Gefahr einer übertriebenen Lernzielorientierung des Unterrichts, insbesondere einer fragwürdigen Ableitung immer feinerer Lernziele aus den allgemeinsten Erziehungszielen (vgl. auch Freudenthal (1978), S.79ff).
(ii) Man zweifelt an der Bedeutung der Umwelterschließung bzw. der Erschließung des geometrischen Raumes als Aufgabe des Mathematik-Unterrichts.

Zu (i): Unsere Lernzieldiskussion mündet keineswegs in ein gebrauchsfertiges Curriculum; sie stellt vielmehr, in Analogie zur Diskussion der zentralen Ideen, die zentralen Merkmale eines (operativen) Geometrie-Unterrichts zusammen. Der Abstieg in der Hierarchie geht nur eine Stufe weit. Wir verbleiben im Bereich allgemeiner Lernziele für den Geometrie-Unterricht und überspringen nicht den Graben zwischen diesen und inhaltlichen Lernzielen. Einzelne Stoffe werden höchstens als erläuternde Beispiele angeführt.

Zu (ii): Gewiß ist es bis zu einem gewissen Grade eine Frage der Überzeugung, zu welchem Erziehungsziel der Schule man sich bekennt und ob es außer Umwelterschließung nicht noch Wichtigeres gibt: etwa die Entwicklung formaler Fähigkeiten und Fertigkeiten oder den Aufbau einer axiomatischen Theorie. Immerhin hat das von uns an die Spitze gestellte Ziel den Vorzug, daß es den Geometrie-Unterricht insgesamt rechtfertigt. Während formale Fähigkeiten und Fertigkeiten oder die Kenntnis axiomatischer Theorien auch in anderen mathematischen Disziplinen zu erwerben sind, ist für die Strukturierung des Raumes die Geometrie und vor allem sie zuständig. Ohne sie bliebe den Schülern ein nicht unwichtiger Teil ihrer Umwelt verschlossen. Darüber hinaus ist Umwelterschließung nicht bloß Aufsuchen und Beschreiben isolierter geometrischer Phänomene, sondern umfaßt auch den Aufbau eines Systems geometrischer Begriffe, das die räumliche Umwelt in eine Ordnung bringt. Das ist mit 'Raumstrukturierung' gemeint, und dabei werden auch die zentralen Ideen aus 3.2 wirksam. Schließlich erlaubt es ein operativer, allgemeiner: ein genetischer Geometrie-Unterricht gar nicht, die Umwelterschließung von geometrischer Begriffsbildung abzukoppeln.

Bevor wir nun auf die Teilziele (in einer durch das Wesen der Sprache bedingten linearen Abfolge) im einzelnen eingehen, geben wir zunächst in Abb.164 einen Überblick, wobei wir zugleich die Möglichkeiten geometrischer Modellbildung nutzen und das komplexe Beziehungsgefüge dieser Teilziele graphisch darstellen:

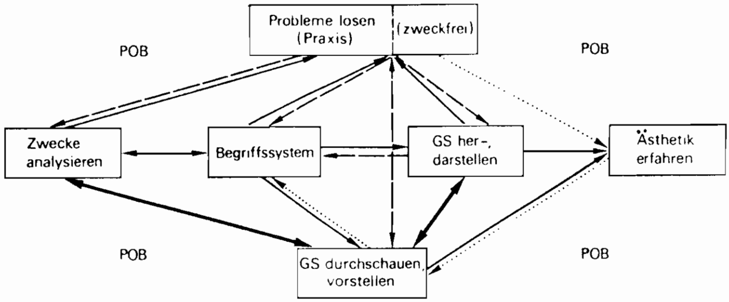


Abb.164 *Struktur der Lernziele*

Die zu durchschauenden, vorzustellenden, her- und darzustellenden lokalen (Formen, Größen und Relationen) und globalen räumlichen Strukturen fassen wir unter dem Sammelbegriff 'Geometrische Sachverhalte' (GS) zusammen. Die Pfeile und ihre Dicke stehen für die Abhängigkeit der Komponenten voneinander und die Stärke dieser Abhängigkeit. (Man könnte mit einer gewissen Berechtigung bestimmt alle in diesem Graphen möglichen Pfeile einzeichnen.) Wir fassen die Teilziele zugleich als Grundtätigkeiten im Geometrie-Unterricht auf. Sie erzeugen oder steigern Grundfähigkeiten. Zu jeder Grundtätigkeit 'X' tritt also die Grundfähigkeit 'X können'. Alle diese Grundtätigkeiten und -fähigkeiten bedingen und fördern sich gegenseitig, so daß ein einzelner Inhalt keiner von ihnen speziell zugeordnet werden könnte. Selbstverständlich stellt das Beziehungsnetz in Abb.164 nur einen Ausschnitt eines viel umfangreicheren Netzes dar, das u.a. auch noch außergeometrische Tätigkeiten und Fähigkeiten umfaßt.

a) Geometrische Sachverhalte durchschauen und sich vorstellen: Die beiden Tätigkeiten 'durchschauen' und 'sich vorstellen' sind in ihren Reinformen zwei Pole einer stetigen Skala. Zu durchschauende Sachverhalte liegen vor; vorzustellende nicht, sie sind durch Symbole gegeben (Sprache, Schrift, Gleichung). Vorstellungsvermögen ist das 'höhere' Ziel, denn viele geometrische Sachverhalte entziehen sich dem Durchschauen durch ihre Größe (Länder, Moleküle), Unzugänglichkeit (das Innere eines Motors), Dreidimensionalität (man sieht ja immer nur ein zweidimensionales Bild, wenn auch in räumlicher Tiefe, von einer Seite eines Gegenstandes) oder Veränderung in der Zeit (Briefwaage, Uhrwerk, Archimedische Schnecke). Man behilft sich mit Plänen, Bildern, räumlichen Modellen, Beschreibungen usw. und braucht dabei schon die Vorstellung, um vom Modell auf das Original schließen zu können oder um während einer Bewegung zu jedem Zeitpunkt ein Bild von den jeweils früheren Lagen eines Objekts zu haben.

Aber Vorstellung ist nicht möglich, wenn keine anschaulichen Hilfsmittel zur Verfügung stehen, die fraglichen Objekte selbst nicht schon einmal sicht- und greifbar vorhanden waren und wenn das Durchschauen nicht bereits trainiert ist. So alt diese Erkenntnis ist, so oft wird gegen sie verstoßen, im Geometrie-Unterricht nicht weniger als anderswo - wenn nicht durch streckenweise völlige Abwesenheit von Anschaulichkeit, dann doch durch die fast ausschließliche Beschränkung auf die ebene Geometrie und auf statische Betrachtungen. Hier schafft operative Begriffsbildung Abhilfe. An den Sachverhalten, für die man Raumanschauung benötigt, wird sie auch geübt: dreidimensional und kinematisch, eventuell im Nachvollzug eines Herstellungsprozesses.

b) Den Zweck und die Zweckhaftigkeit von geometrischen Sachverhalten erkennen und beschreiben: Dazu verweisen wir auf Kapitel 2.

c) Geometrische Sachverhalte her- und darstellen sowie Darstellungsweisen ineinander übertragen: Die Grundtätigkeit des Her- und Darstellens geometrischer Sachverhalte nimmt einen breiten Raum im herkömmlichen Geometrie-Unterricht ein; der Schwerpunkt liegt jedoch auf der zeichnerischen, numerischen, algebraischen, analytischen und axiomatisch-deduktiven Darstellung geometrischer Begriffe und des zugehörigen Begriffssystems. Zudem werden solche Darstellungen meist nicht als Modelle zweckvoller Realisate von Ideen, schon gar nicht als solche zweckvollen Realisate selbst. sondern weitgehend unabhängig von der räumlichen Wirklichkeit als Hilfsmittel zur Leitung abstrakter Gedanken betrachtet. Insbesondere werden die geometrischen Grundbegriffe an Tischplatten, Papierblättern, Geodreiecken, Linealen, Zirkeln. Quadratgittern, Maßstäben, Winkelmessern undefiniert verwendet (vgl. etwa Holland (1975), S.65).

Operative Begriffsbildung erfordert die Herstellung geometrischer Sachverhalte, besonders der Grundformen, mindestens aber ihre modellhafte Darstellung. Modelle dienen dabei nicht bloß als Ersatz für die Herstellung, sie unterstützen auch die Vorstellung durch Anschauung, wenn es um das Lösen schwieriger Probleme geht, oder helfen beim Entwickeln von Herstellvorschriften in einer experimentellen Vorphase. Herstellvorschriften müssen sich eigentlich noch in der Praxis bewähren; im Geometrie-Unterricht kommt es aber mehr auf den geometrischen und weniger auf den technischen Gehalt dieser Vorschriften an. Mögliche Schwierigkeiten bei der Realisierung sind hauptsächlich dann interessant, wenn sie geometrischer Natur sind. In abstrakten Bereichen bedeutet Darstellen entsprechend abstrakte Tätigkeiten, z.B. auch Definieren, Behaupten und Beweisen.

d) Geometrische und außergeometrische Probleme (geometrisch) lösen: Eine wesentliche Leistung bei der Lösung außergeometrischer Probleme besteht oft darin, sie als geometrische Probleme neu zu formulieren. Das ist zwar einerseits Teil der Grundtätigkeit 'geometrische Sachverhalte darstellen', geht aber andererseits darüber hinaus, indem die darzustellende geometrische Idee erst noch zu schaffen ist. Dabei handelt es sich oft um 'Ikonisationen'.

Eine Fülle geometrischer Problemstellungen findet man u.a. in Engel (1971), Kordemski (1959/1965), Perelman (1954), Stowasser (1974). Diese Autoren gehen zwar meist nicht auf den Zweck und die Herstellung geometrischer Formen ein, und ihre Beispiele sind keine Muster für operative Begriffsbildung. Häufig ist auch zu spüren, daß erst nachträglich um eine innermathematische Fragestellung herum eine reale Situation gebastelt wurde. Oder die Probleme sind singulär und haben wenig Bezug zu unserer Lebenswelt und wirken künstlich (z.B.: Ein Mann erhält das Land als Eigentum, das er an einem Tag zu Fuß umwandern kann). Viele Fragen der Struktur des Raumes könnten aber nicht problemorientiert angegangen werden, wollte man auf solche künstlichen Probleme verzichten. Die 'echten' entziehen sich oft einer hinreichend einfachen Formulierung, oder sie lassen sich nur aufwendig in Verbindung mit anderen, teils schwierigeren, teils weit entfernten oder irrelevanten Problemen stellen und lösen, oder sie sind der Lebenswelt der Schüler einfach zu fremd. Das Bemühen, einen Bezug zwischen der räumlichen Wirklichkeit und dem mathematischen System herzustellen, macht die künstlichen Probleme in gewissen Grenzen wertvoll als Übung für die Lösung von 'echten', (z.B. die Beschäftigung mit ebenen "Fliesenlegerproblemen" für die Entwicklung einer günstigen Form des Fußballs).

Wir halten jedoch wenig davon, wenn immer wieder Einkleidungen mathematischer Aufgaben als reale Anwendungen ausgegeben werden. Die erhoffte Motivationswirkung bleibt häufig genug aus, und das Gegenteil wird erreicht, da Schüler sehr wohl ein Gespür für die Künstlichkeit solcher Probleme haben und eher demotiviert werden.

<u>e) Ein System geometrischer Begriffe bilden</u>: Nach dem POB sind die in a) bis d) aufgeführten Grundtätigkeiten Teil der operativen Begriffsbildung. Diese scheint dann der Gefahr der Isolation der einzelnen Begriffe ausgesetzt, wenn die Problemsituationen und Zweckanalysen ihrerseits isoliert durchgeführt werden. (Passiert diese Begriffsisolierung im herkömmlichen Unterricht, so ist jedenfalls nicht die Praxisorientierung schuld, weil diese dort ohnehin meist nicht vorhanden ist.) In einem recht verstandenen operativen Geometrie-Unterricht bietet aber gerade die Überschreitung eines rein mathematischen Aufbaus die Chance zum Knüpfen eines besonders engen Netzes gehaltvoller Beziehungen, in dem die mathematische Struktur lediglich einen (durchaus bedeutenden) Teil ausmacht. Einen Eindruck davon, was operative Begriffsbildung hier leisten kann, vermitteln Kapitel 2 und 3 mit den vielfältigen Querverbindungen zwischen den einzelnen Abschnitten. Die alte Dichotomie zwischen mathematischer Begriffsbildung einerseits und Praxisorientierung andererseits ist im operativen Unter-

richt aufgehoben: Der Aufbau der Theorie und Umwelterschließung gehen Hand in Hand.

f) Ästhetische Momente der Geometrie erfahren: Dazu gehören: Band- und Flächenornamente (Mosaike, Kartoffeldruck), unsymmetrische, spiegel-, dreh-, schub-, strecksymmetrische Zeichnungen mit und ohne Gerät, körperhafte geometrische Formen aus allerlei Material herstellen; Gegenstände aus Papier falten; künstlerische Darstellungen auf ihren geometrischen Gehalt untersuchen, z.B. Bildaufteilung, Proportionen, Fluchtlinien, Symmetrien, arabische Ornamente, die topologisch-geometrischen Täuschungen von Escher, usw.

Mit geometrischen Kategorien allein soll und kann eine künstlerische Darstellung allerdings nicht betrachtet werden, sie können aber anregend und hilfreich sein.

Abschließende Bemerkungen zu den Lernzielen

Die Skizze in Abb.164 stellt das Beziehungsnetz der genannten Ziele übersichtlicher dar als viele Worte. Die Kernstücke operativer Begriffsbildung (Analyse von Zwecken, Herstellen von Formen, Lösen von Problemen) sind zweifellos b), c) und d). Benötigt werden aber unbedingt auch e) und a) (Aufbau eines Systems und Raumanschauung); gerade der Anteil von e) am Geometrie-Unterricht darf - auch bei Ausrichtung am POB - nicht unterschätzt werden. Jedoch darf sich e) nicht verselbständigen oder gar unter Ausschließung der anderen Ziele den Unterricht allein bestimmen. Es ist nicht so sehr der Umfang von b), durch den sich operativer vom üblichen (realitätsfernen) Geometrie-Unterricht unterscheidet, sondern vielmehr der dauernde Bezug von e) auf die anderen Tätigkeiten. Ähnliches gilt für a): Wenn man sich überhaupt zur Raumanschauung als einem Ziel des Geometrie-Unterrichts bekennt und es sogar durch gezielte Unterrichtsaktivitäten in die Tat umzusetzen sucht (im herkömmlichen Unterricht etwa durch Betrachten und Beschreiben von Körpern), so fehlt doch meist der Bezug zum restlichen, vorwiegend an e) ausgerichteten Unterricht, und es nimmt nicht wunder, wenn in der Raumanschauung keine großen Fortschritte erzielt werden. Nach unserer Auffassung reicht allerdings die Verbindung zu e) allein nicht hin; es gehören b), c), d) und auch f) dazu.

Bei der Einordnung unseres Lernzielkatalogs in andere Lernzielsysteme beziehen wir uns auf den in der deutschen Mathematik-Didaktik vielzitierten Katalog von Winter (1972), der als allgemeine Lernziele für den Mathematik-Unterricht nennt: Kognitive Strategien: (1) Argumentieren, (2) Kreatives Verhalten, (3) Mathematisieren; Intellektuelle Techniken: (4) Klassifizieren, (5) Ordnen, (6) Generalisieren, (7) Analogisieren, (8) Formalisieren.

Dieser Katalog hat im Laufe der Jahre eine Akzentverschiebung in Richtung Umweltbezug erfahren: Winter (1975) ersetzt 'Mathematisieren' durch 'die praktische Nutzbarkeit der Mathematik erfahren' und faßt die fünf intellektuellen Techniken unter das Lernziel 'formale Fertigkeiten erwerben'. Bei Wittmann (1974/1978, S.41) rückt 'Situationen (mathematischer und besonders auch real-umweltlicher Art) mathematisieren' an die erste Stelle und an die Stelle von 'formale Fertigkeiten erwerben' tritt 'Grundkenntnisse und Grundtechniken zur Verarbeitung mathematischer Informationen und deren Anwendung erlernen'.

Da Geometrie eine Teildisziplin der Mathematik ist, sind diese Lernziele des Mathematik-Unterrichts gleichzeitig auch Lernziele des Geometrie-Unterrichts. Unser Katalog gibt dazu die sachbezogenen Tätigkeiten an, bei denen die (nach Winter) angestrebten geistigen Fähigkeiten ausgebildet werden sollen.

Besondere Schwerpunkte des operativen Geometrie-Unterrichts sind die Strategien des <u>Mathematisierens</u> (in hinreichend weitem Sinn; operative Begriffsbildung ist nichts anderes) und des <u>Argumentierens</u> (z.B. bei Zweckanalysen und Untersuchungen auf Zweckmäßigkeit). Darüber hinaus fördert er noch allgemeinere Erziehungsziele. Zu denken ist dabei etwa an <u>soziale</u> Ziele: Operative Begriffsbildung nimmt ihren Ausgang letztlich von der Bedürfnissphäre des Menschen, und die Geometrie wird auch als Teil gesellschaftlichen Handelns erfahren. Überdies ermöglicht die gemeinsame handwerkliche Arbeit bei der Herstellung von Formen konkretes soziales Lernen. Von der

- praktischen Tätigkeit
- in Verbindung mit Zwecküberlegungen
- mit dem Ziel der Umwelterschließung
- ausgerichtet an zentralen Ideen

erwarten wir auf der <u>affektiven</u> Seite eine Lebensbereicherung (im Sinne Winters (1976)) für die Schüler, die sich (nach Rosenfeld (1966)) nicht zuletzt als Steigerung der intrinsischen Motivation zur Geometrie auswirkt.

Es fällt auf, daß in unserem Katalog jeglicher Stufenbezug fehlt. Tatsächlich sind alle genannten Grundtätigkeiten in jedem Stadium der Geometrie-Genese Teile des Geometrie-Unterrichts. Lediglich in der Gewichtung von zeitlichem Anteil und inhaltlicher Bedeutung ergeben sich in der Genese Verschiebungen, und zwar erhebliche, wie die folgende Diskussion zeigt.

<u>3.5. Unterrichtsorganisation</u>

Unterrichtsorganisation ist ein vielschichtiger Gegenstand der Didaktik. Aus ihm wollen wir ein paar Aspekte herausgreifen, in denen das POB wirksam wird. Wir können uns dabei meistens darauf beschränken, gewisse (organisatorische)

Funktionen des POB nur zu nennen und für Erläuterungen auf frühere Ausführungen zu verweisen.

Wie das POB die lokale (Stoff-)Organisation leitet, haben wir am Beispiel des Ziegelsteins in Kapitel 1 beschrieben. Auch in den Unterrichtseinheiten, die wir in Kapitel 4 noch vorstellen, ist zu erkennen, wie der Unterricht am POB auszurichten ist. Begriffe werden im Grundsatz mit dem Durchlaufen der Schleife aus Abb.5 gebildet, die sozusagen die 'kleinste selbständige Organisationseinheit' darstellt. Die nächste Stufe ist die Organisation von Begriffsbildungsschleifen: Wiederholter Lauf durch dieselbe Schleife, Abkürzungen, Wahl anderer Startpunkte, Verweilen bei einzelnen Konstituenten (Zwecke, Funktion, Begriffe, Realisat), Verzweigungen zu anderen Schleifen, die mit der ersten nur Teile gemeinsam haben, Rückkehr, usw. Dabei wird ein System geometrischer Begriffe aufgebaut, der wirkliche Raum strukturiert und die Nutzbarkeit dieser Struktur erforscht. Die Lernziele aus 3.3 und die zentralen und universellen Ideen, die unterschiedlich stark an den operativen Standpunkt angebunden sind, werden voll wirksam.

Gleichzeitig rücken die globalen Aspekte der Unterrichtsorgsanisation in den Vordergrund, wenn etwa die Bildung eines Begriffs auf höherem Niveau wieder aufgenommen wird und nunmehr weitere, besser ausgebildete Begriffe und Systeme mit einbezogen werden, wenn also eine höhere Windung auf der 'Curriculumspirale' erreicht worden ist. Zur Verbesserung der begrifflichen Voraussetzung hat dann hoffentlich nicht nur die Geometrie beigetragen, sondern auch andere Schulfächer, die außerschulischen Lebenserfahrungen und die kognitive Entwicklung der Schüler.

Der Aufstieg in der 'Curriculumspirale' ist, jedenfalls was die operative Geometrie betrifft, kein beständiger, gleichmäßiger Prozeß, vielmehr lassen sich qualitativ verschiedene Schwerpunkte ausmachen, die wir im folgenden Stadien nennen. Wir möchten jedoch von vornherein betonen, daß diese Einteilung der operativen Geometrie-Genese in Stadien eher heuristisch ist, daß die Übergänge fließend sind und die Abfolge keineswegs starr ist (jedoch setzt operative Begriffsbildung auf einem Stadium die entsprechende Begriffsbildung auf den vorhergehenden Stadien voraus). Das Schema der Stadien soll helfen, geeignete 'Intensitätsgrade' beim Einsatz des POB zu markieren, und zwar angenähert bezogen auf die drei Schulstufen Primarstufe, Sekundarstufe I und II.

Im ersten Stadium werden Situationen aus der Umwelt der Schüler in den Geometrie-Unterricht eingebracht, Situationen, die Probleme bergen oder in denen Bedürfnisse entstehen, die Anlaß zu zielgerichtetem geometrischen Handeln geben, d.h. zur Herstellung von geometrischen Formen (Sachverhalten), mit denen die Probleme gelöst, die Bedürfnisse befriedigt werden. Diese Formen (Sachverhalte) erscheinen den Schülern als Umweltphänomene, über die sie sich wegen deren Konkretheit leichter äußern können als über Situationen. Oft nimmt daher die Diskussion ihren Ausgang von solchen Phänomenen: Ihre Zwecke und Vorkommen werden erörtert, auch auf Problemsituationen kann man dabei zu sprechen kommen ("stellt euch einmal vor, wir hätten dieses Ding nicht"). Die Schüler bauen die Form nach oder stellen wenigstens ein Modell her und achten dabei schon auf die zur Zweckerfüllung wesentlichen Merkmale sowie auf die notwendige Realisierungsgüte. Schließlich reflektieren sie den Gebrauch der Form, der ihnen in der Regel schon vorher geläufig ist, und zwar bewußt, d.h. unter Einbezug der ganzen Diskussion.

Im zweiten Stadium wird das begriffliche Instrumentarium zur Beherrschung der Situationen und Phänomene entwickelt. Hier kommt die operative Begriffsbildung voll zur Wirkung. Lösungsmöglichkeiten werden nicht mehr nur praktisch erprobt, sondern begrifflich vorgeplant: Die Schüler analysieren die zur Zweckerfüllung erforderlichen geometrischen Funktionen quantitativ genauer, ideieren daraus Begriffe, bringen die Begriffe mit Plausibilitätsüberlegungen und Beweisansätzen in ein System und übertragen dieses (stückweise) in die Realität (z.B. Anwendung der Kongruenzsätze im Dreieck bei Stabilisierungsdreiecken an Baukonstruktionen aller Art.) Es handelt sich jedoch nicht um Anwendungen isoliert vom Aufbau des Systems, vielmehr leiten die Anwendungen diesen Aufbau fortwährend.

Bereits im zweiten Stadium kann die operative Geometrie ihren Beitrag zur Daseinssicherung und Lebensbereicherung der Schüler im Sinne Winters (1976) leisten. Im dritten Stadium geht es lediglich noch um eine logische Abrundung des Begriffssystems. Die Schüler stellen es auf die Basis eines Axiomensytems und beweisen die Sätze neu. Wesentlich ist dabei, daß die Axiome nicht nur passend zum System gewählt werden, sondern möglichst operativ interpretierbar sind und damit aus lebensweltlicher Praxis gerechtfertigt werden.

Diese Einteilung in Stadien erinnert an den stufenweisen Aufbau des Mathematik-Unterrichts, wie er schon von Drenckhahn (1952/53, S.206ff) vorgeschlagen wurde: Dort folgen aufeinander die Bereiche "einer 'experimentell-induktiven', einer ... 'intuitiven' und einer 'formalen' Mathematik". Wenngleich Drenckhahns Überlegungen stark von der Gestalttheorie beeinflußt sind, so enthalten sie doch auch einen deutlichen operativen Ansatz, wie seine Beschreibung der Stufen des Geometrie-Unterrichts zeigt: "Die Begriffe der ersten Stufe weisen (u.a.) ... eine aus dem unmittelbar praktischen Anstoß zu ihrer Bildung folgende 'Handgreiflichkeit'" auf, "die Regeln und Sätze treten als Herstellungs- bzw. Zeichenvorschriften und Berechnungsvorschriften auf. Anlaß zu ihrer Aufstellung geben entsprechende praktische Situationen. ... Die Begriffe und Regeln treten an den Stellen des sachlich orientierten Zusammenhangs auf, an denen sie gerade gebraucht werden (pädagogisch: Gesamtunterricht)." In der zweiten Stufe: "In jedem dieser Kapitel kann enge Fühlung zu der realen Welt des Praktisch-Geometrischen gehalten werden ... Es ist ... möglich, mittels der idealisierten Vorstellung der Bewegungsvorgänge und der ebenfalls durch Idealisierung der betreffenden Vorstellungen gewonnenen Grundgebilde (Punkt, Strecke, Ebenenteil) auf 'geometrisch-konstruktivem' Weg zu scharfen begrifflichen Fassungen von Quadrat, ... usw. zu kommen. ... Über die Geometrie der dritten Stufe erübrigen sich Einzelausführungen; es braucht nur auf die euklidische Geometrie verwiesen zu werden."

Die ersten beiden Stufen entsprechen inhaltlich etwa unserem zweiten Stadium. Sie sind auch schulorganisatorisch wie diese vom fünften Schuljahr aufwärts angesiedelt - bis Ende der sechziger Jahre gab es ohnehin nur bruchstückhaften Geometrie-Unterricht auf der Grundstufe der deutschen Volksschule. Erst mit der Grundschulreform ab 1968 wurde diesem Mangel abgeholfen. Noch 1967 hatte Bauersfeld (1967) zunächst nur eine geometrische Propädeutik in der Grundschule gefordert. Inzwischen hat aber der Geometrie-Unterricht in der Primarstufe eine eigenständige Bedeutung erlangt (vgl. die Analysen im Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 1976). Vom operativen Standpunkt aus kann es gar nicht anders sein: Die Geometrie fängt nicht erst auf dem Niveau voll ausgebildeter Begriffe an.

Stufenmodelle (wie das von Drenckhahn) wurden in den fünfziger Jahren in der deutschen Mathematik-Didaktik heftig diskutiert. Erst als die Forschungsergebnisse der Genfer Schule der Kognitionspsychologie allmählich im deutschen Sprachraum bekannt wurden, wandte man sich von den mit der Gestaltpsychologie "psychogenetisch" und mehr noch "mathematikgeschichtlich" (Drenckhahn 1952/53) begründeten Einteilungen ab. Mit der Konzentration auf die scheinbar instruktionsunabhängige Intelligenzentwicklung des Individuums geriet aber leider auch die teleologische Komponente in der Mathematik-Didaktik, wie sie vor allem von Zeißig, Kempinsky oder von Stückrath vertreten wurde, fast in Vergessenheit.

Nach unserem Verständnis vom Unterricht sind die sachstrukturellen Merkmale von Begriffsbildungsprozessen nicht weniger wichtig als die entwicklungspsychologischen. Auch ein Erwachsener mit weitgehend abgeschlossener Intelligenzentwicklung muß in die Lage versetzt werden können, ab ovo Geometrie zu lernen. Da nützt es wenig, einen Lehrgang an der kognitiven Entwicklung des Kindes auszurichten. Für den Unterricht in der Schule muß die konstruktible Genese einer Disziplin selbstverständlich mit dieser Entwicklung verträglich sein.

Wie im Lokalen, bei der Bildung des einzelnen Begriffs, so ist es auch im Globalen, im gesamten Geometrie-Unterricht, eine wesentliche didaktische Funktion des POB, die geometrische Praxis und Theorie in Ausrichtung an den Lernzielen aus 3.3 und den zentralen Ideen zu verbinden.

Das POB legt einen fächerübergreifenden Unterricht nahe, zumindest bietet es gute Gelegenheiten dazu: Im ersten Stadium vor allem im Zusammenhang mit Themen des Sachunterrichts, insbesondere bei projektbezogenen Untersuchungen von Homogenitäten (Sport und Spiel, Haushaltsgegenstände, Eisenbahn, Fahrzeuge usw.). Später dürften sich die sehr engen Beziehungen zum Werken, textilen Gestalten sowie zu Technik und Architektur als fruchtbar erweisen (vorwiegend im zweiten Stadium). Die Verbindungen zu einigen mehr grundlagenbetonten physikalischen Problemen und Begriffsbildungen (aus Kinematik, Mechanik oder Relativitätstheorie) kommen, wenn überhaupt, wohl nur für das dritte Stadium in Frage. Innerhalb eines Projektunterrichts könnte das POB die Ausbildung geometrischer Kenntnisse und Fähigkeiten leiten. Die Problematik des Projektunterrichts wollen wir jedoch nicht weiter vertiefen, da dabei grundsätzliche pädagogische Überlegungen und ebenso grundsätzliche Fragen der Schulorganisation ins Spiel kommen, die mit operativer Geometrie nur entfernt zusammenhängen (vgl. Münzinger 1977).

4. UNTERRICHTSBEISPIELE

Wir stellen nun einige Unterrichtsbeispiele vor, die wir in Haupt- und Realschulen erprobt haben. Es handelt sich um die Einheiten 'Die Schraubenlinie' (8. Schuljahr), 'Geometrie des Fußballs' (9. Schuljahr) und 'Parallelfiguren' (7. Schuljahr), die im wesentlichen auch schon im 6. Schuljahr durchführbar sind.

Zugleich weisen wir auf die beiden folgenden Projekte einer akzentuierten unterrichtlichen Verwirklichung des operativen Gedankens hin: Die schon mehrfach durchgeführte Unterrichtseinheit "Geometrie aus dem Handwerk" (5. Schuljahr) von Volk (1984), deren Ausgangspunkt der Ziegelstein mit seiner Zweckbestimmung und seinen Homogenitätseigenschaften ist, sowie der inzwischen ebenfalls erprobte Entwurf einer Einführung geometrischer Grundbegriffe im 5. Schuljahr von Krainer (1982).

Bei allen Unterrichtsbeispielen zeigt sich, daß nicht jede Aktivität operativ im engeren Sinn ist und direkt den Zweck, die Herstellung oder den praktischen Gebrauch einer Form betrifft: Es gibt immer auch Abschnitte, während derer es 'nur' um den Aufbau des Begriffsnetzes geht und das POB lediglich aus dem Hintergrund wirksam ist.

Diese Wirkung des POB sollte dem ganzen Geometrie-Unterricht unterliegen, und zwar von Anfang an. Es ist nämlich keineswegs einfach, irgendwann einmal mitten in einem Geometrie-Curriculum 'auf operativ' umzuschalten. Schüler, die bereits längere Zeit nicht-operativen Geometrie-Unterricht 'genossen' haben, finden nur mühsam und allmählich zur operativen Denkweise, und die erste Schwierigkeit besteht darin, ihnen beizubringen, daß ihre operativen Aktivitäten nicht nur Spielerei, sondern auch Mathematik darstellen. Um dennoch Unterrichtsbeispiele mit ganz normalen Klassen liefern zu können, die ja dann vorher keinen operativen Geometrie-Unterricht kannten, haben wir Themen etwas abseits vom gebräuchlichen Curriculum gewählt. Eine Vertiefung bereits bekannter Begriffe erschien uns ungünstig, da man diese nur noch gewaltsam operativ hätte vornehmen können. Überdies wird mit der Neuartigkeit der Inhalte auch leichter eine neue Vermittlungsart angenommen, während Altbekanntes, neu verpackt, eher Langeweile und Ablehnung hervorgerufen hätte.

Am Ende jeder dieser Unterrichtseinheiten haben wir mit einem Test den Lernerfolg kontrolliert. Die Aufgaben und (kurzen) Auswertungen können für 'Die Schraubenlinie' in einer Praxisstudie (Schmalz 1980) und für 'Geometrie des Fußballs' in Bender/Schreiber (1980), S.88f, nachgelesen werden; für 'Parallelfiguren' haben wir den Test in 4.3 aufgenommen.

4.1. Die Schraubenlinie

Das Thema 'Schraubenlinie' wurde in der 8. Klasse einer Realschule behandelt. Die während zweier Wochen zur Verfügung stehenden vier Doppelstunden erlaubten keine ausführliche Behandlung aller wichtigen Realisate, dennoch findet man in ihnen die wesentlichsten Begriffsaspekte. Mehr noch als bei den nachfolgenden Unterrichtseinheiten (Fußballoberfläche, Parallelfiguren) bieten sich bei der Schraubenlinie verschiedene Arten der Behandlung im Unterricht an. Das im weiteren beschriebene Vorgehen gründet u.a. in einer Beobachtung der Klasse während eines sechsmonatigen Zeitraums vor Durchführung der Unterrichtseinheit.

Im folgenden geben wir lediglich eine sehr knappe Verlaufsbeschreibung. Für einen Leser, der Kapitel 3 durchgesehen hat, dürfte sich gerade bei einem solchen Paradebeispiel operativer Begriffsbildung wie der Schraubenlinie ein eigener didaktischer Kommentar erübrigen. Zudem würde es den Rahmen dieses Kapitels sprengen, die Verwendung des Unterrichtsmaterials sowie den protokollierten Unterrichtsverlauf ausführlicher zu dokumentieren (wie in Schmalz (1980) geschehen).

Zur Durchführung der Unterrichtseinheit sind nur sehr elementare Kenntnisse und Fertigkeiten vorauszusetzen: so das Abmessen von Strecken und das Herstellen einfacher Zeichnungen mit Lineal und Bleistift. Für die wenigen anfallenden Berechnungen genügen die vier Grundrechenarten. Der Umgang mit den einzelnen Materialien fordert darüber hinaus ein aufmerksames Beobachten und ein gewisses Maß an Einfallsreichtum.

Als Material wurden einige Gebrauchsgegenstände sowie eigens für den Unterricht hergestellte Modelle verwendet, und zwar u.a.: Rundholz; Papiermodell einer Treppe, das sich um den Holzzylinder wickeln läßt; verschiedene Korkenzieher, darunter ein Glockenkorkenzieher; Seilspanner (Wantenspanner); je eine links- und rechtswendige Schraubenlinie aus dickem Kupferdraht; Einschraubgestell für diese Kupferschrauben (vertikal befestigter Metallstreifen mit Perforation in Ganghöhenabstand); Holzkugel, die auf die Kupferschraube gesteckt und arretiert werden kann sowie Rundholz mit umlaufender und vertikaler Nut zur Aufnahme von Kupferschraube und Holzkugel (Abb.165), Vorrichtung zum Erzeugen einer Schraubenlinie durch gerades Ab-

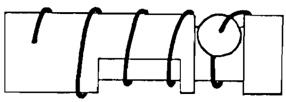


Abb.165

rollen eines Zylinders auf einer schrägen abfärbenden Kante; Schrauben mit Muttern; diverse Abbildungen (z.B. von Förderschnecken); Arbeitsblätter.

Um die Begriffsbildung bei den Zwecken beginnen zu können, erörtern wir mit den Schülern zunächst das Thema 'Überwindung von Höhen'. Wie kommt man auf eine hohe Mauer, einen steilen Felsen, einen Turm etc.? Leitern und Seile werden genannt und ihre Funktionsweise beschrieben; die Strickleiter vereinigt die Vorteile von Leiter und Seil, nämlich sowohl raumsparend und leicht transportierbar wie relativ bequem und sicher benutzbar zu sein. Die Schüler entdecken ohne weiteres, daß die Wahl eines Verfahrens von der Steilheit des jeweiligen Hindernisses abhängt. In diesem Zusammenhang greifen wir den Begriff der Steigung auf, der den Schülern von linearen Funktionsgraphen und von Hinweisschildern im Straßenverkehr bekannt ist.

Große Steigungen lassen sich mit einer Leiter überwinden. Aber was geschieht, wenn man die Hände frei haben muß, z.B. um etwas zu tragen? Einige Kinder verweisen auf die Rampen, über die man auf Baustellen die Schubkarren hinaufschiebt. Solche Rampen dürfen nicht zu steil sein, also müssen sie lang sein. Wie groß ist ihre Steigung (Verhältnis von Höhen- zu Horizontaldifferenz)? Welche Steigung kann eine Autostraße haben? Die (gewöhnlich viel zu hoch gewählten) Vorschläge werden in Tafelzeichnungen umgesetzt, Straßenkarten werden angesehen. Die größten Steigungen findet man im Gebirge, die Straßen führen dann in Serpentinen (einer 'vagen' Vorform der Schraubenlinie) hinauf. Die Kinder wissen sofort den Grund: Durch die vielen Kurven wird die Straße länger, dafür aber weniger steil.

Für Autos hat eine schiefe Ebene im allgemeinen weniger als 12% Steigung. Fußgänger hingegen müssen oft größere Steigungen überwinden, 60% und mehr. Wir sprechen mit den Schülern darüber, daß und wie Treppen hierbei ihre Funktion erfüllen. Warum kann eine Treppe steiler sein als eine Rampe? Warum sind Leitern meistens steiler als Treppen? Einzelne Beobachtungen werden an die Tafel geschrieben und gezeichnet.

Die Schüler bestimmen die Steigung einer Treppe aus Höhe und Tiefe der Stufen. Sie finden heraus, daß bei einer guten Treppe alle Stufen gleich sind und die Steigung nicht zu groß ist. Sie haben auch beobachtet, daß in den meisten Häusern die Treppen aus Gründen der Platzersparnis gewunden sind und in ausreichender Höhe übereinander führen; vor allem fällt ihnen dabei die Wendeltreppe ein. Sie erzählen, wo sie schon einmal eine Wendeltreppe gesehen haben: in Kirchtürmen, in Aussichtstürmen, als Aufgang bei Fußgängerbrücken, als Stiege hinauf zur Orgelbühne innerhalb einer Kirche usw. Gemeinsam wickeln sie ein aus Papier ausgeschnittenes Treppenprofil um ein Rundholz und stellen so ein einfaches Modell einer Wendeltreppe her. Das Ergebnis regt zu lebhafter

Diskussion an: Treppen dürfen nicht zu steil sein, sonst sind sie unsicher. Wendeltreppen (und entsprechend auch die Treppen in Häusern) können aber auch nicht beliebig kleine Steigungen haben. Der Abstand der übereinander führenden Stufen muß groß genug sein, damit man aufrecht gehen kann. Die Kinder sprechen sinnfällig von 'Durchgangshöhe' (woran wir sogleich den Terminus 'Ganghöhe' anschließen). Je kleiner der Durchmesser ausfällt, desto größer muß die Steigung der Wendeltreppe sein. Die Schüler erhalten ein Arbeitsblatt, um die überbaute Grundfläche verschiedener auf dieselbe Höhe führender Treppen zu vergleichen.

In der nächsten Stunde beginnen wir mit der Frage nach anderen Dingen, die wie eine Wendeltreppe geformt sind. Als den Schülern zunächst nichts einfällt, zeigen wir das vorher aufgewickelte Papiermodell, und dies weckt einige passende Vorstellungen: Federn, Holzschrauben, Korkenzieher, Bohrer, Flaschenverschlüsse. Die Archimedische Schnecke (Förderschnecke) dürfte den Kindern in der Regel kaum bekannt sein; auch können sie ihre Funktionsweise anhand einer Abbildung noch keineswegs erfassen. Dafür erarbeiten wir das Prinzip an der Transportschraube, die in einigen Automaten kleine Packungen mit Lebensmitteln oder Süßigkeiten in die Ausgabe befördert (siehe Abb.77).

Wir verwenden dazu eine große Kupferschraube, deren Standort auf einem Tisch wir mit einem senkrecht hinter sie gehaltenen Buch fixieren; einige Flachbatterien dienen als Transportgut.

Zunächst meinen einige Schüler, man müsse die Schraube verschieben, damit ein Päckchen in die Ausgabe fällt. Diskussion und Versuch ergeben dann aber die richtige Arbeitsweise: Die Schraube dreht sich, und die Batterien werden dabei verschoben. Allerdings hat es den Anschein, als würde sich auch die Schraube verschieben; doch liegt sie die ganze Zeit fest am Buch an. Dieser Vorgang weckt bei den Kindern großes Interesse. An einigen Korkenziehern soll nun das Funktionieren einer Schraube weiter untersucht werden (siehe Abb.75a-c).

Die Befürchtung, daß die Handhabung eines Korkenziehers zu trivial sei und darum die Aufmerksamkeit der Schüler nachlassen könnte, erweist sich hier als unbegründet. Natürlich bietet der Gebrauch des einfachen Korkenziehers a keine Schwierigkeiten; die sachgemäße Benutzung von b und später c gelingt den Schülern aber erst nach mehreren Versuchen. Es dauert einige Zeit, bis ihnen klar wird, daß a und b nach dem gleichen Prinzip funktionieren: In beiden Fällen wird ja der Korken mit der in ihm festsitzenden Schraube herausgezogen (bei a mit der Hand, bei b mit Hilfe eines Zusatzgewindes am Gestell). Den Glockenkorkenzieher c halten die Schüler anfangs für eine allenfalls geringfügig verschiedene Variante von b. Nach wiederholter Beobachtung und selbständiger Handhabung wird ihnen dann bewußt: Der Korken kommt aus der Flasche, während sich die Schraube in ihm weiterdreht; dabei wird sie durch das Gestell daran gehindert, weiter in den Korken einzudringen.

Was die meisten Kinder an dieser Stelle wohl ahnen, das arbeiten wir im Rückblick auf die bisherigen Beispiele mit ihnen nun explizit heraus: Das wesentliche Funktionsprinzip der Schraube ist der in allen Fällen gleichzeitige Ablauf von Drehung und Verschiebung, (und zwar als Bewegung der Schraube relativ zu ihrem Lager). Wer eine Wendeltreppe hinaufsteigt, gewinnt nicht nur an Höhe, er dreht sich auch um die Treppenachse. Die Drehung der Transportschraube bewirkt eine Verschiebung der Batterien. Wird die rotierende Schraube des Korkenziehers durch sein Gestell daran gehindert, tiefer in den Flaschenhals einzudringen, so 'muß' sich eben der Korken nach oben verschieben. Jetzt erst merken die Schüler, daß auch der einfache Korkenzieher a seine Pointe hat. Was müßte eigentlich mit dem Korken geschehen, wenn wir an der Schraube ziehen? Er müßte sich drehen. Und warum tut er dies nicht? Weil er fest in der Flasche sitzt.

Wir verdeutlichen nun das Funktionieren der Schraubenlinie noch mit dem Modell Kupferschraube-Holzkugel-Rundholz (Abb.165). Dazu wird zunächst die Schraube auf den Zylinder gesteckt und mit einer Hand schnell gedreht. Die Schüler beschreiben ihren Eindruck, die Windungen der Schraube liefen nach oben (bzw. unten, je nach Drehrichtung). Nun wird eine Holzkugel an der Stelle der Schraube arretiert, an der sie eine ortsfeste Drehung durch die umlaufende Nut mitmachen kann. Zum Erstaunen der Kinder dreht sich die Kugel im Kreis, die Schraubenwindungen scheinen hingegen noch immer entlang dem Zylinder zu laufen. Dann wird darüber diskutiert, was man anstellen muß, damit sich die Kugel entlang der senkrechten Nut (in Richtung der Zylinderachse) verschiebt. Die Schüler finden schnell heraus, daß die Kugel nicht fest mit der Schraube verbunden sein darf. Sie lösen die Arretierung, drehen die Schraube und sehen den Erfolg.

In den nächsten Stunden geht es um Herstellung und Längenbestimmung. Korkenzieher und Kupferschraube bringen die Schüler sofort auf das einfachste Herstellverfahren: Sie binden ein Stück Draht mehrmals um ein kleines Rundholz und ziehen dann die Windungen auseinander. Anschließend besprechen wir folgende Punkte: Gleichzeitig oder nacheinander ausgeführte Drehung und Verschiebung, mehr oder weniger gleichmäßige Steigung der so entstandenen Schraube (Homogenität); wo es unbedingt auf Gleichmäßigkeit ankommt, und wo nicht so sehr. - Beim früher schon geübten Aufwickeln eines Dreiecks auf einen Zylinder (Wendeltreppe) erfolgen Drehung und Verschiebung gleichzeitig. Hierzu lernen die Schüler noch eine einfache Variante kennen, bei der ein Zylinder in gerader Richtung gerollt wird.

Wir fragen nach der Länge dieses Schraubenlinienstücks. Natürlich braucht man bloß die abfärbende Kante auszumessen. Und wie lang ist die Modellschraube aus Kupfer? Man müßte sie zu einer Strecke abwickeln, aber das ist hier praktisch schwierig (einigen Schülern gelingt eine solche Abwicklung bei den kleinen Druckfedern aus ihren Kugelschreibern). Gemeinsam wird ein graphisches Verfahren entwickelt: Die Schüler zeichnen die Abwicklung der Schraube (bzw. einer Schraubenwindung) als rechtwinkliges Dreieck; dabei gibt eine Kathete die Schraubenhöhe (bzw. Ganghöhe) an, die andere Kathete das Produkt aus Windungsanzahl und Zylinderumfang.

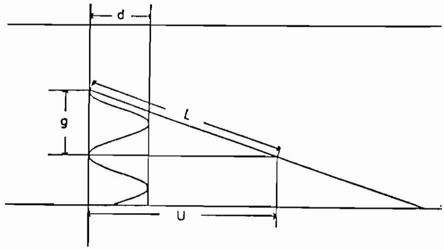


Abb.166 *Abwicklung einer Schraubenwindung*
g=Ganghöhe, d=Zylinderdurchmesser
U=Zylinderumfang, L=Länge einer Windung

Bei einem Korkenzieher oder der Kupferschraube läßt sich U (Bezeichnungen wie in Abb.166) nicht so gut direkt, sondern besser indirekt aus dem Durchmesser d bestimmen. Die Schüler ermitteln den Durchmesser der Kupferschraube (9,5 cm) und berechnen die Näherung $U \approx 3{,}14 \cdot 9{,}5$ cm $\approx 29{,}8$ cm . Aus der Höhe der Schraube (29 cm) und der Windungszahl (6,5) ergibt sich die Ganghöhe (ca. 4,5 cm). Dann wird die Hypotenuse L des aus g und U konstruierten Dreiecks gemessen: $L \approx 30$ cm . Bei 6,5 Windungen ergibt sich als Länge der Schraube 195 cm . Größere Ausmaße erfordern eine maßstabsgerechte Verkleinerung; hierbei tritt dann der Modellcharakter der Zeichnung noch deutlicher zutage.

Abschließend besprechen wir einige Anwendungen der Schraubenlinie, bei denen die Orientierung eine Rolle spielt (vgl. 2.3.10). Die Schüler erhalten einen auseinandergeschraubten Seilspanner und entdecken den Unterschied der beiden gegenüberliegenden Gewinde (bzw. Schrauben).

Wir geben ihnen auch eine weitere (anders orientierte) Kupferschraube. Auch hier wird der Unterschied zwischen Rechts- und Linksschraube sinnfällig, indem die Schüler beide Schrauben in das Gestell hineindrehen. Anfangs glauben einige, sie könnten die Linksschraube dann auch rechtsherum hineindrehen, wenn sie oben und unten vertauschen. Die beiden Schraubsinne werden durch ein Schema gekennzeichnet.

Es folgen weitere Anwendungen (Schraubfassung der Glühbirnen in Fahrzeugen der New Yorker Verkehrsbetriebe, Gewinde an Fahrradpedalen) sowie Überlegungen zum überwiegenden Vorkommen von Rechtsschrauben. Zusätzlich gehen wir noch auf die Orientierung der Ebene ein, wobei ungleichsinnige Drehpfeile, die in der Tafelfläche zu bewegen sind, und Möbius-Bänder verwendet werden.

4.2. Geometrie des Fußballs

In dieser Unterrichtseinheit geht es um die geometrische Oberflächenstruktur des heutzutage üblichen Lederfußballs und - dies sei für diejenigen Leser festgehalten, die am Ende einer Unterrichtseinheit gern einen handfesten mathematischen Inhalt gelernt sehen - den Begriff des archimedischen Körpers. Dieser ist nicht elementar, sondern auf Begriffe wie Ebene, Strecke, Winkel, Kugel, Polygon, regelmäßiges Polygon aufgebaut; er ist daher kein elementares Beispiel für operative Begriffsbildung. Dennoch ist er ein typisches Beispiel, da ja 'höhere' Begriffe am Geometrie-Unterricht einen gewichtigen Anteil haben.

Die Einheit umfaßt etwa acht Unterrichtsstunden, zuzüglich der Zeit für Aktivitäten zwischen den Stunden (die man Hausaufgaben nennen könnte) und für einen Abschlußtest.

Als Material werden verwendet: Papier, Beistift, Pappe, Scheren, Klebstoff, Schablonen von Polygonen, Lineale, Winkelmesser, Taschenrechner, Arbeitsblätter mit Definitionen, Ergebnissen oder Aufgaben, Drucke aller ebenen archimedischen

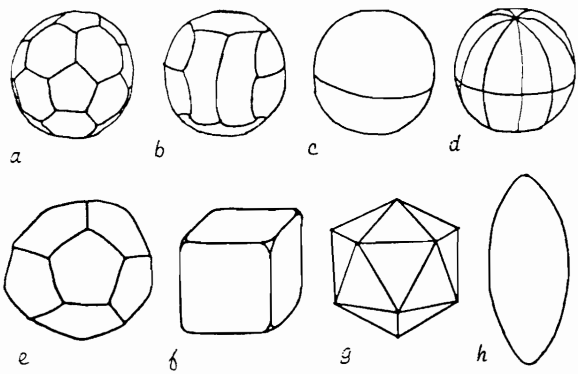


Abb.167 Einige Bälle

Parkette, Baupläne für die platonischen Körper, Abbildungen aller archimedischen Körper, Overheadprojektor mit Folien zum gesamten Material für die Schüler, Wandtafel und nicht zuletzt zahlreiche Bälle und ähnliche Körper mit verschiedenen Oberflächenstrukturen.

Zum Verlauf: Als erstes findet ausgehend von den 'Bällen' eine Zweckanalyse des Fußballs statt (bzw. seiner Oberfläche): Anders als etwa im Rugby darf der Fußball nicht mit den Händen berührt werden und trifft oft den Boden. Damit dennoch seine Bewegung kontrolliert werden kann, für hohe Geschwindigkeiten und kräftige Berührungen mit menschlichen Körpern muß er leicht und elastisch sein, ohne Aus- oder Einbuchtungen, (prinzipiell) kugelförmig und zugleich sehr strapazierfähig. Man nimmt eine luftgefüllte Gummiblase und überzieht diese mit einer Lederdecke.

Warum ist diese Lederdecke nicht aus einem oder zwei Stücken gefertigt wie bei dem Gummiball in Abb.167c? Beim Apfelsinen- oder Eierschälen oder beim Papierbiegen stellen die Schüler fest, daß ebene Flächen nicht (isometrisch) zu kugeligen gebogen werden können und umgekehrt. Daher wird die Decke aus kleinen, flachen Stücken zusammengenäht, denen beim Aufpumpem eine gewisse Krümmung verpaßt wird.

Für die Struktur dieser Kugelparkettierung werden Kriterien entwickelt: Für die Strapazierfähigkeit sollen die Nähte kurz und gerade sein, es soll nicht zu viele Nähte geben, und an einer Stelle sollen höchstens drei zusammenkommen; die Lederstücke sollen alle konvex (also Polygone), nicht zu groß (wegen des inneren Luftdrucks) und nicht zu klein sein (damit es nicht zu viele Nähte gibt). Für die Symmetrie sollen die Polygone regelmäßig und alle Eckenkränze - so haben wir die Anordnung von Polygonen um eine Ecke genannt - gleich sein. Für die Rundheit sollen die Polygone klein sein, insbesondere von etwa gleicher Größe, d.h. mit etwa gleicher Eckenzahl. Der übliche Fußball mit zwölf Fünf- und zwanzig Sechsecken (mit einem Fünf- und zwei Sechsecken an einer Ecke) scheint die Kriterien gut zu erfüllen. Um aber feststellen zu können, ob diese Form die beste ist, muß man die Alternativen kennenlernen und vergleichen.

Diese Frage wird in den nächsten Stunden von ebenen Parketten aus angegangen. Diese sind einfacher als räumliche Parkette zu behandeln, und von ihnen aus werden auch die räumlichen konstruiert. Ausgehend von Parketten der Umwelt (Bürgersteige, Fußböden, Mauern usw.) wird der Parkettbegriff zunehmend spezialisiert bis zu dem des archimedischen Parketts. Auch hier werden, allerdings nur knapp, Zweckanalysen durchgeführt. Nach bestimmten Vorgaben zeichnen, legen, beschreiben die Schüler Parkette. Wir zeigen, daß die Ebene mit jedem Dreieck und mit jedem (auch nicht-konvexen) Viereck parkettiert werden kann. Mit anderen n-Ecken ist das i.a. nicht möglich. Die Schüler erkennen die Bedeutung der inneren Winkel der Polygone und entwickeln ein Verfahren zur Ermittlung der Winkel von regelmäßigen Polygonen. Man kann jedes n-Eck ohne Hinzunahme weiterer Ecken in n-2 Dreiecke zerlegen. Daraus ergibt sich als Winkelsumme im n-Eck $(n-2)\cdot 180^0$ und als Winkel im regelmäßigen n-Eck $180^0\cdot(n-2)/n$. Wir erstellen eine Liste, die im weiteren Verlauf dauernd verwendet wird (siehe Tab.2). Für n gegen unendlich geht der Winkel gegen 180°.

Definition des archimedischen Parketts: Nur regelmäßige Polygone, alle von gleicher Kantenlänge, Ecke auf Ecke, alle Eckenkränze gleich. - Die archimedischen Parkette werden mit Hilfe ihrer Eckenkränze symbolisiert, und zwar werden die Eckenzahlen der Polygone eines Eckenkranzes kreisförmig in der richtigen Reihenfolge aufgeschrieben, etwa

3 3
4 3 4

um die zyklische Vertauschbarkeit anzudeuten. (Im folgenden verzichten wir auf diese Notation aus drucktechnischen Gründen.)

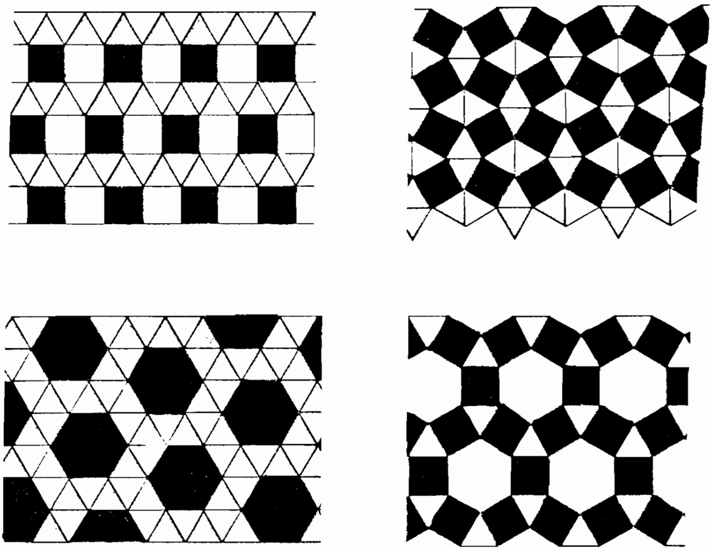


Abb.168 *Einige archimedische Parkette*

Wir stellen die Aufgabe, alle zu finden. Nach mehr zufälligen Versuchen der Schüler mit mäßigem Erfolg systematisieren wir die Aufgabe gemeinsam: In einer Ecke können drei, vier, fünf oder sechs regelmäßige Polygone zusammenstoßen. Im Fall 'sechs' kommen nur sechs Dreiecke in Frage. In Gruppen bearbeiten die

Schüler die drei anderen Fälle. Daß kein archimedisches Parkett mit dem Eckenkranz (3 4 3 12) gelegt werden kann, erfahren die Schüler, wenn sie das Parkett fortsetzen wollen: Es entstehen Ecken mit (12 12 3) .

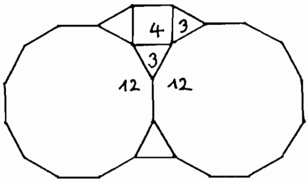


Abb.169

Als Konsequenz ergibt sich, daß sie beim Verifizieren eines Parketts nicht nur einen vollständigen Eckenkranz, sondern darum herum einen weiteren Ring aus Polygonen legen müssen. Dann allerdings weiß man über das ganze Parkett Bescheid, weil man an jeder Ecke so wie an der Ausgangsecke weiterbauen kann. Wir geben noch folgenden Satz an und erläutern ihn an Beispielen: Besteht eine Eckenumgebung aus genau drei Polygonen und hat eines davon ungerade Eckenanzahl, dann sind die Anzahlen der beiden anderen gleich. - Es kommt weniger darauf an, daß jeder Schüler jedes Parkett selbst findet, sondern auf die Einsicht, daß es nur endlich viele Parkette gibt, und darauf, daß den Schülern eine Methode zugänglich ist, mit der sie alle finden können.

Den Übergang zu räumlichen Parketten leisten wir über Fünfecke: Drei regelmäßige Fünfecke um eine Ecke in der Ebene lassen eine Lücke von 36° . Klappt man zwei hoch, bis sie sich treffen, so entsteht plötzlich ein ausgefüllter Eckenkranz, jetzt ein räumliches Gebilde. Baut man entsprechend weiter, dann entsteht ein geschlossener Körper. Die Schüler erhalten den Bauplan des Dodekaeders: Zwei Schalen mit fünfeckigem Boden und Wänden aus fünf Fünfecken werden ineinandergesetzt. Man muß sich dann noch überzeugen, daß tatsächlich alle Eckenkränze gleich sind. (Will man sich nicht auf den Augenschein verlassen, so könnte man mit Symmetriebetrachtungen sogar beweisen, daß die Konstruktion möglich ist.) Die Schüler bilden in Analogie zum Begriff des archimedischen Parketts den des archimedischen Körpers und können Definition und Symbolik ohne Änderungen übernehmen, also hier: (5 5 5) .

In der folgenden Stunde überlegen wir, welche archimedischen Körper mit nur einer Sorte von Polygonen es noch gibt - unter Beachtung der wichtigen Bedingung, daß in jeder Ecke mindestens drei Polygone zusammenstoßen und die Winkel in einer Ecke zusammen weniger als 360° ergeben müssen. Es gibt die bekannten vier weiteren Möglichkeiten, die sich alle von einem Eckenkranz ausgehend leicht realisieren lassen. Nur beim Ikosaeder muß aufgepaßt werden: Man darf die beiden fünfseitigen Pyramiden nicht direkt aufeinander setzen, da dabei auch Eckenkränze mit nur vier Dreiecken entstünden, sondern etwa so wie in Abb.116. Die Baupläne teilen wir erst zu Beginn der nächsten Stunde aus (siehe Abb.115, 116).

Nun stellen die Schüler einen Zusammenhang zwischen der Größe der Lücke und der Güte der Kugel fest: Je kleiner die Lücke, desto besser die Kugel. Die Lücke kann noch verkleinert werden, wenn man verschiedene Sorten von Polygonen zuläßt. Die Schüler schlagen Möglichkeiten mit kleinen Lücken vor und realisieren in Teamarbeit die entsprechenden archimedischen Körper in Teilen. Bei Prismen und Antiprismen übrigens ergeben kleine Lücken keine guten Kugeln.

Die Schüler diskutieren die Herstellung der echten Bälle: Die 32 Lederstücke müssen alle etwas größer sein als ihr späterer Anteil an der Balloberfläche. Sie werden so zusammengenäht, daß der Rand jedes Polygons als Saum übersteht (Abb.170). Die Innenseite des Balles befindet sich dabei außen, und ehe die Fläche geschlossen wird, muß man sie noch wenden. Dann wird die Blase befestigt und der Ball ganz zugenäht.

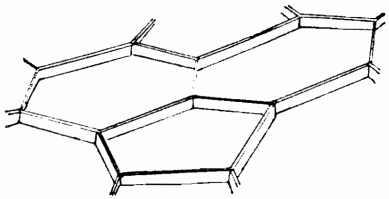


Abb.170

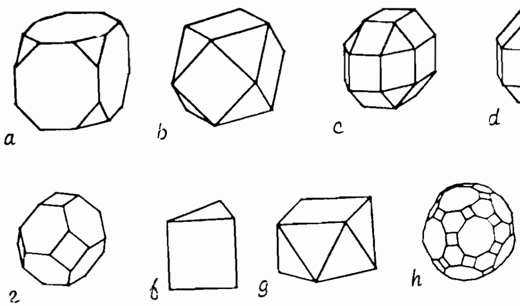


Abb.171 Einige archimedische Körper

Danach werfen wir die Frage auf, welche archimedischen Körper es gibt und wie sie alle zu finden sind: Es geht genau wie bei den ebenen Parketten (ausgeführt z.B. in Aschkinuse 1963/1969). Die Schüler brauchen den Nachweis nicht zu führen, sondern sie bekommen die Abbildungen aller archimedischen Körper, tragen für jeden sein Symbol ein, was sie zwingt, sich mit allen zu beschäftigen, und stellen dann schließlich fest, daß (6 6 5) die Kriterien am besten erfüllt.

Wir gehen noch kurz auf die Möglichkeit ein, Körper aus anderen durch Abschneiden der Ecken o.ä. zu erhalten (wenn sie massiv sind), an den verschiedenen Abarten des Würfels und auch an (6 6 5) aus dem Ikosaeder. Es ist darauf zu achten, daß alle Kanten gleich lang sind (und zwar i.a. nicht halb so lang wie vorher).

Schließlich werden von Schülern und Lehrer noch bekannte Gegenstände aus der Umwelt genannt, die die Form archimedischer Körper haben, und diese Formen jeweils begründet:

- Kohlensilo, wirtschaftlich aus vorgefertigten Platten hergestellt (Dodekaeder (5 5 5) von E. Torroja 1951 in Madrid gebaut (nach Brauner/Kickinger 1982, S.8)),
- Ball für Kleinkinder, der nicht so gut rollt wie ein gewöhnlicher Ball: (5 5 5) ,
- (Spiel-)Würfel (4 4 4) ,
- Baumhäuser mit würfelförmiger, auf der Spitze stehender "Krone" (4 4 4) (1975 von P. Blom in der Nähe von Eindhoven gebaut (nach Schoemaker u.a. 1981, S.149ff)),
- Vogelhäuschen, Kantenmodell eines Ikodaeders (3 3 3 3 3) (eine Ecke mit ihren 5 Kanten ist entfernt, der Rest sitzt auf der entstandenen 'Schnittebene' auf (vgl. Abb.113c); aus Ökonomiegründen sind die 25 Holzstäbe alle kongruent; je 5 bzw. 4 von ihnen werden an ihren Enden auf geeignet geformte Bleche geschraubt; die 5 Dreiecke an der oberen Spitze sind durch ein Dach abgedeckt),
- Fußball (6 6 5) ,
- Tipp-Kick-Ball (3 4 3 4) (da er massiv ist, stört es nicht, wenn an jeder Ecke mehr als drei Kanten zusammenstoßen),
- Schwimmbecken (Prisma (8 8 4)),
- Tetraederpackung für Getränke (3 3 3) ,
- abgestumpfter Würfel für besseres Rollen (8 8 3) ;

(bei den letzten drei Beispielen ist die Kongruenz aller Kanten nicht wesentlich).

In dieser Verlaufsbeschreibung sind nicht alle Konstituenten des POB explizit genannt worden, erst recht nicht im Unterricht selbst. Tatsächlich wurden sie aber alle durchlaufen: Die Zweckanalyse mündet mit all den physikalischen und technischen Randbedingungen in die geometrische Funktion der Form, eine möglichst gute Kugel aus ebenen Stücken zu sein. Dies führt fast über die ganze Einheit hinweg zum Begriff des archimedischen Körpers, speziell (6 6 5). Die Schüler realisieren eigenhändig archimedische Körper als Papiermodelle und diskutieren die Herstellweise für den echten Fußball. Schließlich gebrauchen sie den Fußball praktisch sehr häufig, allerdings nicht innerhalb des Geometrie-Unterrichts. Ein Großteil des eigentlichen Unterrichts spielt sich in dem Übergang von 'geometrischer Funktion' zu 'Begriff' ab, während die Herstellung von Formen zum Teil in den Hausaufgaben stattfindet. Insofern ähnelt dieser operative Unterricht durchaus dem herkömmlichen. Der wesentliche Unterschied liegt darin, daß im operativen Unterricht alle Komponenten des Schemas mitwirken, und zwar unabhängig von ihrem zeitlichen Umfang (z.B. nehmen die Zweckanalysen insgesamt nur etwas mehr als eine Stunde ein, sind aber wesentliche Grundlage für den ganzen Unterricht). Nur am Rande möchten wir auf die wichtigen Aspekte der räumlichen Geometrie oder der Motivation hinweisen, insbesondere durch den praktischen Umgang mit Formen und durch die Herstellung handlicher, ästhetischer Objekte.

Die zentralen Ideen der operativen Geometrie wirken beim Unterricht mit: Ein Teil der Exhaustion ist zwar bereits bei der Bildung der Grundbegriffe, die in den archimedischen Körper eingehen, vorweggenommen worden. Aber ins Spiel kommt diese zentrale Idee noch durch die Approximation der Kugel durch Polyeder und vor allem durch die Schwierigkeit, die die Schüler beim Zusammenbau haben: Anders als beim Zeichnen ebener Parkette, wo Ungenauigkeiten noch relativ unauffällig ausgeglichen werden können, machen sich bei räumlichen Körpern Abweichungen bei Kantenlängen oder Winkeln viel unangenehmer bemerkbar, weil sie kaum zu reparieren sind. – Auch die Homogenität steckt bereits in den zum Bau der Körper verwendeten Polygonen. An den archimedischen Parketten und Körpern zeigt sie sich mehr in ihrer diskreten Form durch die Äquivalenz der Eckenumgebungen. Daß diese Äquivalenz nicht gleichbedeutend mit Symmetrie im abbildungsgeometrischen Sinn ist, sieht man sehr schön daran, daß es zwei verschiedene archimedische Körper (4 4 3 4) gibt (siehe Abb.171c,d). – Schließlich wird die Idee des Passens besonders ausführlich benutzt: Passen verlangt, daß zu verklebende Kanten kongruent sind. Die Herstellung eines ebenen oder räumlichen ausgefüllten Eckenkranzes bzw. danach eines ganzen Parketts oder Körpers ist nur möglich, wenn die beteiligten Formen zueinander passen. – Es liegt ein Beispiel diskreter Mathematik vor, das eigene Strategien nötig hat.

Zu den Lernzielen: Es werden inhaltliche Lernziele geometrischer, topologischer, kombinatorischer, auch arithmetischer Art angesprochen. Die Einheit ist vor allem an dem allgemeinen Lernziel des Geometrie-Unterrichts orientiert, den wirklichen Raum zu strukturieren und die Nutzbarkeit dieser Struktur zu erforschen, mit den in 3.2 diskutierten Komponenten. An formalen Lernzielen des Mathematik-Unterrichts werden vor allem die Fähigkeiten zum Argumentieren und zum Mathematisieren, sowie die Fertigkeiten des Klassifizierens, des Analogisierens und des Formalisierens angesprochen. Der Unterricht kann aber auch auf ein Kreativitätstraining hin angelegt werden.

Folgende stoffliche Voraussetzungen sind erforderlich: geometrische Grunderfahrungen aus der Schule; die Bekanntschaft mit Polygonen, besonders regelmäßigen; die Vertrautheit mit Winkeln, besonders Addition von Winkeln. Die Einheit ist wohl ab dem 6. Schuljahr geeignet.

Als Fortsetzungsmöglichkeiten bieten sich an:

- das Papierbiegen auf das Falten zurückführen und die Frage klären, warum Faltlinien Geraden sind, daraus Rückschlüsse auf das Biegen ziehen;
- Gruppen, insbesondere Symmetriegruppen;
- topologische Betrachtungen, etwa über die Eulercharakteristik;
- Trigonometrie. z.B. Neigungswinkel berechnen;
- andere Polyeder, z.B. Deltoide oder nicht-konvexe Polyeder ;
- die archimedischen Körper ausführlicher, etwa: engeres Beziehungsnetz knüpfen, Symmetrien stärker einbeziehen, die dualen Körper behandeln.

4.3. Parallelfiguren

Unser drittes Unterrichtsbeispiel 'Parallelfiguren' haben wir an Studenten und, auf wesentlich weniger anspruchsvollem Niveau, in der 7. Klasse einer Realschule erprobt. Den Verlauf dieses Unterrichts wollen wir hier in groben Zügen schildern und anschließend wieder mit einem didaktischen Kommentar versehen. (Das weitere überlappt sich teilweise mit der früheren Studie zur Parallelität (Schreiber 1982).)

Inhaltlich geht es um eine Parallelitätsbeziehung der ebenen Geometrie, die bei Bewegungsabläufen vorkommt und recht interessante metrische Eigenschaften aufweist. Insgesamt besitzt das Thema, im Vergleich zu 'Schraubenlinie' oder 'Fußballoberfläche', mehr Kennzeichen herkömmlicher geometrischer Schulstoffe; zudem sind ja beim Parallelitätsbegriff operative Züge ohnehin nur relativ schwach ausgeprägt. Das Thema liefert ein Beispiel für den partiellen Einsatz des POB, wie er vor allem in Diskussionen über die Zwecke geometrischer Formen gegeben ist. Je nach den vorhandenen Lernvoraussetzungen werden für die Unterrichtseinheit zwischen 6 und 9 Schulstunden benötigt. Hinzu kommen Hausaufgaben sowie ein Abschlußtest.

Als Material werden verwendet: übliches Zeichengerät, Pappe, Scheren, Grundriß einer Stadionbahn und evtl. anderer Bahnen für Schnelligkeitswettbewerbe, eine Reihe von unterschiedlich großen Kreisscheiben aus Pappe, Holz und Plastik, mehrere aus Holzplatten geschnittene konvexe und nicht-konvexe Vielecke sowie im Mittelpunkt gelochte Kreisscheiben, Schnüre, Meßbänder, Modelle für Zylinder und Kegelstumpf, ein Globus, Arbeitsblätter und Folien.

Den Einstieg bildet ein Gespräch über Schnelligkeitswettbewerbe und die dabei benutzten Bahnformen. Die Kinder nennen sofort typische Disziplinen wie Laufen, Autorennen, Pferderennen, Fahrradfahren, Schwimmen und dgl. mehr. Auch die vielfältigen Bahnformen sind ihnen geläufig. In den seltensten Fällen sind solche Bahnen ein Naturprodukt, vielmehr werden sie in Anpassung an vorgegebene Ziele und Zwecke planvoll angelegt. Beim Schwimmen kommen z.B. 'Kurven' nicht in Frage, bei Laufdisziplinen (außer Querfeldein oder Marathon) soll das Publikum die Läufer ständig beobachten können, beim Autorennen muß für eine Mindestanzahl von 'Kurvenschikanen' gesorgt werden (Grundriß des alten Nürburgringes: Bahnlänge ca. 28 km, 89 Links- und 85 Rechtskurven), beim Pferderennen (wie auch beim Laufen im Leichtathletik-Stadion) sind zu enge Kurven und 'Einbuchtungen' (nicht-konvexe Bahnen) zu vermeiden; zudem benötigt man für ungehinderte Fortbewegung mit größerer Geschwindigkeit auch gerade Bahnabschnitte. Diese und weitere Gründe für die Formgebung lassen sich unter Gesichtspunkten erörtern wie Länge, Geschlossenheit, Konvexität, Orientierung (Umlaufsinn: Weshalb wird normalerweise linksherum gelaufen?) und ähnliches mehr.

Bis dahin ist von Parallelität noch nicht die Rede, zu ihr wird man aber dadurch geführt, daß man die Diskussion auf Zweck und Form der gewöhnlichen Stadionbahn lenkt. Die Schüler finden rasch entscheidende Kriterien: Es muß eine 'Gerade' (Strecke) geben, auf der die '100 Meter' gelaufen werden können. Die Bahn darf nicht zu viele oder zu enge Kurven haben, geschweige denn Ecken; außerdem sollte es beim Laufen entgegen dem Uhrzeigersinn keine Rechtskurven geben (Konvexität). Die Zuschauer müssen das Gelände überblicken können; die Sicht von einander 'gegenüberliegenden' Punkten aus sollte in etwa dieselbe sein. Für Wettkämpfe benötigt man natürlich mehrere Bahnen, die in gleichem Abstand nebeneinander laufen (Parallelität).

Die Schüler verfertigen Entwürfe der ihnen bekannten Stadionbahnen und versehen die Bahnabschnitte mit (geschätzten) Längenangaben; die Kriterien werden auf die Entwürfe angewendet. Manche Schüler, so zeigt sich, sind keineswegs so vertraut mit der Stadionbahn wie sie ürsprünglich selbst glaubten. Sie sprechen von 'Oval' und zeichnen Figuren wie in Abb.172.

Abb.172

Aber auch wenn solche Formen aufgrund einfacher Argumente ausscheiden, bleibt eventuell eine Unsicherheit hinsichtlich der Gestalt der beiden 'Kurven'. Um hier den Halbkreis zu begründen, sind weitere Kriterien heranzuziehen. Es würde einen Läufer stören, wenn er eine 'ungleichmäßige' Kurve durchlaufen müßte. Ein Halbkreis ist am einfachsten herzustellen. Interessant ist die Frage, wie man denn einen so großen Halbkreis herstellen könne.

Wie groß ist im übrigen sein Durchmesser? Und wie lang sind die 'Kurven' und die 'Gerade' (Strecke)? Die Schüler wissen, daß die Innenbahn 400 m lang ist. Sie schätzen die vier Bahnabschnitte auf je 100 m Länge. Beim Betrachten einer solchen (auf Folie gezeichneten) Bahn kommt vielen der Verdacht, daß die ganze Anlage zu länglich und der Halbkreis recht eng ausgefallen ist (der Kreisdurchmesser ist hier 63,66 m ; siehe Abb.173a). In Wirklichkeit ist die Strecke, zugunsten des Kreisdurchmessers, beträchtlich kürzer (Abb.173b).

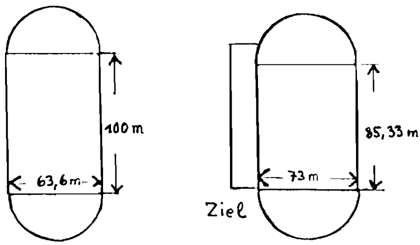


Abb.173 a b

Sofort wird die Frage gestellt, wo denn hier die 100m-Strecke geblieben sei. Die Antwort wird mitgeteilt und lautet: Der gerade Abschnitt vor der Haupttribüne wird aus dem Halbkreis herausführend um eine entsprechende Strecke rückwärts verlängert (Abb.173b). Bei einigen Kindern taucht zusätzlich noch die Frage auf: Wo hat im Inneren der Bahnanlage ein über 100 m langes Fußballfeld Platz? Sie finden die Lösung ohne Hilfe, nach dem ihnen eingefallen ist, daß das Feld um einige Meter weniger breit ist als der Halbkreis und daher in dessen Inneres hineinreichen kann.

Die folgende Stunde beginnt mit einem Gespräch über die Laufwettbewerbe, insbesondere über die Plätze der Läufer beim Start. Der typischste Fall ist der 400m-Lauf. Wir stellen die Aufgabe, die Startplätze auf den Bahnen zu ermitteln, und zwar zunächst auf Bahn 1 (Innenbahn) und Bahn 2. Üblich für Bahn 1 ist der Start am Ende der 100m-Strecke (Abb.173b). Warum ist er am günstigsten? Nach unsystematischen Schätzversuchen für den 'Vorsprung' des Läufers auf Bahn 2 (Werte zwischen 1 m und 12 m) gehen wir gemeinsam systematisch an die Aufgabe heran: Zunächst bemerken die Schüler, daß der Mehrweg auf einer äußeren Bahn nicht durch die geraden Abschnitte entsteht. Anhand eines Modells aus Holz (oder Pappe) zerlegen sie die Bahn in ein Rechteck und zwei Halbkreisscheiben. Der Mehrweg auf Bahn 2 ist somit gleich dem Betrag, um den der Umfang des ihr zugehörigen Kreises den Umfang des Innenbahnkreises übertrifft. Dies wird als vorläufiges Ergebnis festgehalten.

Wie bestimmt man den Umfang U eines Kreises mit dem Durchmesser d ? Die Schüler eines 7. Schuljahres kennen dazu gewöhnlich noch keine Formel, sie kommen aber sofort auf die Idee, einige Kreisscheiben durch Abrollen oder durch Anlegen von Bindfäden auszumessen. In Gruppenarbeit werden auf diese Weise zunächst die ersten beiden Zeilen von Tab.4 erarbeitet.

d (cm)	7,1	9,1	14,6	19,7	29,8	39,1
U (cm)	22,4	28,5	45,9	61,9	94,4	123,0
U:d	3,15	3,13	3,14	3,14	3,17	3,16

Tab.4

Einige Kinder entdecken ohne weiteres, daß der Umfang ungefähr 3-mal so groß ist wie der Durchmesser. Nachdem sie jedoch gemerkt haben, daß 3d immer etwas kleiner ausfällt als U , schlagen sie die Division U:d vor (dritte Zeile der Tabelle). Das Resultat wird als zwiespältig empfunden: Einerseits deuten die errechneten Verhältnisse auf eine Übereinstimmung hin, andererseits weichen die Zahlen doch fast alle voneinander ab. In dieser Situation kommen die Schüler allein nicht weiter. Wir fordern sie dazu auf, die eine oder andere Messung noch einmal durchzuführen. Als die neuen Werte etwas von den alten abweichen, ergibt sich eine lebhafte Diskussion, an deren Ende die Einsicht steht, daß die Meßversuche mit Lineal und Schnüre an den auch nicht gerade übermäßig exakten Kreismodellen gar keine völlig genauen Ergebnisse liefern können. Dies stützt die Vermutung, daß sich in allen Fällen der Umfang durch Multiplikation des Durchmessers mit einer ganz bestimmten Zahl zwischen 3,13 und 3,17 errechnet. Die Kreiszahl π = 3,14... wird den Schülern mitgeteilt.

Daraufhin wird das Ergebnis zur Bestimmung des Mehrweges eingesetzt. Die Schüler berechnen die Umfangsdifferenz der Bahnkreise 1 und 2. Sie fragen dazu nach der Breite der Bahn. Ein üblicher Wert ist 1,22 m. Damit ergibt sich für den Mehrweg: $3{,}14\cdot(73+1{,}22+1{,}22)\ \mathrm{m} - 3{,}14\cdot 73\ \mathrm{m} \approx 7{,}66\ \mathrm{m}$. Endgültiges Resultat: Der 400m-Läufer in Bahn 2 erhält einen 'Vorsprung' von 7,66 m. Dasselbe gilt für die Bahn 3 in bezug auf Bahn 2 usw. Einige Kinder wundern sich: Ist es denn ganz egal, wie groß die Bahn ist?

Diese Frage wird gleich so angegangen, daß außer der Länge der Bahn gleichzeitig auch ihre Form variiert. Jeder Schüler zeichnet auf Pappe nach Belieben ein (konvexes, d.h. von einspringenden Ecken freies) Polygon (mit möglichst nicht mehr als 8 Ecken). Natürlich ist dies keine brauchbare Wettkampfbahn; interessanter als beim Stadion ist dafür aber hier die Aufgabe, eine parallele Bahn (<u>Parallelfigur</u>) herzustellen. Eine zeichnerische Lösung wird an der Tafel diskutiert.

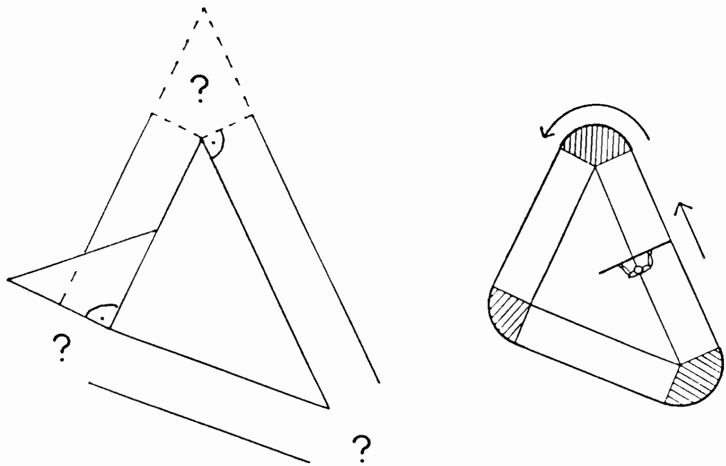


Abb.174 a b

Bei dem in Abb.174a gezeigten Dreieck wird zunächst mit Rechtem Winkel (Geodreieck) und Lineal zu jeder Strecke eine gleichlange Parallele im vorgeschriebenen Abstand gezeichnet. Aber wie muß man die Parallelen an den Ecken verbinden? Wenn man einfach verlängert, verändert sich auch der Abstand. Wir geben den Schülern eine Hilfe: Ein Seiltänzer geht über ein als Dreieck gespanntes Seil und hält dabei seine Balancierstange immer quer zur Bewegungsrichtung (Abb.174b). Beobachtet man von oben, wie er linksherum geht, so beschreibt das rechte Ende der Stange die gesuchte Parallelbahn. In jeder Ecke muß sich der Seiltänzer drehen, und das Stangenende macht einen Kreisbogen. Nachträglich wird dann klar: Nur auf einem Kreis bleibt man im gleichen Abstand von der Ecke.

Mit einer großen Linealleiste läßt sich der Bewegungsvorgang auch von den Kindern leicht nachvollziehen. Eine weitere und zentrale Einsicht stellt sich dabei ein: Bei einem Umlauf hat der Seiltänzer (bzw. Läufer) sich einmal um sich selbst gedreht. Die an den Ecken überstrichenen Winkel (in Abb.174b schraffiert) ergeben zusammen 360° . Obwohl dies nun nicht mehr bewiesen werden muß, lassen wir die Schüler die Parallelfigur zu ihrem auf Pappe gezeichneten Polygon herstellen und ausschneiden. Es ist trotz vorheriger Evidenz von Bedeutung, die an den Ecken herausgeschnittenen Sektoren sich zu einem Vollkreis zusammenschließen zu sehen (Abb.175).

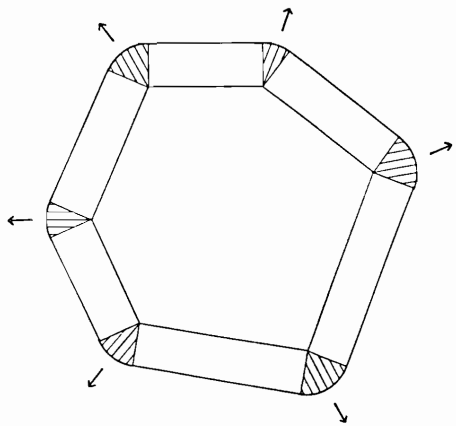


Abb.175

Als nächstes nehmen wir wieder die Frage nach dem Mehrweg in der parallelen Außenbahn auf. Auf den geraden Abschnitten entsteht kein Mehrweg, sondern nur durch die Kreisbögen um die Ecken herum. Das soeben vollzogene Zusammensetzen der Sektoren zeigt also: Die äußere Bahn ist gerade um den Umfang des Kreises mit dem Bahnabstand als Radius länger als die Innenbahn. Dabei spielt es keine Rolle, welche Form und welche Länge L die (konvexe) Bahn besitzt: Die Länge ihrer Parallelfigur im Abstand a ist stets $L+2\pi a$.

Die Schüler stellen nun zunächst fest, daß auch hier bei einer Bahnbreite von 1,22 m ein Mehrweg von 7,66 m entsteht. Es wird daher vermutet, daß die

'Mehrwegformel' (2 x Bahnbreite x 3,14) nicht nur für Polygone gilt. Kann man sich den Mehrwegkreis auch bei krummlinigen Bahnen zusammensetzen, z.B. bei den beiden Halbkreisen der Stadionbahn? Dazu müßte man den Kreis in Strecken zerlegen, was natürlich nicht geht. Nachdem wir ihnen ein reguläres 36-Eck gezeigt haben, schlagen einige Schüler vor, möglichst kleine Stückchen zu nehmen, damit es wenigstens ungefähr geht.

Wir stellen den Schülern die (aus der Unterhaltungsmathematik bekannte) Aufgabe über das Äquatorband in folgender Version: Ein Band um den Äquator der Erde ist ungefähr 40 000 km lang. Es soll so verlängert werden, daß es überall 1 m vom Äquator absteht. - Nach einigen wilden Spekulationen taucht die hier allein maßgebliche Vorstellung zweier paralleler Kreise auf. Die von der 'Mehrwegformel' gelieferte Verlängerung von 6,28 m erscheint den meisten allerdings zunächst nicht als glaubhaft. Ein paradoxer Rest bleibt auch nach dem einen oder anderen Versuch, den Sachverhalt besser durchschaubar, und das heißt, die Invarianz der Verlängerung gegenüber dem ursprünglichen Umfang sichtbar zu machen (etwa durch Experimente mit Seilen, die um verschiedene Kreisscheiben gelegt werden; oder durch eine 'dynamisierende' Deutung der Proportionalität von Kreisumfang und Kreisdurchmesser: Gleiches Durchmesserwachstum bewirkt bei allen Kreisen gleiches Umfangswachstum). Ein Schüler kritisiert die Aufgabe, er weist auf die Meere und Gebirge hin, die der Erdäquator durchzieht.

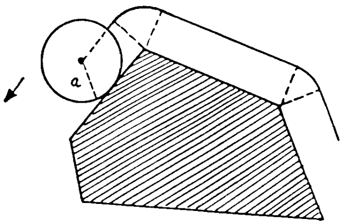


Abb.176

Bei konvexen (und auch einigen nicht-konvexen) Kurven kann man die Parallelfigur im Abstand a noch auf einfache Weise dadurch herstellen, daß man einen Kreis mit Radius a außen abrollt und die Spur seines Mittelpunktes zeichnet. Der Kreisumfang ist dann auch gerade der Mehrweg. Die Schüler praktizieren das Verfahren mit Figuren und Kreisscheiben aus Sperrholz, die in ihrem Mittelpunktsloch mit einem Filzstift geführt werden.

Schließlich nennen die Schüler noch weitere Beispiele paralleler Bewegungsspuren (Schlitten im Schnee, Spuren einer Egge, Schienen von Straßen- und Eisenbahn, Autospur). Wir thematisieren das Kurvenfahren, bei dem die außen laufenden Räder einen Mehrweg zurücklegen. Durch Probieren mit einem Zylindermodell finden die Schüler Problem und Lösung: Die Räder dürfen nicht fest verbunden sein. Eine andere, natürlich nur sehr begrenzt verwendbare Lösung wären zwei ungleich große Räder (Demonstration durch Abrollen eines Kegelstumpfes).

Dieses Prinzip benutzt man bei der Eisenbahn, deren Räder fest an der Achse sitzen und daher die gleichen Umdrehungen machen: Die Radreifen haben die Form eines sehr flachen und geringfügig geneigten Kegelstumpfes, der sich nach außen hin verjüngt. Durchfährt ein Zug nun z.B. eine Rechtskurve, so werden die Räder der linken Seite durch die Zentrifugalkraft auf einen etwas größeren Querschnitt 'hinausgeschoben' und können auf diese Weise bei einer Umdrehung einen größeren Weg zurücklegen als die Innenräder. Abb.177 macht die Formverhältnisse stark übertrieben sichtbar.

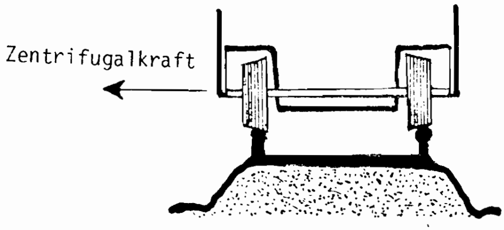


Abb.177

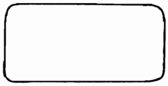
In einem (aus organisatorischen Gründen) knapp gehaltenen Test wurden einige Aufgaben gestellt (s. Abb.178).

Wie wir einleitend schon hervorgehoben haben, hat das behandelte Thema mehr traditionellen Zuschnitt und zeigen sich seine operativen Aspekte hauptsächlich in Zweckdiskussionen sowie gelegentlichem Herstellen von Bahnmodellen aus Pappe. Systematisch betrachtet gehört es üblicherweise in die Theorie der konvexen Körper. Dort definiert man den Parallelkörper einer gegebenen konvexen Menge F im Abstand $a > 0$ als Vereinigungsmenge aller Kugeln vom Radius a, deren Mittelpunkte in F liegen. Für die Zwecke unserer Unterrichtseinheit ist diese Fassung des Begriffs zu abstrakt. Da wir uns auf ebene Figuren beschränken, eignet sich viel besser eine Einführung über die zeichnerische Konstruktion sowie die kinematische Herstellung (Spur einer Balancierstange in Normalenrichtung, Abrollen des 'Mehrwegkreises'). Entsprechende Definitionen gibt auch J. Steiner in seinem klassischen Bericht "Über parallele Flächen" von 1840 (vgl. Band 2 seiner Gesammelten Werke, Berlin 1882). Dort findet sich auch der nach ihm benannte Satz über den Umfang der Parallelfigur einer konvexen Figur (unsere 'Mehrwegformel'), als dessen Urheber Steiner allerdings A.L. Crelle bezeichnet, den Begründer des Journals für die reine und angewandte Mathematik.

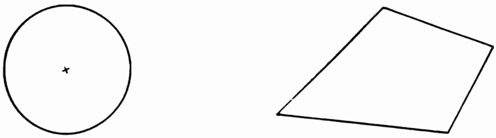
Das behandelte Problemfeld hat eine reiche begriffliche Struktur. Diese enthält einerseits spezifisch geometrische Begriffe wie 'Kurve', 'Abstand', 'Winkel', 'Polygon', 'parallel', 'konvex' oder 'Orientierung', wird andererseits aber auch durch einige allgemeine mathematische Ideen geprägt, die je nach dem Grad der Vertiefung des Themas im Unterricht wirksam werden. An erster Stelle nennen wir hier die Invarianz; sie wird nach unserer Erfahrung von den Schülern beim Zusammensetzen des 'Mehrwegkreises' einigermaßen nachhaltig erlebt. Daneben erwähnen wir aber auch die Approximation (einer Kurve durch einen Streckenzug) und die funktionale Abhängigkeit (eingesetzt bei der Analyse der Äquatorband-Aufgabe).

A) BESCHREIBE KURZ, AUS WELCHEN STÜCKEN SICH EINE STADIONBAHN ZUSAMMENSETZT. BEGRÜNDE, WARUM DAS SO ZWECKMÄSSIG IST.

B) WARUM IST DIE GEBRÄUCHLICHE FORM DES STADIONS BESSER ALS EIN GROSSER KREIS? WARUM IST SIE BESSER ALS DIESE FORM:



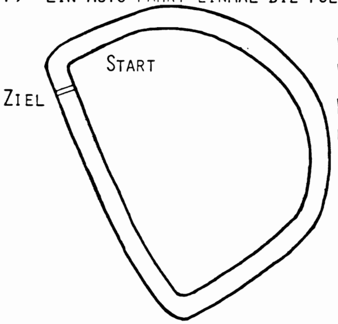
C) ZEICHNE DIE PARALLELBAHNEN IM ABSTAND 1 CM:



D) WELCHE LÄNGE HABEN DIE UNTER C) ABGEBILDETEN BAHNEN?

E) WIE LANG SIND DIE VON DIR GEZEICHNETEN PARALLELBAHNEN?

F) EIN AUTO FÄHRT EINMAL DIE FOLGENDE RUNDE



WELCHE RÄDER HABEN DEN GRÖSSEREN WEG ZURÜCKGELEGT?

WIE GROSS IST IHR MEHRWEG BEI EINEM RADABSTAND VON 140 CM?

Abb.178 *Test für die Unterrichtseinheit 'Parallelfiguren'*

Was die Lernziele anbetrifft, so wollen wir uns hier mit einer kritischen Anmerkung zu den Stoffvorschlägen der gängigen SI-Richtlinien begnügen. Darin begegnen wir einer Reihe zum Teil recht anspruchsvoller Intentionen - angefangen von der Relevanz für persönliche Bildung und spätere Berufstätigkeit bis hin zum Erwerb von Einsicht in das kulturelle und wissenschaftliche Beziehungsfeld der Mathematik. Damit kontrastiert das für den Geometrie-Unterricht vorgesehene Programm, das ein Herbeiführen von Relevanz und Einsicht durch ein gewöhnlich viel zu formales Verständnis von Geometrie erschwert: Figuren sollen als Punktmengen, geometrische Größen als Äquivalenzklassen definiert werden, abbildungsgeometrische Beweise und gar Strukturvergleiche erscheinen im Katalog der Forderungen. Ein Teil davon findet sich allerdings unter dem Titel 'Propädeutik', ohne deswegen weniger auf 'das System' ausgerichtet zu sein.

Beim Kreis geschieht es, auch in vielen Schulbüchern, daß die Beziehung zwischen Umfang (oder Fläche) und Durchmesser erst in Klasse 9 oder 10 behandelt wird, und dann aber möglichst streng nach Eudoxischer Exhaustion. Die Schüler sollten jedoch viel früher die Gelegenheit erhalten, auf diesem Gebiet entsprechende Vorerfahrungen zu machen. Für unsere Unterrichtseinheit sind zudem folgende Voraussetzungen wünschenswert: einfachste geometrische Grunderfahrungen und Grundtätigkeiten (z.B. mit Lineal, Geodreieck, Zirkel, Papier und Schere), die Begriffe 'Strecke', 'Länge', 'Polygon' (Vieleck) und 'Winkel'.

Es gibt viele Fortsetzungsmöglichkeiten. Am naheliegendsten erscheint uns der Begriff des orientierten Winkels samt entsprechender Winkelsummensätze an Polygonen. Man benötigt dazu nur zwei fundamentale Beziehungen: innerer und äußerer Winkel (sog. Polarwinkel) ergänzen sich zu 180° ; die Summe der Polarwinkel beträgt 360° .

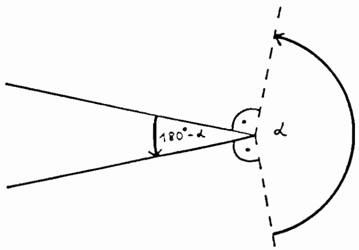


Abb.179

Von hier aus ergibt sich zwanglos ein Zugang zu Parkettierungsfragen (vgl. etwa die diesbezüglichen Anregungen in Wittenberg (1963), S.110ff). Weitere an unser Thema anknüpfende Gebiete sind: konvexe Figuren, Flächenberechnungen, Rollkurven und kinematische Betrachtungen (über die angrenzenden Themen wird zum Teil ausführlicher berichtet in Schreiber (1982)).

Teil II

Didaktische Grundlagenfragen und logisches Verständnis

»Rerum naturas cognoscere difficile quidem est,
at modum cognoscendi longe difficilius.«

TOMMASIO CAMPANELLA: Metaphysik, Teil I

»Coarctata scientia iucunda non est.«

HUGO VON ST. VIKTOR: Didascalicon

VORBEMERKUNGEN

Wir behandeln die genetischen Grundlagen und den Unterricht von Geometrie in einem einheitlichen Rahmen. Diesen Rahmen bildet unsere operative Interpretation geometrischer Begriffe, deren Prinzip lautet: Geometrische Begriffe werden im Kontext zweckgerichteter praktischer Handlungen herausgebildet. - Naturgemäß gehört hierzu ein weitgefaßter Begriff von Didaktik, der neben pädagogischen und anthropologischen auch erkenntniskritische, metatheoretische, technologische und praktische Fragenkreise angemessen berücksichtigt. Teil II bietet dem Leser diesbezüglich Studien und Materialien; sieht man von ihrer pädagogischen Anwendung ab, so sind sie auch ohne vorherige Lektüre von Teil I verständlich.

In Kapitel 5 setzen wir zunächst auseinander, was wir unter genetischen Grundlagen der Geometrie verstehen und inwiefern wir sie für eine Grundlage des Geometrie-Unterrichts halten. Dazu wird der Begriff der Genese allgemein erörtert, im Zusammenhang mit Piagets entwicklungspsychologischer Theorie differenziert, und schließlich durch didaktische Prinzipien präzisiert. Auf Piaget gehen wir dabei nur exkursorisch ein, heben aber unseren Begriff 'operativ' genauer ab von dem gleichlautenden Begriff der Entwicklungspsychologie. (Insbesondere ist das in Teil I benutzte Prinzip der operativen Begriffsbildung keineswegs identisch mit dem sog. operativen Prinzip.) Was die Geometrie anbetrifft, so schildern wir einige Schwierigkeiten und Aspekte der Aufgabe, sich ein adäquates Bild von ihr zu machen. Verbunden damit wird die operative Auffassung (nach Dingler) vorbereitet. - In Kapitel 6 legen wir dar, welche Rolle und welchen Stellenwert Operativität für die Wissenschaft im allgemeinen sowie für die Methodik der Begriffsaneignung besitzt.

Die folgenden Kapitel 7, 8, 9 behandeln sodann der Reihe nach die Schlüsselbegriffe des operativen Geometrieverständnisses: Homogenität, Ideation, Exhaustion (einschließlich der praktischen Herstellverfahren für homogene Flächen und des starren Körpers). Diese Dinge beanspruchen eine eigene ausführliche Analyse und Erläuterung durch auf sie zugeschnittene Beispiele (wofür, beim augenblicklichen Forschungsstand, der Titel 'Theorie' vielleicht etwas zu hoch gegriffen wäre). Zweifellos wird die Lektüre dieser Teile dadurch gewinnen, daß man dabei gelegentlich in Kapitel 1 und vor allem im Beispielmaterial für praktische Anwendungen (Kapitel 2) 'herumblättert'. Ebenso benötigen umgekehrt dort die Praxisbeispiele den 'theoretischen' Kontext, und zwar erst recht dann, wenn sie verständnisvoll in den Geometrie-Unterricht eingebracht werden sollen (nämlich mittels des Prinzips der operativen Begriffsbildung).

Die gegenwärtige Diskussion des operativen Standpunktes in der Geometriebegründung wird vorwiegend von Wissenschaftstheoretikern bestritten und befindet sich noch einigermaßen im Fluß. Kapitel 10 bietet dem Leser eine knappe Einführung in diese Diskussion, und zwar in Form einer (teilweise kritisch) referierenden Zwischenbilanz zu denjenigen Teilproblemen der Methodologie und Systematik, die uns als zentral sowie von der Anlage dieses Buches her als zugänglich erscheinen. An einigen Stellen haben wir auch eigene Beiträge eingefügt. Sofern in all dem didaktisch Auswertbares liegt, wäre dies aber weitgehend überhaupt erst noch zu erschließen. Man betrachte daher das Kapitel auch als einen Versuch, das bisher von uns entworfene operative Konzept zu ergänzen und in den allgemeineren Diskussionszusammenhang einzuordnen. Eine Hilfe dabei soll auch das chronologische und annotierte Verzeichnis einschlägiger Literatur sein, das sich im Anhang befindet.

5. GENESE DER GEOMETRIE ALS DIDAKTISCHES PROBLEM

Geometrie ist eines der ältesten Wissensgebiete und - seit rund zweitausend Jahren - anderen Wissenschaften ein Vorbild in der Strenge ihrer Beweise. Aber nicht nur jenen gefiel sie, die Freude an scholastischem Argumentieren hatten; weit mehr noch suchte man ihre Bedeutung im intuitiven Wesen ihrer Erkenntnisse - es gibt ja greifbare und sichtbare Figuren und damit eine Grundlage für Evidenz, für anschauliche Einsicht wie kaum sonstwo.

Die Frage nach den Anfängen jener geometrischen Erkenntnis ist alt und zeigt viele Facetten: historische, erkenntnistheoretische, didaktische. Sie lassen sich nicht immer scharf voneinander trennen, und Pädagogen der Mathematik wissen, daß eine solche Trennung auch nicht immer wünschenswert ist. Demgemäß wollen wir dem Leser im folgenden zunächst einige wissenschaftstheoretische und historische Aspekte der Frage vorstellen. Nach Erkenntnisanfängen zu fragen, bedeutet aber nicht allein, auf geschichtliche Entstehungszusammenhänge zurückzugreifen. Wir werden auch auf einen allgemeineren Begriff des Genetischen gestoßen. Hier haben wir uns unter anderem mit Piagets Entwicklungspsychologie auseinanderzusetzen und weiterhin in Gestalt didaktischer Prinzipien das pädagogische Blickfeld zu umreißen, in dem sich unsere Untersuchungen zu Grundlagen und Unterricht der Geometrie bewegen. Schließlich werden wir unter den Aspekten der Geometriegenese dem operativen Aspekt seinen Standort zuweisen.

5.1. Die Frage nach den 'Anfängen' der Geometrie

> Zwei Jahrtausende und mehr haben an dieser zähen Speise gekaut ...
>
> M. Cantor: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Band I

In seinem berühmt gewordenen Vortrag "Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome", den Hermann von Helmholtz 1870 im Heidelberger Dozentenverein gehalten hat, sagt er gleich zu Beginn über die Geometrie:

"Unter allen Zweigen menschlicher Wissenschaft giebt es keine zweite, die gleich ihr fertig, wie eine erzgerüstete Minerva aus dem Haupte des Zeus, hervorgesprungen erscheint, keine vor deren vernichtender Aegis Widerspruch und Zweifel so wenig ihre Augen aufzuschlagen wagten."

Der Vergleich ist gewiß verblüffend, doch hinkt er - ungeachtet seines altmodischen Charmes. Minerva entspringt der Sage nach dem Haupte des Zeus als fertiges, erwachsenes Wesen. Aber aus wessen Kopf tritt uns die Geometrie als fertiges System entgegen? Wie Helmholtz selbst wußte und im übrigen jedem Mathematiker klar sein dürfte, hat es hier bloß den Anschein, als sei etwas derartiges möglich. Man ist versucht, an Euklid zu denken, der um 300 vor unserer Zeitrechnung die Grundlagen der damaligen Geometrie gesammelt, geordnet und an den Anfang seiner "Elemente" gesetzt hat. Unvermittelt stehen da die zahlreichen Begriffsbestimmungen sowie die ungeklärt gebliebenen Grundsätze (Axiome, Postulate), aus denen nach und nach eine stattliche Folge geometrischer Sätze durch logisches Schließen hergeleitet wird. Der staunende Leser fühlt sich dabei vielleicht noch an Vorgänge erinnert, wie sie sich bei der Geburt Minervas abgespielt haben mögen.

Doch so wenig Euklid ein Zeus ist, so wenig gleichen sich sein Weg zu den axiomatischen Bausteinen und die Methode, sie dem Leser seines Lehrbuches in logischer Zementierung darzubieten. Beim systematischen Aufbau stehen die Axiome am Anfang, en bloque; darin gleicht alle spätere Axiomatik dem Vorbild Euklids. Gewonnen werden sie dagegen durch ein geistiges Schürfverfahren, eine Analyse, die David Hilbert "Tieferlegung der Fundamente" nannte und bei der eine hervorragende Rolle spielt, was nach H. Freudenthal treffend "lokales Ordnen" heißt. Das lokale Ordnen gehört zum Rüstzeug jedes Mathematikers. Ungefähr beschrieben besteht es darin, die Erkenntnisse über ein mehr oder weniger beschränktes Sachgebiet anhand gewisser Schlüsselbegriffe durchzuarbeiten und sie schrittweise so zu organisieren, daß ihre Abhängigkeit von bestimmten besonders tragfähigen Sätzen sichtbar wird; diese Sätze übernehmen dann vorübergehend die Rolle von Axiomen. Bei fortgesetzter Analyse können natürlich neue Sätze hinzukommen sowie alte Sätze durch neue ersetzt werden. Auf diese Weise läßt sich nach und nach eine globale Ordnung herstellen. Es ist kaum vorstellbar, daß Euklid oder ein anderer Axiomatiker seine globale Ordnung durch ein hiervon prinzipiell abweichendes Verfahren erzielt haben sollte. Zumindest bleibt rein äußerlich festzuhalten: Das beim systematischen Aufbau am Anfang Stehende ist in Wahrheit das Endprodukt einer gründlichen Sachanalyse.

Nun betrifft das soeben Gesagte eher die formelle, technische Seite der geometrischen Wissenschaft. So vortrefflich das fortgesetzte lokale Ordnen ist, durchführbar ist es nur da, wo es auch etwas gibt, das sich zergliedern und ordnen läßt. Wir haben uns also zu fragen, auf welche Weise wir zu unseren ersten Einsichten in geometrische Sachverhalte gelangen, eben jenen Einsichten, die wir dann analysieren und in ein mehr oder weniger provisorisches System bringen. Kurzum, es stellt sich die Frage nach den Anfängen der geometrischen Erkenntnis.

Die Frage hat nicht allein ein ehrwürdiges Alter, sondern auch einen legendären Anhang von meist nicht zufriedenstellenden, zumindest aber umstrittenen

Beantwortungsversuchen. Die gegenwärtige Wissenschaftsphilosophie neigt dazu, angesichts der Schwierigkeiten dieses Problems mutlos die Flügel hängen zu lassen. Das wird besonders deutlich an den Ansichten, die unter dem Einfluß K. Poppers vor allem im Bereich der sog. Analytischen Philosophie entwickelt wurden. Nach Popper haben wir bei der Rede von 'Anfängen' zwei Dinge säuberlich auseinanderzuhalten: den Kontext der Entstehung von dem der Rechtfertigung. Im Entstehungszusammenhang wird die Frage gestellt: Wie kommen Begriffe, Erkenntnisse, Theorien, Sätze zustande; welches ist der zu ihnen führende Weg der Findung? Innerhalb des Rechtfertigungszusammenhangs ist zu fragen: Wie oder mit welchen Gründen läßt sich die Annahme der (wie auch immer gefundenen) Grundsätze, Theorien etc. rechtfertigen? - Was nun die Geometrie anbelangt, so scheint das Problem ihrer 'Anfänge' gelöst werden zu sollen, indem man das Rechtfertigungsproblem auf 'pragmatische' Art erledigt (wie wir wenig später sehen werden) und das Entstehungsproblem in seiner Bedeutung zurückstellt, der Wissenschaftsgeschichte zuschiebt oder, günstigstenfalls, seine technisch-heuristischen Seiten (lokales Ordnen und dgl.) herausstellt. Wir glauben jedoch, daß diese Art von Lösungsversuchen unangemessen ist und daß der Grund dafür in der strikten Trennung von Entstehungs- und Rechtfertigungszusammenhang liegt.

P. Feyerabend, ein Schüler und Kritiker Poppers, hat die genannte Trennung mit dem vergeblichen Versuch verglichen, einen Fluß durch eine Staatsgrenze in Stücke zu teilen. Dabei erscheint die Unterscheidung eines Entstehungs- von einem Begründungskontext auf den ersten Blick keineswegs als unplausibel oder unsinnig. So ist es etwa für die Begründung eines mathematischen Satzes völlig unerheblich, ob ihn ein Affe durch Herumprobieren auf einer Schreibmaschine rein zufällig aufgeschrieben hat oder ob er einem Mathematiker nach langer, planvoller Forschung intuitiv aufgegangen ist. Für die Annahme des Satzes ist allein entscheidend, ob er sich beweisen läßt oder nicht. Ähnlich scheint es mit physikalischen Theorien oder geometrischen Axiomen bestellt zu sein.

Bleiben wir bei den geometrischen Axiomen. Aus welcher Quelle sie fließen, ob sie dem Zufall, der Inspiration, der Gabe zu empirischer Beobachtung oder einem anderen Vermögen entstammen, scheint auch hier ohne Belang für die Frage zu sein, auf welcher Grundlage sich ihre Annahme rechtfertigen läßt (wenn schon an Beweise nicht zu denken ist). Wir werden aber sehen, daß gerade die Untersuchung der Rechtfertigungsfrage auf ganz natürlichem Wege zu einer Reihe von Problemen führt, die genau genommen dem isoliert geglaubten Entstehungszusammenhang entstammen. Zur Rechtfertigungsfrage wurden im großen und ganzen drei Auffassungen entwickelt:

1. Die altgriechischen Geometer wollten ihre geometrischen Grundaussagen durch Konstruktionen mit Zirkel und Lineal 'verwirklicht' sehen. Der bloßen An-

schauung - und die war für sie Teilfunktion des sinnlichen Wahrnehmens - mißtrauten sie. Schließlich hatte bereits Zenon mittels scharfsinniger Paradoxien Zweifel an der Realität der räumlichen Bewegung geweckt, oder doch wenigstens an den Fähigkeiten zur Vorstellung räumlicher Verhältnisse. Wir erinnern hier bloß an die berühmte Paradoxie, nach der der schnelle Achilles eine Schildkröte nicht einholen können soll - er muß ja zunächst den Ausgangspunkt der Schildkröte erreichen, dann den Punkt, an dem sich die Schildkröte befindet, wenn er ihren Ausgangspunkt erreicht usw. ad infinitum. - Schwierigkeiten gab es auch mit dem Parallelenpostulat: 'In einer Ebene verläuft durch einen Punkt außerhalb einer Geraden genau eine Gerade, die die gegebene Gerade nicht schneidet.'- Diese Aussage war umstritten, vermutlich nicht zuletzt deswegen, weil man sie nicht mittels einer Konstruktion außer Zweifel setzen konnte. Diese kritische, bisweilen sogar anschauungsfeindliche Haltung ist sicher einer der Gründe für das Entstehen der beweisenden Argumentationsmethode, wie sie seitdem nicht mehr aus der Mathematik fortzudenken ist.

2. Später, in den Anfängen der klassischen Mathematik (Descartes, Pascal), galt als gerechtfertigte Grundlage gerade das anschaulich Gewisse. Diesen Glauben an die Evidenz hat noch Immanuel Kant vertreten; er entwickelte ihn allerdings als eine Erweiterung und Präzisierung des von den griechischen Geometern eingenommenen Standpunktes: Geometrische Begriffe werden ihm zufolge in reiner (nicht-sinnlicher) Anschauung konstruiert; geometrische Sätze sollen dadurch anschauliche Geltung erhalten. - Allerdings: Die Theorie der reinen Anschauung, ebenso wie verschiedene andere Evidenzstandpunkte, sind mit erheblichen Schwächen belastet, die bis auf den heutigen Tag noch nicht behoben werden konnten.

3. Der heute praktisch anerkannte Standpunkt wurde vor allem von Hilbert empfohlen; vielen Mathematikern gilt er als Befreiung von der quälenden Last betagter philosophischer Probleme. Hilbert selbst soll gelegentlich geäußert haben, sein formalistisches Programm diene der endgültigen Beseitigung aller Grundlagenfragen in der Mathematik. Dies denkt er sich, stark vereinfacht, folgendermaßen: In den üblichen Aussagen der Mathematik ersetze man alle Begriffsnamen durch bedeutungsfreie Symbole. Aus Aussagen werden so Aussagenformen, aus Axiomen und Theoremen entsprechend Axiomen- und Theoremenformen. Ein System von Axiomenformen kann als Grundlage dienen, wenn es widerspruchsfrei (und möglichst auch noch vollständig) ist. Ein System heißt (formal) widerspruchsfrei, wenn keine Aussagenform sowohl beweisbar als auch widerlegbar ist; es heißt vollständig, wenn jede nicht beweisbare Aussagenform widerlegt werden kann. - Für viele in der Tradition des Hilbertschen Programms stehende Mathematiker ist die formale Widerspruchsfreiheit sogar das Hauptkriterium für die Annahme eines Systems, das heißt: es ist die einzige Frage, die den Mathematiker im Rechtfertigungszusammenhang überhaupt noch interes-

sieren soll. Darüber hinaus gehende Kriterien, wie Anwendbarkeit, Einfachheit, konstruktive Gültigkeit (in welchem Sinne auch immer) und dgl. mehr, werden den Physikern oder anderen Anwendern überlassen oder in den Bereich weltanschaulicher Meinungen abgeschoben. Bestenfalls spricht man in einem ganz allgemeinen Sinn davon, daß sich ein System wissenschaftlich bewährt habe und nennt dies dann 'pragmatische' Lösung des Rechtfertigungsproblems.

Wir wollen es hier dahingestellt sein lassen, inwieweit die formale Widerspruchsfreiheit ein sinnvolles Annahmekriterium darstellt. Ebenfalls enthalten wollen wir uns eines Urteils über den eilfertigen Eifer, mit dem gelegentlich Leute vom Fach Kompetenzbereiche hermetisch abzuschirmen suchen und bereit sind, wesentliche ihr eigenes Gebiet betreffende Fragen zu ignorieren und weltanschaulicher Verwahrlosung zu überlassen. Wer indessen ein Bild von der Mathematik in der Öffentlichkeit zu vertreten hat, direkt oder indirekt, kann sich kaum an solche oberflächliche Grenzziehungen gebunden fühlen. Für einen Lehrer der Mathematik, einen Wissenschaftsphilosophen und erst recht für einen Didaktiker des Fachs sind die einschlägigen Probleme auch dann noch von Bedeutung, wenn sie hinter den Horizont des Formalisten getaucht sind.

Zunächst ist da die immer wiederholte Ansicht, das System der geometrischen Axiomenformen liefere eine 'implizite' Definition der geometrischen Grundbegriffe 'Punkt', 'Gerade', 'inzident' usw. Wäre dem so, dann könnte man mit demselben Recht behaupten, die Vektorraumaxiome definierten implizit den Begriff 'Vektor' oder die Axiome für eine Gruppe definierten implizit den Begriff 'Gruppenelement'. Sicherlich kann man niemandem eine solche Sprechweise verbieten, Sprechweisen sind ja weitgehend eine Sache der Konvention. Dennoch ist hier eine gewisse Vorsicht geboten. Wenn gesagt wird, die Axiome der Geometrie lieferten eine implizite Definition von 'Punkt', 'Gerade' usw., so ist an dieser Sprechweise weniger das Beiwort 'implizit' zu beanstanden als die stillschweigende Anahme, daß hier überhaupt eine Definition von 'Punkt' und den übrigen Grundbegriffen vorliege.

In der Algebra lernt man durch eine Definition, wann eine Struktur eine Gruppe ist; die Eigenschaft eines Objektes, Element einer Gruppe zu sein, hat in diesem Zusammenhang überhaupt nichts zu suchen. Wir unterscheiden am Ende Gruppen von Nicht-Gruppen, nicht jedoch Gruppenelemente von Nicht-Gruppenelementen. Ganz entsprechend verhält es sich mit den Axiomen der Geometrie. Zusammengenommen liefern sie eine explizite Definition, mittels der wir euklidische Strukturen (Geometrien) von andersartigen Geometrien unterscheiden. Demgegenüber ist es aber sinnlos, euklidische von nicht-euklidischen Punkten unterscheiden zu wollen. Der Begriff 'Punkt' wird durch die geometrischen Axiome ja gar nicht (auch nicht 'implizit') bestimmt; gerade Hilbert hat die Ansicht zurückgewiesen, man müsse ein Ding daraufhin prüfen können, ob es Punkt, Gerade oder

Ebene sei. Wir erinnern dazu nur an seinen vielzitierten drastischen Ausspruch: "Man muß jederzeit an Stelle von 'Punkte, Geraden, Ebenen', 'Tische, Stühle, Bierseidel' sagen können". Was die Axiome leisten, ist demnach keine Definition etwa des Begriffs 'Punkt', sondern eine Definition des Begriffs 'euklidischer Punktbegriff'. Selbstverständlich können nun Prädikate wie 'x ist Punkt' oder 'x ist Tisch' unter diesen (explizit definierten) Begriff fallen, d.h. euklidische Punktbegriffe sein. Das hängt allein ab von den für diese Prädikate gültigen oder vereinbarten Gebrauchsregeln.

Sicherlich, bei dieser Sachlage hat es nun wenig Sinn zu fragen, ob das eine oder andere Axiom gültig oder evident sei. Das Axiom ist ja Bestandteil einer Definition, die Frage müßte also schon die Definition als ganze betreffen. Man fragt daher lieber: Ist das geometrische System anwendbar? Für den Formalisten ist die Anwendbarkeit eines Systems ein bloßes Faktum, das wir als Erfahrungsgegebenheit hinzunehmen haben.

Aber wieso ist die Geometrie Euklids anwendbar? Liegt hier ein glücklicher Zufall vor, oder das Ergebnis zielgerichteter Arbeit, und wenn ja, welcher? In der kurzen Einleitung zu seinen "Grundlagen der Geometrie" erwähnt Hilbert die "logische Analyse unserer räumlichen Anschauung". Es bleibt aber unentschieden, ob er dabei an die reine Anschauung Kants, eine Art empirischer Anschauung oder an etwas ganz anderes gedacht hat. Zumindest jedoch werden wir an die Aufgabe erinnert, die Beziehung der Geometrie zur räumlichen Wirklichkeit verstehen zu lernen. Im Zentrum dieser Beziehung steht nun aber die Herausbildung der geometrischen Begriffe, und hier gibt es keine sinnvoll zu ziehende Trennlinie zwischen Entstehung und Rechtfertigung (wie, zumindest teilweise, bei geometrischen Einzelerkenntnissen). Anders stünde die Sache, wenn geometrische Begriffe und die mit ihnen aufgebauten Theorien wirklich vom Himmel fielen oder als Exspiration göttlicher Häupter ihren Anfang nähmen. Aber daran glaubt vermutlich kein Formalist.

Kenner der einschlägigen Literatur wissen natürlich, daß es sich bei der in der Überschrift dieses Kapitels gestellten Frage nicht gerade um ein neues Problem handelt. Sie wissen aber wohl auch von den zahlreichen gescheiterten Versuchen, dieses Problem zu lösen, sowie von denjenigen Versuchen, von denen bis heute noch nicht geklärt ist, ob es sich um Fehlschläge handelt oder ob sie eines Tages zu erfolgreichen Antworten führen werden. Umso mehr möchten wir die Frage nach den 'Anfängen' der geometrischen Erkenntnis wiederholt und mit aller Eindringlichkeit stellen. Es handelt sich hierbei nicht um ein abseitiges philosophisches Thema oder eine Kopfnuß für Spezialisten, sondern um ein Problem von allgemeinem Interesse. Dies glauben wie insoweit behaupten zu können, als die Frage dem Bereich der Aufgabe angehört, den Sinn des vom Menschen selbst Hervorgebrachten zu erhellen, zu deuten und, wo nötig, der Vergessenheit zu entreißen. Die Wissenschaft der Geometrie ist ja kein Naturprodukt, sie ist vielmehr ein Produkt intellektueller Tätigkeit und handwerklich-technischer Praxis. Bei ihrer Entstehung hat nicht allein eine Rolle gespielt, was logisch oder materiell möglich war, sondern vor allem auch dasjenige, was an praktischen Zielen verwirklicht werden sollte.

5.2. Der Begriff der Genese

Nicht ohne Grund haben wir im vorigen Abschnitt meist nur apostrophiert von 'Anfängen' gesprochen, denn es kommt uns dabei ja nicht so sehr auf den zeitlichen als vielmehr auf den sachlichen Aspekt an. Geschichtlich könnte man die Geometrie mit den Meßkünsten der alten Babylonier und Ägypter beginnen lassen; dagegen konstituiert sich der Inhalt ihrer Begriffe unabhängig von irgendeinem Zeitpunkt in ihrer Beziehung zur räumlichen Wirklichkeit. Wir verwenden daher lieber den allgemeineren Begriff 'Genese' anstelle von 'Anfang', zumal er mehr ein sukzessives Werden als ein punktuelles Beginnen ausdrückt.

Allerdings ist auch die allgemeine Kategorie des Genetischen mehrdeutig. Wie wir bereits in Kapitel 1 gesehen haben, bedeutet Genese einmal soviel wie Lehrgang (und damit etwas an einen Entwurf, an eine Konstruktion Gebundenes), das andere Mal hingegen Entwicklung (und damit etwas sich in der Zeit tatsächlich Vollziehendes). Nehmen wir einmal als Beispiel die Genese der Tischsitten. Das Schema, nach dem jemand etwa in den Bräuchen bei Tisch unterwiesen wird, steht hier für die konstruktible Genese. Dagegen findet die faktische Genese nur ein einziges Mal statt; eine bestimmte Sorte von Tischsitten ist in einem einmaligen, mehr oder weniger genau erfassbaren Prozeß entstanden.

Beide Arten von Genesen erlauben eine weitere Unterteilung. Eine Entwicklung kann sich in der kollektiven Geschichte vollziehen, oder aber an einem einzelnen Menschen: sie kann historisch sein oder individuell. Die historische Genese der Tischsitten ist Gegenstand der Kulturgeschichtsschreibung, ihre individuelle Genese ist nichts weiteres als ein Teil einer persönlichen Lebensgeschichte.

Für eine Einteilung konstruktibler Genesen könnte man leicht auf eingebürgerte Typisierungen von Lehrgangsformen zurückgreifen (wie z.B. systemorientiert, problemorientiert, schülerorientiert usw.). Wir beschränken uns hier auf die Unterscheidung zweier (keineswegs reiner und übergangslos getrennter) Typen.

Zur Illustration diene wieder das Beispiel der Tischsitten. Man stelle sich etwa einen Kodex vor, in dem die Tischsitten eines bestimmten Kulturkreises zum Zwecke weiterer Tradition aufgezeichnet sind. Der Komplex der einschlägigen Verhaltensformen könnte nun z.B. so aufgebaut sein, daß gewisse Hauptregeln als

Grundbausteine des Systems nach und nach mit komplizierteren (vielleicht weniger wichtigen) Vorschriften in Verbindung gebracht werden. Eine andere Organisationsform bestünde etwa darin, die Regeln nach bestimmten Sachgebieten einzuteilen, z.B. Handhabung des Bestecks, Zusammenstellung von Mahlzeiten, zulässige Themen bei Tischgesprächen, Fragen der Sitzordnung, Danksagung und dgl. mehr. In solchen Fällen wollen wir von einer systematisierenden (oder systemorientierten) Genese sprechen. Ihr Gegenstück wäre eine interpretierende (oder 'sinnorientierte') Genese. Sie würde beispielsweise durch einen erfahrenen Lehrmeister geleistet, der seinen Schützlingen bei passender Gelegenheit während der Mahlzeiten die eine oder andere Vorschrift nahebringt. Zudem müßte er in der Lage sein, den Sinn einzelner Regeln verständlich zu machen, indem er sie interpretiert, d.h. praktische Gründe für ihren Gebrauch erläutert, oder indem er sie auf einen weiteren Kontext einschlägiger kultureller Grundvorstellungen bezieht. Natürlich wird er, wenn er auch im Lehren und Lernen erfahren ist, nicht alles dem Zufall überlassen, sondern in vertretbarem Ausmaß auch 'das System hineinspielen lassen'. Er läßt die Schüler dieses System wohl finden und sinnbezogen sich aneignen; nichtsdestoweniger kann er seine Kenntnis des Systems zu einer ökonomischen, aber behutsamen Lenkung des Aneignungsvorgangs verwenden. An diesem Beispiel erkennen wir zugleich, daß es zwischen den verschiedenen Formen von Genese Wechselwirkung geben kann. Das ist geradezu selbstverständlich (vgl. Abb.180).

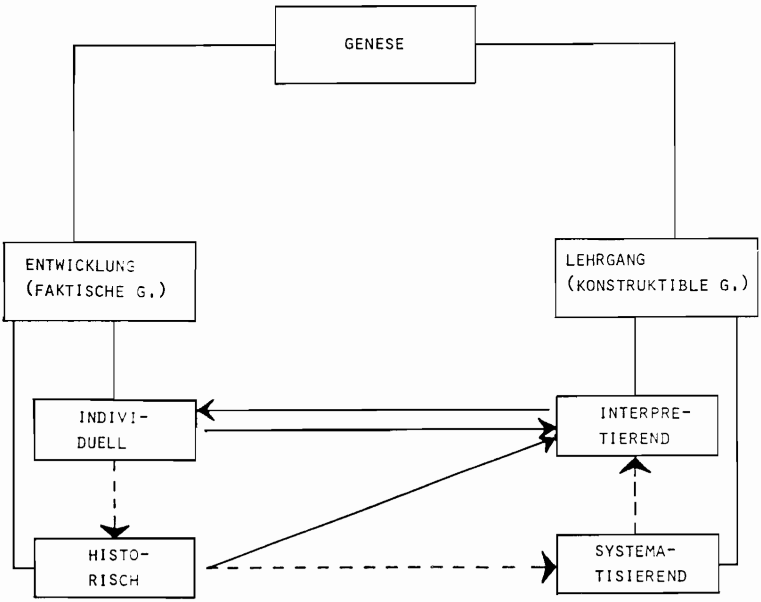


Abb.180

Die individuelle Entwicklung wird geprägt durch den sozialen Umkreis und das jeweilige Milieu der Unterweisung; mittelbar wird so natürlich auch die historische Genese beeinflußt. Umgekehrt braucht man zur Unterweisung Lehrgänge, und in diesen verbinden sich die Bezüge auf eine Tradition, auf den zu unterweisenden (allgemeiner: zu erziehenden) Menschen und nicht zuletzt auf die Inhalte der Unterweisung. Mit der Analyse und Synthese dieser Bezüge befaßt sich die Pädagogik oder - inhaltsspezifisch - die (Fach-)Didaktik. Der Allgemeinheit stellt sie ihre Ergebnisse in Gestalt didaktischer Prinzipien zur Verfügung, die insbesondere Lehrern als Regeln in der Unterrichtspraxis dienen können.

Abschließend wollen wir unseren Genese-Begriff auf ein Beispiel aus der Mathematik anwenden. Wir wählen dazu die Algebra (die Geometrie wird später ausführlicher erörtert werden).

Es ist einigermaßen klar, was man sich unter ihrer historischen Genese vorzustellen hat: ihre bei den Babyloniern beginnende Entwicklung als Gleichungslösen, den allmählichen Aufbau einer Gleichungstheorie bei den Arabern des Mittelalters und den Mathematikern der Renaissance, die Anbahnung und Ausgestaltung algebraischer Strukturen seit der Galoisschen Theorie der Gleichungen bis hin zur homologischen Algebra, die Mitte der fünfziger Jahre begründet wurde.

Bezüglich ihrer individuellen Genese gibt es mehrere Deutungsmöglichkeiten. Zunächst eine gleichsam biografische: Danach wäre zu untersuchen, wie sich Wissen und Fertigkeiten auf algebraischem Gebiet bei einer ganz bestimmten Person (einem Schüler, einem Forscher, ...) im Laufe der Zeit herausbilden und festigen. Eine solche Genese ist nur in den seltensten Fällen von unmittelbarem wissenschaftlichen Interesse. Man schenkt ihr jedoch vor allem dann Beachtung, wenn die in ihr aufgedeckten Strukturen nicht rein biografischer Natur sind, wenn sie vielmehr einer großen Klasse von Personen oder womöglich gar allen Individuen zukommen; sie sind dann auf das menschliche Individuum bezogen und gleichwohl überindividuell. Zielt man nun auf solche in hohem Maße überindividuelle Strukturen in individueller Genese, so hat man sich zum Ausgleich dafür immer mehr von dem inhaltlich Besonderen des jeweiligen Erkenntnisbereichs, hier der Algebra, abzulösen und auf die verschiedenen Stadien der Intelligenzentwicklung im allgemeinen zu konzentrieren. Diesen Weg hat Piaget mit seiner großangelegten Psychologie der Erkenntnis eingeschlagen, und zwar unter Berücksichtigung der frühesten Kindheitsentwicklung.

Von einer konstruktiblen Genese der Algebra kann man sich schließlich unschwer eine geeignete Vorstellung verschaffen; man findet Beispiele in jedem Lehrbuch der Algebra. Diese Darstellungen sind gewöhnlich streng systematisierend. Gruppen, Ringe und Körper werden von einem abstrakten Standpunkt aus untersucht; ihre Definitionen finden sich auf den ersten Seiten und werden oft von hinhaltenden Tröstungen begleitet, wonach sich solche allgemeinen Begriffe aus guten Gründen anbieten, Gründe, die dem Leser am Ende der Lektüre in vollem Umfang aufgehen sollten. Das Erfordernis systemorientierter Lehrgänge der abstrakten Algebra ist unumstritten; schließlich ist die gegenwärtige Algebra größtenteils ein solches System, und künftige Algebraiker haben von diesem System auszugehen. Aus pädagogischer Sicht eher wünschenswert sind aber interpretierende und insbesondere problemorientierte Genesen mathematischer Inhalte. So läßt sich einem Lehrgang der Integralrechnung das alte Problem der Maßbestimmung unterlegen, einer entsprechenden Genese der Algebra das ganze Feld der Probleme, die sich beim Lösen algebraischer Gleichungen aufdrängen. Und schließlich ist es auch für die Geometrie anzustreben, ihre Rolle bei der Erschließung der räumlichen Wirklichkeit zur Interpretation ihrer Begriffe und Theoriestücke fruchtbar zu machen. Wie der Leser schon aus Kapitel 1 weiß, genügt dazu keineswegs der oft geübte Rückgriff auf eine (vermeintlich naive) Raumanschauung. Es kommt das hinzu, was im Titel durch das Beiwort 'operativ' angedeutet wird und in einer Ausnutzung praktisch handelnder sowie ideell geleiteter Problembewältigung besteht.

5.3. Exkurs: Piagets Psychologie der Erkenntnis

Didaktiker, zumal wenn sie sich für Psychologie interessieren, werden bei unserer Verwendung der Wörter 'operativ' und 'Genese' sicherlich des öfteren an Piagets Psychologie der Erkenntnis erinnert. Gegenwärtig ist diese Theorie keineswegs auf psychologisches Gebiet beschränkt; vielmehr wird sie mehr und mehr bei der Entwicklung und zur Unterstützung didaktischer Konzeptionen herangezogen und beeinflußt so die Praxis der Pädagogen. Trotz der Wahl der - im übrigen durch ihren neueren Gebrauch in der Psychologie keineswegs blockierten - Ausdrücke ist unser Konzept nicht in Piagets psychogenetischer Theorie fundiert. Es gibt wohl Berührungspunkte, doch fehlen in unserer mehr pragmatischen Sicht von Erkenntnisgenese einige Elemente, die in Piagets Auffassung eine zentrale Rolle spielen. Aus diesen Gründen halten wir es für angebracht, im Rahmen eines kurzen Exkurses zumindest dazu einige Ausführungen zur Orientierung zu machen. Wir deuten zunächst an, worin der sog. psychogenetische Ansatz besteht, erörtern dann das Verhältnis von Erkenntnisgenese und Didaktik sowie abschließend die charakteristischen Merkmale des operativen Standpunktes.

Der psychogenetische Ansatz

Piagets großes Thema ist die Entwicklung der menschlichen Erkenntnis. Entwicklung ist hier zumeist gleichbedeutend mit faktischer (individueller) Genese, und deshalb bezieht Piaget bei seinen Untersuchungen den Standpunkt des experimentell arbeitenden Psychologen. Darüber hinaus fühlt er sich biologischen (aus der Evolutionstheorie stammenden) Denkweisen verpflichtet. Psychische Erscheinungen sind für ihn Teil des Lebendigen, die Strukturen der Intelligenz und die von organischer Natur hervorgebrachten Formen prinzipiell von gleicher, nämlich natürlicher, Herkunft und daher vom Erkenntnispsychologen auch als gleichwertige Strukturen anzuerkennen und zu behandeln, und zwar in beiden Fällen als "eine in Entwicklung begriffene Organisation des Lebendigen" (Piaget 1950/1975, S.20). Entwicklung bedeutet dabei für Piaget nicht allein der von intellektuell ausgereiften Menschen bewirkte Wandel ganzer Wissenschaften (historische Genese). Vielmehr denkt Piaget vor allem an die Genese intellektueller Fähigkeiten aus ihrem "Larvenzustand" heraus, und das heißt: an die "Analyse der geistigen Entwicklung des Kindes" durch eine Art von "Embryologie der Vernunft" (S.22). In seinen zahlreichen Büchern erörtert er die Etappen dieser Entwicklung, zumeist am Beispiel mathematischer oder physikalischer Begriffe.

Organisation des Lebendigen zu sein, ist für Piaget nicht nur ein möglicher, neben anderen gleichberechtigter Aspekt menschlicher Intelligenz, sondern der für Entwicklungsprozesse allein maßgebende. - Ins Zentrum dieser Problematik führt uns die Frage: Was ist es, das einen genetischen Prozeß erstmals in Gang setzt oder ihn fortlaufend antreibt? Nach Piaget wurzelt dieser Antrieb im Funktionssystem der Intelligenz selbst, und zwar dadurch, daß es in jeder Lage danach strebt, mit der Umwelt in ein <u>Gleichgewicht</u> zu kommen. Wie die Biologie uns über die Anpassungsvorgänge bei Organismen unter veränderlichen Lebensbedingungen belehrt, so sieht Piaget auch in jenem Streben nach Gleichgewicht einen Vorgang der <u>Adaption</u>, unterteilt in <u>Akkomodation</u> (Anpassung der Denkweisen des Subjekts an umweltliche Phänomene) und <u>Assimilation</u> (Einordnung umweltlicher Phänomene in die vom Subjekt entwickelten Denkweisen). In seinem grundlegenden Werk über die "Psychologie der Intelligenz" (1947/1970) heißt es: "Die ganze Entwicklung des geistigen Lebens ... ist also eine Funktion dieser allmählich wachsenden Ausweitung der Austauschprozesse, d.h. des Gleichgewichts zwischen einer Assimilation von Elementen der Umwelt, die von der eigenen Tätigkeit immer entfernter sind, und einer Akkomodation dieser Tätigkeit an diese Umwelt" (S.11f).

Vorgänge des geistigen Lebens sind danach also Anpassungsvorgänge, die sich in ihrer Natur nicht von organismischer Adaption unterscheiden. Wer sie verstehen will, darf nach Piaget in ihnen nichts Ideelles oder Virtuelles suchen, das eine relativ eigenständige Rolle spielt. "Im Gegensatz dazu besteht die Eigenheit der genetischen Methode darin, das Virtuelle oder das Mögliche als eine durch die gegenwärtigen und realen Handlungen ununterbrochen weitergetriebene Schöpfung zu betrachten" (Piaget 1950/1975, S.39). Wir sehen: der eigentliche Gegenstand der psychogenetischen Betrachtung sind <u>Handlungen</u> (<u>Operationen</u>), sofern wir ihre Struktur und ihre Beziehungen untereinander einer streng <u>kausalen</u> <u>Analyse</u>

unterwerfen können. Darin ist nicht von vornherein ein Nachteil zu erblicken. Im Gegenteil, Piagets Forschungen haben gezeigt, als wie fruchtbar dieser Ansatz sich erweist, wenn man ihn so weit wie möglich auf die Anfangsstadien der menschlichen Intelligenzentwicklung anwendet. Aber eben auch nur so weit wie möglich. Jedes naturwissenschaftliche Verfahren hat gewisse Grenzen, nicht anders die psychogenetische Methode; und man hat sorgfältig zu unterscheiden zwischen wirklicher empirischer Forschung und der eher philosophischen Begleitmusik dazu. In dieser Musik ertönen Ansprüche, deren Einlösung wir nicht nur für fraglich, sondern nicht einmal für sonderlich wünschenswert halten.

Wir meinen hier ganz besonders die Gefahr, die von Piaget versuchte Einbettung menschlicher Handlungen in einen kausalen Zusammenhang zu hypostasieren und zu verkennen, daß wir es mit <u>einem</u> möglichen Aspekt dieser Handlungen zu tun haben. Wir bezweifeln ferner, daß in diesem Aspekt der Charakter von Handlungen als <u>zielgerichteter Tätigkeit</u> offenbar werden kann. Dies erscheint uns als wesentlich. Faktische und erst recht konstruktible Genesen enthalten eine finale Struktur, was der Tatsache entspricht, daß von einem bestimmten Stadium an der Mensch seine Handlungen zuvor geistig entwirft und daß dieser Entwurf nicht bloß 'blinde' Reaktion auf Störungen im intellektuellen Gleichgewicht ist. Um zu verstehen, wie ein Umstand einen solchen Entwurf veranlaßt, brauchen wir keine biologische Ursachenkette aufzudecken. Eine derartige kausale Substruktion würde auch geradezu den <u>Sinn</u> des Entwurfs verfehlen; schließlich ist der erwähnte Umstand für den Handelnden ein Motiv, das er durch Bedürfnis, Interesse und dgl. in seinem Entwurf zur <u>Geltung</u> bringt.

<u>Erkenntnisgenese und Didaktik</u>

Wir wollen hier die Frage dahingestellt sein lassen, ob man die Finalität menschlicher Handlungen (im weitesten Sinne) im Prinzip kausal erklären kann, indem man auf psychologische Eigenschaften von Operationssystemen zurückgreift. Zumindest dürften einige Zweifel angebracht sein; auch bei Piaget ist das alles nicht erhärtet. Aber ganz abgesehen davon ist zu fragen, was mit einer solchen Reduktion eigentlich gewonnen wäre. Wenn ein Biologe Form und Funktion eines Organismus erkennen möchte, so wird es ihm wenig nützlich sein, den Organismus in seine molekularen Bestandteile zu zerlegen. Dementsprechend ist es für das Studium genetischer Handlungsfolgen kaum von Bedeutung, sich ihre finale Struktur durch einen im Grunde vage bleibenden psychischen Mechanismus als kausal erklärbar zu denken. Auch pädagogisch eher nutzbar sind empirische Daten über die Entwicklung der Intelligenz im allgemeinen oder solche von H. Freudenthal (1973/1978) empfohlenen Beobachtungen individueller Lernvorgänge auf ihre 'Unstetigkeiten' (Einsichtsmomente) hin. Nun hat Piaget seine Untersuchungen gerade auch auf die Etappen der Allgemeinentwicklung gerichtet, und es wäre daher nicht sinnvoll, hier einen Gegensatz zwischen seinen und didaktischen

Interessen aufzubauen. Eine wechselseitige Anerkennung der Standpunkte in ihren jeweiligen Grenzen ist sicher eher angezeigt und überdies wissenschaftlich ergiebiger.

Im übrigen hat Piaget selbst eine Bemerkung gemacht, die seinen Biologismus etwas zu mildern und einzuschränken scheint und die G. Steiner (1973) "geradezu erstaunlich" nennt: "Es ist unbestreitbar, daß das Gefühl im Funktionieren der Intelligenz eine wesentliche Rolle spielt. Ohne Gefühl gäbe es kein Interesse, keine Bedürfnisse, keine Motivation; es ergäben sich in der Folge weder Fragen noch Probleme, und es gäbe gar keine Intelligenz" (vgl. Piaget (1962), S.129, zitiert nach G. Steiner (1973), S.146). Wir können uns in dieser Frage weitgehend der Analyse anschließen, die T. Mischel (1978) zum Wesen von Piagets Erklärung vorgelegt hat. Danach sind Erklärungen auf der Ebene der Gefühle, Interessen, Bedürfnisse, also Erklärungen, die sich auf Sinnkategorien stützen und die Mischel intensional nennt, nicht vereinbar mit solchen von Piaget bevorzugten extensionalen Erklärungen auf der Ebene kausal verknüpfter Operationsfolgen. Mischel vergleicht diese Inkompatibilität treffend mit den unterschiedlichen Weisen, in denen das Verhalten eines Computers mit Hilfe seiner Software bzw. seiner Hardware 'gesteuert' wird.

Dieser methodologischen Unklarheit entspringt nun auch eine Schwierigkeit bei der praktischen Anwendung von Piagets Theorie. Da Piaget extensionalen Erklärungen das Vorrecht gibt, gelten ihm auch nur solche Prozesse als grundlegend, die unbeeinflußt von sinnabhängigen Faktoren abzulaufen scheinen, also 'spontane' Prozesse unter 'natürlichen' Bedingungen. Andererseits kann man nicht so tun, als gäbe es keine soziale und kulturelle Umwelt, ein Problem, das die Lerntheorie unter dem Titel "Einfluß der Erfahrung auf die Genese" behandelt. Unter Erfahrung sind dabei Vorgänge sozialer und instruktioneller Vermittlung zu verstehen. Piaget hat deren Einfluß wohl bemerkt, aber nicht so recht anerkannt. In seinem Buch "Die Lernpsychologie Jean Piagets" (1970) spricht L. Montada von Piagets "sehr skeptischer Haltung gegenüber Versuchen einer Lenkung der Erfahrungsaufnahme und gegenüber Versuchen der Belehrung" (S.27). Die pädagogischen Folgen dieser Einstellung beschreibt Montada dann sehr deutlich: "Piaget bindet in gewisser Weise dem Lernforscher und dem Didaktiker die Hände. Alles, was an Entwicklungsveränderungen geschieht, geschieht außerhalb des Laboratoriums und außerhalb der Schulklasse. Der Psychologe und der Lehrer müssen warten, bis sich eine bestimmte Struktur in der spontanen Erfahrung des Kindes gebildet hat, die dann zu diagnostizieren und pädagogisch zu nutzen ist" (S.28).

Aus didaktischer Sicht ist es daher verständlich, wenn H. Aebli in seiner Einführung zu Montadas Buch den Wunsch ausspricht, die Entwicklungspsychologie möge "endgültig aus dem Schatten Rousseaus heraustreten und fähig werden, der sozialen Umwelt und der Erziehung jene Rolle zuzumessen, die diese so offensichtlich spielen" (S.9). Dies belegt auch der (glückliche) Umstand, "daß die didaktische Praxis über Techniken verfügt, die in ihrer Summe bei weitem wirkungsvoller sind als die aus heutigen psychologischen Systemen deduzierbaren und anwendbaren Prinzipien" (S.13). Man könnte dies auch folgendermaßen ausdrücken: Beim Aufbau konstruktibler Genesen spielen entwicklungspsychologische Ergebnisse wohl eine gewisse Rolle, man sollte ihre Bedeutung aber keinesfalls überschätzen und vor allem darüber nicht die konstruktiv-schöpferischen Möglichkeiten der Didaktik vernachlässigen. Selbstverständlich kann dabei die Kenntnis empirischer Randbedingungen hilfreich sein, wie sie die Entwicklungspsychologie liefern. Daß hier weder Gegensätzlichkeit noch Einseitigkeit herrschen muß, hat Wittmann (1974/1978) unter der Überschrift "Entwicklung und Unterricht" (S.104ff) eingehend erörtert. Er weist dazu nicht allein auf die inzwischen veränderte Auffassung der Genfer psychologischen Schule hin, sondern deutet auch eine Lösung der Aufgabe an, Piagets Theorie mit einer stärker instruktionsorientierten sowie Probleme der Sinngebung beachtenden Sicht von Entwicklung (zumindest ohne direkten Konflikt) zu verbinden.

Operativer Standpunkt

Der Ausdruck 'operativ' hat eine sehr weitläufige Verwendung, besonders in Philosophie, Psychologie und Pädagogik. Wir werden im folgenden Kapitel 6 eine sehr allgemeine operative Interpretation von Wissenschaft entwickeln, die nicht von einer an Piaget anknüpfenden Konzeption von Operativität (etwa beschrieben durch E. Wittmann (1981)) herrührt. Für die Didaktik der Mathematik ist es daher nützlich, wenn wir das in ihr benutzte 'operative Prinzip' einmal kurz mit dem hier für die Geometrie verwendeten Prinzip der operativen Begriffsbildung vergleichen und so beide Prinzipien gegeneinander abgrenzen.

Ganz allgemein impliziert ein wie auch immer gearteter 'operativer Standpunkt' die Auffassung, daß Handlungen für Erkenntnis- und Lernprozesse eine konstituierende Funktion besitzen. Piaget macht noch einen Unterschied zwischen konkreten Handlungen und solchen, die von diesen ausgehend verinnerlicht und am Ende flexibel verbindbar werden. Verinnerlichte Handlungen, Operationen genannt, machen für Piaget die bewegliche Struktur des Denkens aus, deren formales Substrat er als "Gruppierung" bezeichnet. Die beiden Hauptbestandteile des Begriffs "Operation" sind also einmal die Herkunft von Handlungen und zum anderen die Organisation in Gruppierungen.

Die Abkunft von den Handlungen ist sehr komplex; Piaget beschreibt sie zusammenfassend etwa im Abschnitt "Die Hierarchie der Operationen und ihre fortschreitende Differenzierung" (1947/1970, S.170ff). Hand in Hand mit dem stufenweisen Prozeß der Verinnerlichung findet die Organisation in Gruppierungen statt, mit deren Vollendung ein Gleichgewicht, "als die letzte Stufe einer Entwicklung" (S.57), erreicht ist. Dabei ist es ein "kausaler oder zeitlicher Determinismus" (Piaget 1950/1975, S.41), der Piaget zufolge diese Vorgänge regiert und das "Virtuelle" des menschlichen Denkens (vergleichbar unserem Begriff der Idee) zuallererst konstituiert. Aufgrund dieser 'naturalistischen' Sichtweise ergibt sich dann auch ein anderer Operativitätsbegriff als der im POB verankerte. Im POB erkennen wir ja gerade jene Virtualität als eine eigenständige Funktion an, die allerdings wohl in enger Wechselwirkung steht mit tatsächlich vollziehbaren (und auf Zwecke gerichteten) Handlungen.

Piagets Auffassung vom Erkenntnisprozeß hat in Gestalt des sog. operativen Prinzips vor allem über Aebli (1951/1970) und Fricke/Besuden (1970) Eingang in die Mathematik-Didaktik gefunden. In der Formulierung von Wittmann (1974/1978) lautet es: "Es ist darauf hinzuarbeiten, daß die aus Handlungen (durch Verinnerlichung) erwachsenden Operationen sich in Gruppierungen organisieren." (S.74). Daß dieses Prinzip wie für das Mathematiklernen geschaffen erscheint, ist nicht verwunderlich, da Piaget seinen Gruppierungsbegriff dem mathematischen Gruppenbegriff nachgebildet hat (mit einigen Elementen des Verbandsbegriffs). In einer von Wittmann (1973 und 1978) entwickelten Präzisierung ist eine Gruppierung ein spezielles Gruppoid, das auf einer zugehörigen Menge von Zuständen operiert. Dies führt dann zu Wittmanns Erweiterung des "operativen Prinzips", das ist der Zusatz, "daß Verträglichkeiten zwischen Zustandseigenschaften, -relationen, -funktionen und den Operationen der Gruppierung sowie zwischen Operationen verschiedener Gruppierungen deutlich werden" (Wittmann 1976, S.170). Somit hat der Operationsbegriff nach Piaget, jedenfalls soweit seine zweite Konstituente "Organisierung in Gruppierungen" betont wird, eine starke Affinität zum mathematischen Operationsbegriff, und zwar gleichgültig, ob es sich um "konkrete" oder "formale" Operationen handelt (die Piaget begrifflich ohnehin nicht scharf genug trennt).

Man denke nur an die Parade-Anwendungen des operativen Prinzips: Addition, Bruchrechnung oder Abbildungsgeometrie. Sicherlich trägt es hier zur Erhellung der Sachverhalte bei, zumindest was deren innermathematische Struktur angeht - schließlich ist die Mathematik ja selbst operativ in dem Sinn organisiert, als sie Strukturen (Eigenschaften) untersucht, die durch Funktionen und ähnliches (Operationen) induziert werden.

Was den Unterricht betrifft, so erachtet man seine operative Gestaltung schon lange für empfehlenswert, ganz unabhängig von irgendwelchen an Piaget anknüpfenden Theorien. Zweifellos fördert eine Orientierung an Handlungen die Motivation und kommt insbesondere jüngeren Kindern entgegen, die viele Sachverhalte noch nicht symbolisch darstellen können.

Gleichwohl sind in der allgemeinen Auffassung begriffskonstituierende Handlungen dazu da, sich selbst überflüssig zu machen. Ein Begriff (eine Operation) gilt nur dann als erworben, wenn mit ihm (ihr) auf symbolische Weise umgegangen werden kann und wenn er (sie) in ein flexibles System von Begriffen integriert ist. Wir lassen dahingestellt sein, wie in anderen Gebieten sich Begriffe konstituieren. In der Geometrie jedenfalls erachten wir reale Handlungen, nämlich Herstellung und Gebrauch geometrischer Formen, als unentbehrliche Bestandteile einer jeden Begriffsbildung; die Herstellvorschriften sind sogar inhaltliche Grundlagen der Begriffe. Das Entscheidende ist dabei nicht, daß

	Prinzip der operativen Begriffsbildung	"operatives Prinzip"
Herkunft	Erkenntniskritische Analyse von Wissenschaft (Dingler)	Psychologische Beschreibung der Intelligenzentwicklung (Piaget)
Wesen	Entwicklung von Handlungsvorschriften aus Zweckanalysen, Herstellung und Gebrauch	Verinnerlichung von Handlungen und Organisation in Gruppierungen
Begriffsgenesen	interpretierend, final bestimmt	faktisch, kausal bestimmt
Stufeneinteilung	Heuristische Einteilung in Stadien mit fließenden Übergängen; frühere Stadien Thema in späteren	Essentieller Bestandteil der Theorie: 4-5 voneinander deutlich abgehobene Stufen, die in starrer Folge durchlaufen werden
Einsatz	nicht auf bestimmte Fächer beschränkt, jedoch vorläufig nur für Geometrie ausgearbeitet	nicht auf bestimmte Fächer beschränkt, besonders geeignet bei Affinität zu mathematischen Strukturen
Strukturierung des Unterrichts	fächerintegrierend; einsetzbar zur lokalen, mittleren und globalen Unterrichtsorganisation	eher lokal; über Stufentheorie auch global für größere Zeiträume
Realitätsbezug, Umwelterschließung	essentieller Bestandteil	davon unabhängige Kategorie

Tab.5

überhaupt irgendwelche Handlungen ins Spiel kommen. Manipulationen mit Klötzen allein bringen noch keinen Lernprozeß in Gang. Hinzutreten muß ein Bewußtsein vom Sinn solcher Handlungen, wie wir dies im teleologischen Prinzip fordern (s. 5.4). Dieses Prinzip machen wir auch bei der Formulierung des POB geltend, indem wir die Begriffsbildung von den leitenden Zwecken ihren Ausgang nehmen lassen. Das POB wurde nur für den Erwerb geometrischer Begriffe formuliert, es beruht daher auch darauf, daß diese im Ununterscheidbarkeitsgedanken und in der Möglichkeit ihrer exhaustiven Realisierung wurzeln, obwohl beides für ein allgemeines POB nicht essentiell wäre. Die Tragfähigkeit eines solchen allgemeinen POB für das Lernen in anderen Disziplinen müßte allerdings noch untersucht werden.

Zum Schluß haben wir in einer tabellarischen Übersicht den von uns ausgearbeiteten operativen Ansatz dem Piagetschen gegenübergestellt. Bei der Beschreibung der didaktischen Funktionen beziehen wir uns dabei auf unsere Ausführungen in Kapitel 3. Die Tab.5 verdeutlicht, daß die beiden operativen Standpunkte von verschiedener Herkunft und eigentlich gar nicht vergleichbar sind; auch setzen sie in verschiedenen Bereichen des didaktischen Feldes an. Widersprüchlichkeiten treten erst dann auf, wenn aus den psychologischen Untersuchungen unzulässige epistemologische Folgerungen (oder umgekehrt) gezogen werden.

5.4. Didaktische Prinzipien

Im folgenden werden wir einige Bemerkungen zu Status und Rolle didaktischer Prinzipien im allgemeinen machen. Daran anschließend erörtern wir drei Prinzipien, die für unsere Behandlung der Geometrie (und wohl auch unabhängig davon) bedeutsam sind: das genetische Prinzip, das teleologische Prinzip, und das Prinzip der pragmatischen Ordnung. Anders als das erste Prinzip sind die letzten beiden innerhalb der Didaktik bisher nur spärlich und zumeist nur unter Teilaspekten betrachtet worden.

Der amerikanische Psychologe J.S. Bruner hat in seinen Arbeiten zur Theorie der Erziehung (1960/1970, 1967/1974) einen wesentlichen Beitrag zu der Auffassung geliefert, daß Wissensgenese nicht allein von den 'natürlichen' Voraussetzungen des Individuums abhängt, um deren Erfassung es Piaget zu tun ist, sondern nicht minder von einem Milieu allgemeiner sowie fachspezifischer Unterweisung. Je größeren Einfluß man diesen sozialen, kulturellen und instruktionellen Vermittlungsvorgängen auf die geistige Entwicklung zuzugestehen bereit ist, desto dringender stellt sich die Frage nach deren bewußter Gestaltung aufgrund leitender Prinzipien. Solche Prinzipien sind keine neue Errungenschaft der Pädagogik, schon Comenius und Pestalozzi machten von ihnen Gebrauch. Neu (jedenfalls für die Didaktik der Mathematik) ist ihre zunehmende Anzahl und die mit ihrer Anwendung und z.T. modischen Propagierung notwendig gewordene methodologische Diskussion. Den Anstoß dazu gab E. Wittmann in einem Aufsatz (1975), dessen Fazit wir folgendermaßen zusammenfassen:

Die Didaktik der Mathematik, sofern sie sich mit konstruktibler Wissensgenese befaßt, hat großenteils den Charakter einer Ingenieurwissenschaft. Wer eine Lernfolge oder eine Unterrichtsvorlage konstruiert, untersucht kein natürliches Phänomen wie ein Naturwissenschaftler; vielmehr geht es ihm "um die Untersuchung und Verbesserung der Funktion künstlicher Objekte" (S.231). Bei derartigen Konstruktionsaufgaben helfen ihm didaktische Prinzipien. Man könnte sie als Faustregeln ansehen; in ihnen schlagen sich Theorien, Erfahrungen, aber auch vorgefaßte Normen nieder. Dementsprechend ist ihre Rolle vielfältig: Einmal aus einer praktischen Unterrichtslehre oder didaktischen Konzeption heraus entwickelt, bilden sie deren Konzentrat. Dieses kann umgekehrt jene Konzeption einprägsam charakterisieren und derart ihre Anwendung erleichtern. Ferner übernehmen didaktische Prinzipien noch eine heuristische Aufgabe, die vor allem von L.V. Zankov (1968/1973) hervorgehoben wird: Sie "erleichtern es der empirischen Forschung, Hypothesen zu finden, deren Untersuchung für die Praxis interessant ist" (Wittmann 1975, S.233).

Wir möchten dieser Sichtweise noch eine präzisierende Bemerkung hinzufügen. Sie soll dem (irreführenden) Eindruck entgegenwirken, als gäbe es zwei Sorten von Prinzipien: normative und empirische (vgl. S.227). Sofern es sich um Prinzipien für konstruktible Genesen handelt, haben diese auch Vorschrifts- oder Vorschlagcharakter und sind daher normativ. Didaktische Prinzipien 'ergeben' sich keineswegs aus der Erfahrung. Allenfalls lassen sie sich aufgrund bestimmter empirischer Daten oder Hypothesen teilweise rechtfertigen. (Bei der letzten Aussage ist der Zusatz 'teilweise' ganz besonders zu beachten.)

Welcher Art sind nämlich die empirischen Befunde, die man zur Rechtfertigung didaktischer Prinzipien benötigt? Gewöhnlich handelt es sich um Aussagen der Form: Unter den Bedingungen X hat eine faktische Genese die Verlaufsform Y. - Wir nehmen nun einmal an, Y sei aus irgendwelchen Gründen erwünscht. Dann könnte man in der gerade angeführten empirischen Gesetzesaussage eine Rechtfertigung für ein Prinzip erblicken, das dazu auffordert, die Bedingung X zu realisieren. Partiell ist diese Art von empirischer Rechtfertigung aus wenigstens zwei Gründen: Erstens macht sie von der normativen Voraussetzung Gebrauch, wonach die Verlaufsform Y als wünschenswert angesehen wird. Zweitens ist die Reproduzierbarkeit bestimmter Randbedingungen in Lernprozessen gewöhnlich höchst fraglich. Das haben wir schon bei Piagets Theorie bemerkt, und zwar hinsichtlich des Begriffs der 'natürlichen' Bedingung. Derartige Vorbehalte gelten aber für einen weiteren Kreis von Rechtfertigungsversuchen, insbesondere auch für die von uns selbst weiter unten unternommene Stützung des teleologischen Prinzips durch die empirischen Untersuchungen G. Rosenfelds.

Mit diesen eher skeptischen Bemerkungen soll die Mathematik-Didaktik aber keineswegs von ihrer Aufgabe abgehalten werden, geeignete empirische Forschungen über didaktische Prinzipien zu entwerfen und durchzuführen. Im Gegenteil, wir teilen die von E. Dahlke (1981) entwickelte Ansicht, wonach die Didaktik Fortschritte unter anderem darin machen sollte, ihre Prinzipien von einem zu großen Allgemeinheitsanspruch zu befreien, sie genauer zu begründen unter Einbeziehung ihrer Quellen und ihrer spezifischen Sachgebietsabhängigkeit und nicht zuletzt sie durch empirische Untersuchungen abzusichern.

Nunmehr wollen wir uns einigen didaktischen Prinzipien im einzelnen zuwenden.

Das genetische Prinzip

Auf den ersten Blick muß es merkwürdig erscheinen, daß wir dieses Prinzip noch eigens unter den Regeln für konstruktible Genesen aufführen. Aber unser Begriff von Genese ist ja weiter als die landläufige Vorstellung von genetischem Vorgehen. Eine konstruktible Genese kann systematisierend oder interpretierend sein, oder sie liegt irgendwo in der Mitte zwischen beiden Extremen. Nach Wittmann (1975) entwirft das sog. genetische Prinzip ein Bild von Mathematiklernen, "in dem die wesentlichen Impulse von Problemkontexten in und außerhalb der Mathematik ausgehen, in dem Mathematik und ihre Anwendungen als Einheit gesehen werden, und in dem das jeweilige Vorverständnis der Adressaten einbezogen wird" (S.231). Damit wird von konstruktiblen Genesen ein interpretierender Charakter gefordert, der sich gleichwohl an tatsächlichen Entstehungszusammenhängen orientiert, der an individueller Entwicklung ausgerichtet und von historischer Entwicklung inspiriert ist. Welche Interpretation (oder welcher Kontext) einer Genese jeweils zugrunde gelegt werden kann, hängt dabei natürlich von dem zu entwickelnden Stoffgebiet ab.

Das genetische Prinzip hat eine lange Tradition und in dieser eine ganze Reihe unterschiedlicher Spielarten. G. Schubring hat in seiner Dissertation (1978) die Überlieferung vom 17. Jahrhundert an aufgearbeitet und für die gegenwärtige Diskussion kritisch bewertet. Es sei nebenbei erwähnt, daß in Einklang mit unserem allgemeinen Genesebegriff Schubring für die historischen Anfänge des Prinzips "eine über die konstruktive Tätigkeit des menschlichen Geistes vermittelte Einheit" von systematisierender und interpretierender Genese ("von Deduktion und Genese") feststellt. Erst im weiteren Verlauf der Geschichte kam es zu einer Differenzierung, bedingt durch veränderte soziale Formen in der Wissensvermittlung.

In der Arbeit von Schubring werden besonders die Beiträge von K. Mager, B. Branford und O. Toeplitz zur Konzeption und Anwendung genetischen Vorgehens behandelt. Als weitere Verfechter des Prinzips sind aber auch F. Klein zu nennen, der es immerhin in einigen berühmten Passagen seiner "Elementarmathematik vom höheren Standpunkt" (Bd.1, 1924) propagiert, und in neuerer Zeit A. Wittenberg und H. Freudenthal. Wie Schubring (1977, 1978) herausgearbeitet hat, bestand von jeher - auch bei Klein oder Toeplitz - die Tendenz, das genetische Prinzip bloß historisierend zu verstehen. Eine Orientierung an geschichtlichen Abläufen allein kann aber keineswegs ausreichen, denn auch der Historiker sieht nur allzuoft die Zeitfolge <u>fertiger</u> Theorien und Begriffe und nicht deren innere Dynamik. Chronologie ist noch kein Mittel gegen eine verengte Auffassung von Wissenschaft als System von Wissen (vgl. 1977, S.211f).

Ebenfalls umstritten ist die Rolle des Haeckelschen biogenetischen Gesetzes, das man auf den Boden der Didaktik verpflanzt hat, um auch für Lernprozesse einen Gleichlauf von individueller Entwicklung (Ontogenese) und kollektiv-geschichtlichem Werdegang (Phylogenese) postulieren zu können. Branford hat dieses 'Gesetz' schon zu Beginn dieses Jahrhunderts zum Angelpunkt seiner mathematikdidaktischen Gedankengänge gemacht. Hier macht auch Schubring (gestützt auf Untersuchungen von J. Høyrup) jene Bedenken geltend, die sich ohne weiteres aus unserer Kritik der Piagetschen Vorstellungen ergeben: Eine genetische Parallelität versteht sich keinesfalls von selbst. Ontogenesen verlaufen ja nicht spontan, sondern unter dem Einfluß von Erziehung und Bildung (vgl. S.210f). Darüber hinaus halten wir die generelle Annahme eines derartigen Zusammenhangs (erst recht die Vorstellung, er könnte durch einen 'natürlichen' Mechanismus bedingt sein) für ungesichert und spekulativ. Wie sehr hier Wunschdenken die Analyse von Erfahrungsdaten beeinträchtigt, zeigt z.B. Piagets Rede von einem "genetischen Paradoxon" (1950/1975, S.228) angesichts der Fälle, wo historische und individuelle Entwicklungslinien in umgekehrter (zumindest dem biogenetischen 'Gesetz' nicht entsprechender) Richtung durchlaufen werden. Die Abweichungen im Falle der Geometrie erklärt Piaget sogar mit einer Theorie des von ihm so genannten "genetischen Kreisprozesses" (S.228-233). Alles in allem haben wir hier einen Musterfall des Problematischen im Umgang mit zu allgemein gefaßten didaktischen Gesetzesaussagen und Prinzipien.

<u>Das teleologische Prinzip</u>

Das genetische Prinzip vermag sich erst dann richtig zu entfalten, wenn man ihm weitere didaktische Prinzipien an die Seite stellt, zuvorderst das teleologische Prinzip und das Prinzip der pragmatischen Ordnung. Mancher Leser wird zum ersten vielleicht einwerfen wollen, spätestens seit Kants "Kritik der Urteilskraft" könne man in der Wissenschaft nicht mehr unbeschwert eine teleologische Betrachtungsweise empfehlen. Das ist zweifellos richtig, sofern wir uns im

Bereich biologischer Genesen und allgemeiner dem der Evolution des Lebens bewegen. Ist ein organisches Gefüge als zweckmäßig erkannt, so kann dies nicht bedeuten, daß diese Zweckmäßigkeit auch auf einer Zwecktätigkeit beruht. Nur ein zwecksetzendes bewußtes Wesen könnte zwecktätig wirken. Für die auf kausale Verknüpfungen gerichtete Naturforschung ist die teleologische (oder: finale) Sichtweise daher kaum mehr als eine heuristische Arbeitsgrundlage oder - in der Sprache Kants - ein regulatives Prinzip. Das ist aber anders, wenn wir uns mit konstruktiblen Genesen befassen. Wir stehen ja dann im Bereich menschlicher Kultur, und dort gibt es zwecksetzende bewußte Wesen; ebenso gibt es Vermittler von Zwecken, nämlich Erzieher (im weitesten Sinne), gebunden an Traditionen von Kultur, Wissenschaft und sozialer Lebensform. Hier ist eine finale Betrachtungsweise keinesfalls bloß regulativ, sondern konstitutiv und der Sache angemessen.
In der folgenden allgemeinen Formulierung eines entsprechenden teleologischen Prinzips ist stillschweigend eine Relativierung der Genesen auf solche Fälle mitzudenken, in denen die zu entwickelnden Sachgehalte von sich aus, d.h. in ihrem zugehörigen Lebenszusammenhang, einen finalen Sinnbezug einschließen:

Der Ablauf konstruktibler Genesen ist ausdrücklich auf bestimmte Ziele hin auszurichten, insbesondere solche, die vom Lernenden als leitende Zweckanforderungen anerkannt werden können.

Hierbei hat man sich sogleich einen Punkt deutlich zu machen, der möglicherweise zu einem Mißverständnis Anlaß geben könnte. Wir meinen die Möglichkeit, die für konstruktible Genesen geforderten Ziele mit Lern- oder Lehrzielen zu verwechseln. Dies wäre in der Tat abwegig. Insbesondere postuliert das Prinzip keinen lernzielorientierten Unterricht. Vielmehr handelt es sich bei den Genesen-Zielen um Zwecke, die der Lernende von sich aus erfüllen will oder wenigstens als sinnvolle Zwecke anerkennt. Wenn Schüler eine Schale aus Ton herstellen, so beabsichtigen sie damit nicht die Erfüllung eines Lehrzieles (obwohl auch das vorkommen soll). Wünschenswert wäre jedenfalls, wenn ihr Überlegen und Handeln ganz um die Anforderungen kreist, die im jeweiligen Zusammenhang an die Tonschale als Gebrauchs- oder Schmuckobjekt zu stellen sind. Gleichwohl kann die Zielgerichtetheit beim Schüler ihrerseits im Dienst eines Lehrzieles stehen; aber dieses Ziel ist eines, das der Lehrer erreichen will.

So selbstverständlich das teleologische Prinzip zu klingen scheint, es ist dennoch kein allgemein akzeptierter Grundsatz fachdidaktischer Lehren. Wir sahen das bei Piaget. Seiner Theorie pflegt man die Ansicht zu entnehmen, konstruktible Genesen hätten sich der Eigendynamik natürlicher Entwicklungsverläufe anzupassen. Nicht Zweckanforderungen sind dann die Ziele von Genesen, sondern Gleichgewichtszustände. Eine solche Ansicht verlegt die Triebfeder genetischer Prozesse ins Funktionssystem der Intelligenz selbst. Dem möchten wir indessen ein etwas realistischeres Bild entgegenhalten. Man braucht kein Pessimist zu sein, um nicht an die reichlich beanspruchte Legende vom natürlichen Wissensdurst und Wahrheitsdrang der Menschen, zumal der wissenschaftlich forschenden, zu glauben - eine Legende, der Piaget mit seiner Theorie die 'biologischen' Grundlagen zu liefern scheint. Doch wie vielen einfachen und komplizierten Rätseln und Problemen begegnen wir tagtäglich, ohne daß wir in ihrer Bewältigung Gleichgewicht suchen und unseren Wissensdurst löschen. G. Rosenfeld hat dies mit gebührender Vorsicht so beschrieben: "Die Voraussetzungen einer Sog-Kraft des Unbekannten, einer anziehenden Wirkung des Problems schlechthin, einer fundamentalen Tendenz, erlebte Schwierigkeiten zu überwinden, einer geistigen Bewältigung um der Eewältigung willen (jeweils zurückgeführt auf den vitalen Ursprung der Neugier) treffen in der pädagogischen Situation nur bedingt zu" (1966, S.17). Kaum anders dürfte es sich bei Wissenschaftlern verhalten. Sicherlich spielt reine Wißbegier in der Forschung eine Rolle. Der Mediziner Hans Selye, bekannt vor allem als Entdecker des Stress-Syndroms, hat aber einmal treffend bemerkt, Wißbegier könne in der Wissenschaft viel leichter durch das Lesen der Veröffentlichungen anderer befriedigt werden als durch die eigene harte Arbeit im Laboratorium.

Woher also der Antrieb zum Problemlösen? Mit dieser Frage betreten wir den Boden der pädagogisch-psychologischen Motivationsforschung. Wenn wir hier einmal den Untersuchungen G. Rosenfelds in "Theorie und Praxis der Lernmotivation" (1966) folgen, so begegnen wir "aus verschiedenen individuellen Situationsumständen erwachsenden personalen Valenzen" (S.18). Das kann im einzelnen verschiedenes sein: mehr oder weniger gefühlsbetontes Interesse, Genugtuung an der eigenen Findigkeit, Entdeckerstolz (und damit die häufig zu unrecht schamhaft verborgene Zone der Eitelkeiten beim Wissenschaftler), die Freude am Erfüllen eines (anerkannten) Zweckes und anderes mehr. Rosenfeld hat besonders die Rolle solcher 'Zweckerlebnisse' im Schulunterricht untersucht. Insofern liefert er uns einen empirisch-psychologischen Hintergrund zum teleologischen Prinzip.

Von Rosenfelds Ergebnissen interessiert uns hier vor allem die Tatsache, daß die Verminderung der Zweckhaftigkeit eines Vorgangs auch seine subjektive Valenz herabsetzt. Insbesondere müssen wir von der Meinung Abschied nehmen, "daß bei Lernvorgängen im Vorschulalter vorwiegend aktuelle Handlungsstimuli dominieren (eine Annahme, die keineswegs abwegig ist, wenn man die spielerische Gesamteinstellung des Vorschulkindes in Betracht zieht). Vielmehr deutet sich im ganzen der Trend einer beginnenden Lernmotiventwicklung an: Die personale Valenz einer Lernhandlung wird mehr und mehr von den über den aktuellen Vorgang hinausführenden Handlungszwecken und Bedeutungsgehalten gesichert" (1966, S.167). Für Schulkinder läßt sich entsprechendes feststellen. Insgesamt gesehen erscheint damit eine der "Leitlinien" Rosenfelds bekräftigt, wonach der Versuch abzulehnen ist, "pädagogische Aktivitäten vornehmlich um ihrer selbst willen (als Selbstzweckhandlungen, ursprüngliche Interessenzuwendungen ohne Vorschaltung realer Lebensziele, als geistige 'Vitalbedürfnisse') zu motivieren" (S.31). Bei einem solchen Versuch drohen nämlich die Lernsituation lebensfremd, die Lerninhalte bedeutungsleer zu werden.

Rosenfelds Leitlinien sehen wir in einer Tradition mit älteren pädagogischen Gedanken, etwa denen aus der Bewegung der Arbeitsschule und insbesondere solchen Vorstellungen, wie sie z.B. G. Kerschensteiner im Zusammenhang mit der Werkerziehung geltend gemacht hat. Überhaupt darf die Didaktik des Werkens eher als die Mathematik-Didaktik für sich beanspruchen, den Bedeutungsaspekt im Lernprozeß entwickelt zu haben. (Vgl. hierzu etwa die Arbeiten von E. Kley (1963a,b).) Das liegt bis zu einem gewissen Grad auch in der Natur der Sache, wenn man es mit B. Wessels (1969) als Bildungsziel der Werkerziehung betrachtet, in technisch-konstruktives Denken und Herstellen einzuführen. Dann genügen praktisches Herstellen und spielerisches Erkunden von technischen Zusammenhängen allein bei weitem nicht, um dieses Ziel zu erreichen (vgl. S.115). Vielmehr muß die Finalität jeglichen Herstellens bewußt werden, seine Ausrichtung an jeweils geltenden Zweckanforderungen. Die bei Wessels (S.115) zitierte "Wesensbestimmung der Technik" von F. Dessauer spricht dies bündig aus: "Technik ist reales Sein aus Ideen durch finale Gestaltung und Bearbeitung aus naturgegebenen Beständen."

Auch in der Mathematik-Didaktik wird gelegentlich, z.B. bei F. Drenckhahn (1952/53), auf den "finalen", durch die Erfahrungen "sachlicher Zweckmäßigkeit" geprägten Charakter mathematischer Lernprozesse hingewiesen. Allerdings hat man sich immer recht schwer getan, wenn es um die Formulierung und praktikable Anwendung eines teleologischen Prinzips ging. Um die Jahrhundertwende beginnen damit P. Martin und O. Schmitt, indem sie die Raumlehre nach sog. Formengemeinschaften bearbeiten ("deutbare Naturformen, zweckmäßige Gebrauchsformen und sinnvolle Kunstformen").

Vor allem aber hat dann E. Zeißig die Geometrie an Volksschulen als Formenkunde konzipiert und gefördert, worunter eine an formenkundlichen Zweckmäßigkeitsbetrachtungen zu leistende Erschließung der räumlichen Wirklichkeit zu verstehen ist. Seine sehr detaillierten unterrichtspraktischen Vorschläge hat er in den zwei Bänden seiner mehrfach aufgelegten "Präparationen für Formenkunde (Raumlehre - Geometrie) als Fach an Volksschulen" (1900) entwickelt. Zeißig betrachtet als Zwecke neben Forderungen der Nützlichkeit auch solche ästhetischen Gefallens und verliert sich dabei nicht selten in endlosen, rein deskriptiven Aufzählungen von nicht immer überzeugenden Gründen für eine Form. Das hat damals W. Lietzmann in seinem Bericht "Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland" (1912) zu dem Ausspruch bewogen, hier werde "ein Prinzip zu Tode gehetzt" (S.19). Zu recht warnt Lietzmann vor "Oberflächlichkeit in der Begründung" und "vor dem Streben, systematisch an die

Fragen heranzugehen", nämlich angesichts von schwierigeren "Zweckmäßigkeitsfragen ... , deren wirkliches Verständnis im Elementarunterricht nicht mit wenigen Worten zu erreichen sein wird." (S.20). Gleichwohl hat Zeißig in der breit angelegten theoretischen Abhandlung "Die Raumphantasie im Geometrieunterrichte" (1902) die Hoffnung ausgesprochen, daß "solche teleologischen und ästhetischen Untersuchungen in jeder Schulart, von der Volksschule bis zum Gymnasium herauf, Eingang finden und sich einer bleibenden Stätte erfreuen" (S.61). Diese Hoffnung hat sich nicht erfüllt, schon Lietzmann bescheinigte der ganzen Konzeption "nur geringen Anklang".

Immerhin ist der Grundgedanke noch eine Weile in der Volksschule wirksam geblieben durch H. Kempinskys "Lebensvolle Raumlehre" (1920/1952). Kempinsky schöpft die Bedeutungsinhalte geometrischer Begriffe aus Zweckanalysen innerhalb der "Formenumwelt" (vgl. S.11, S.311ff); er geht dabei mit Zweckmäßigkeitsbetrachtungen sparsamer um als Zeißig, und dies hat gewiß der Sache genützt.

Die bisherigen mathematik-didaktischen Annäherungen an die teleologische Struktur des Lernens beschränken sich weitgehend auf das bloße Betrachten. Erst wenn wir alle genannten Quellen zusammen nehmen - Motivationsforschung, Tradition der Werkerziehung, geometrische Formenkunde - kommen wir auf das Herstellen als weitere begriffs- und sinnerzeugende Komponente im teleologischen Prinzip.

Schließlich wollen wir dieses Prinzip, auch im Hinblick auf allgemeinere Bildungsziele, einer anthropologischen Sicht unterwerfen. Wir meinen, daß es möglich sein sollte, mathematisch-begrifflichen wie realen technischen Gefügen den Anschein einer selbständigen und dem Menschen fremden (oder gar dämonischen) Macht zu nehmen, ganz im Sinne des unser Buch einleitenden Leonardo-Mottos. Wissenschaftliches Denken und technisches Handeln sind als etwas Gemachtes zu begreifen, als Instrumente, mit denen sich Menschen in eine Auseinandersetzung mit ihrer natürlichen oder meist schon technisierten Umwelt begeben. Das scheint ein Gemeinplatz zu sein. Man suche aber einmal nach überzeugenden Gelegenheiten, die im herkömmlichen mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht dazu genutzt werden, um Zwecke als konstitutiven Bestandteil von Begriffen erfahrbar zu machen. Wir beschränken uns hier zwar auf geometrisches Denken, verweisen aber ausdrücklich auf den Zusammenhang von Wissenschaft und Technik im allgemeinen sowie auf daran anknüpfende Reflexionen über den Sinn technischen Handelns, wie sie etwa H. Sachsse in seinem fundierten Buch "Anthropologie der Technik" (1978) entwickelt hat. Allein die Fragen der intellektuellen und ethischen Verantwortlichkeit, die sich dabei durch das teleologische Prinzip sichtbar machen lassen, dürften diesem Hintergrund pädagogisches Gewicht verleihen.

Aus der Sicht des Wissenschaftstheoretikers sind die angedeuteten Zusammenhänge solche der Rechtfertigung: Ein begriffliches oder technisches Konstrukt wird legitimiert, indem man an ihm Eigenschaften nachweist, die es zur Erfüllung bestimmter Zwecke tauglich machen (theoretische Rechtfertigung). Schließlich hat man die Zwecke selbst zu legitimieren (praktische Rechtfertigung). In einer Genese (im Entstehungszusammenhang) erscheinen beide Bereiche allerdings oft eng miteinander verzahnt; insbesondere zeigen historische Entwicklungen vielfältige und gelegentlich wenig geradlinige Mittel-Zweck-Relationen. Wir möchten hier daher davor warnen, das teleologische Prinzip als die Aufforderung mißzuverstehen, in Begriffs- und Erkenntnisgenesen sei ein unbewegliches Hinstarren auf ein einmal gesetztes Ziel hineinzulegen. Dementsprechend empfiehlt sich auch keine zu kleinliche Abgrenzung dessen, was überhaupt als Zweck gelten kann, und schon gar nicht die Festlegung auf Zwecke allein im Bereich des praktisch Nützlichen. Solche Fixierungen blieben an der Oberfläche begrifflichen Denkens. Es ist zwar nicht falsch, Begriffe und Theorien mit technischen Werkzeugen zu vergleichen; doch hat der Vergleich seine Grenzen. Werkzeuge sind viel stärker an ihre ursprünglichen Gebrauchsfunktionen gebunden als theoretische Konzepte. Letztere sind überdies mehr oder weniger eng mit einem größeren System von Begriffen verwachsen. Es genügt daher auch in den seltensten Fällen, bei vorgegebenen Zwecken allgemeinerer Art eine vereinzelte Idee heranzubilden; die Geometrie ist dazu ein deutliches Beispiel. In Einklang damit steht auch die in der Wissenschaftsgeschichte immer wieder zu beobachtende Tendenz, daß es nicht zuletzt die von innersystematischen Gesichtspunkten geleiteten Theorienausarbeitungen und Begriffsveränderungen sind, die gerade der Anwendbarkeit von Theorien zugute kommen. Gewiß, solche Umwege können - gemessen an den jeweiligen Zweckanforderungen - durchaus Irrwege sein, erweisen sich aber gar nicht selten als geeignete 'Um-zu'-Wege.

Mit unseren bisherigen Überlegungen möchten wir der Neigung entgegenwirken, in einer konstruktiblen Genese die Aspekte der Rechtfertigung einseitig zu sehen oder überzubewerten. So unterscheidet P. Lorenzen (1970/1978) von der faktischen Genese eine "Entstehungsgeschichte ..., wie sie hätte verlaufen können und <u>sollen</u>" (S.55, Hervorh. von uns). Letztere nennt er "normative Genese" und erwartet über sie ein kritisches Verständnis der tatsächlichen Wissensentwicklung (S.56). Es ist dabei aber darauf zu achten, daß aus der teleologischen Sicht einer Genese keine von moralischen Soll-Vorschriften beherrschte Wissenschaftsutopie wird (vgl. dazu Stegmüller (ab 1969, Bd.IV), S.8ff und S.25ff, sowie Schreiber (1975), S.165ff).

<u>Das Prinzip der pragmatischen Ordnung</u>

Abschließend wenden wir uns dem Prinzip der pragmatischen Ordnung zu. Der Name stammt von Hugo Dingler, der wohl als erster dieses Prinzip bewußt und in voller

Allgemeinheit für den Aufbau der Wissenschaften aufgestellt hat. Es lautet in Anlehnung an Dingler (1955/1969, S.65f):

Jeder Schritt innerhalb einer konstruktiblen Genese muß an einer Stelle erfolgen, wo nichts vorausgeht, was er erst leistet, und nichts vorausgesetzt wird, was durch ihn erst möglich wird.

Die Bezeichnung 'pragmatisch' (von griechisch: pragma = Handlung) deutet darauf hin, daß die Elemente eines genetischen Prozesses als Handlungen in einem mehr oder weniger weitgefaßten Sinne angesehen werden. Dingler hat diesen Standpunkt in vielen seiner Arbeiten zugrunde gelegt, unter anderem in seinen Büchern "Die Methode der Physik" (1938, S.116f) und "Aufbau der exakten Fundamentalwissenschaft" (1964, S.26). E. May unternimmt in seinem Beitrag zum Hugo-Dingler-Gedenkbuch (1956, S.131) eine philosophische Ausleuchtung des Prinzips.

Hier interessieren uns hauptsächlich seine didaktischen Aspekte. Zunächst hat man zu beachten: Das Prinzip der pragmatischen Ordnung ist ganz allgemein und bezieht sich auf jede Art von konstruktibler Genese, ob im Alltag, in der Wissenschaft oder im Unterricht. Es verlangt vom Erzähler eines Witzes, daß er nicht mit der Pointe beginne, und vom Naturwissenschaftler, daß er eine Behauptung nicht mit einer Theorie begründe, die sich ihrerseits wieder auf jene Behauptung stützt. Das klingt alles ziemlich selbstverständlich; doch ist es gerade im Bereich der Wissenschaft oft nicht leicht, einen Zirkel zu vermeiden. E. May (1956, S.133) erwähnt ein Beispiel aus der biologischen Literatur. Dort behauptet man die Homologie bestimmter Organe, weil die betreffenden Lebewesen die gleiche Abstammung hätten. Umgekehrt wird dann aber häufig die Homologie als Beweis für die Abstammungsgleichheit gewertet.

Auch in der Geometrie gerät man gelegentlich in eine ähnlich zirkelhafte Situation, zumindest bei der inhaltlichen Deutung der geometrischen Grundbegriffe. Zum Beispiel werden zur Feststellung der Kongruenz starre Körper benötigt; umgekehrt läßt sich der Begriff des starren Körpers aber kaum ohne die Kongruenzbeziehung einführen (darüber mehr in Kapitel 7). Man muß sich fragen, wie solche Zirkel zu vermeiden seien. Das kommt nun ganz auf den jeweiligen Rahmen an, in dem die betreffende Wissenschaft betrieben wird. Nehmen wir etwa gewöhnliche mathematische Theorien, so bedeutet pragmatische Ordnung soviel wie logische Ordnung: Man leitet neue Formeln aus bereits abgeleiteten ab und definiert neue Begriffe mittels schon definierter. Da gewisse Formeln nicht abgeleitet werden (Anfangsformeln, Axiome), braucht es nicht zu einem Zirkel zu kommen. Jeder Mathematiker wacht strengstens darüber, daß ein Beweis von A nicht eine Formel B benutzt, die bisher nur mit Hilfe von A bewiesen werden konnte. Auf diese Weise wird das Prinzip der pragmatischen Ordnung für systematisierende Genesen durchgesetzt.

Auch auf didaktischem Gebiet spielt diese Variante der pragmatischen Ordnung eine wichtige Rolle. Sie gipfelt dort in dem von L.V. Zankov (1968/1973) so genannten "Prinzip vom systematischen Aufbau des Unterrichts", demzufolge die "Grundlagen der Wissenschaft nach streng logischer Ordnung zu unterrichten, die Lerntätigkeit der Schüler folgerichtig anzuleiten ..." seien (S.70). Allerdings kritisiert Zankov aufgrund einer Reihe von Beobachtungen an der sowjetischen Unterrichtspraxis, "daß das Prinzp des Systematischen auf eine Weise interpretiert wird, die weder die Entwicklung der Schüler, noch eine echte Aneignung der Kenntnis fördert" (S.79). Diese Feststellungen decken sich mit der umfassenden Kritik an deduktiven Imitationen, wie sie etwa von F. Klein, O. Toeplitz und H. Freudenthal geübt worden ist. Wir brauchen diese Kritik hier nicht im einzelnen zu wiederholen (vgl. Wittmann (1974/1978), S.126ff). Lediglich der Haupteinwand gegen die vorfabrizierte Axiomatik sei erwähnt: Sie führt zur blinden Übernahme isolierter Systembausteine, zur Abkoppelung der Theorie von der Wirklichkeit und damit zu einer Verkehrung wissenschaftlichen Denkens.

Das Gegenmittel ist ein Unterricht nach genetischer Methode. Keineswegs müssen wir damit das Prinzip der pragmatischen Ordnung zurückstellen oder gar aufgeben. Vielmehr ist es nun nicht auf systematisierende, sondern auf interpretierende Genesen anzuwenden. Dann wird nämlich die pragmatische Ordnung durch den Interpretationszusammenhang bestimmt und liefert daher ein mögliches Muster für mathematisierendes oder allgemeiner: theoriegewinnendes Vorgehen. Wählen wir etwa das Gleichungslösen als Interpretationsgrundlage für eine Genese der Algebra, so wäre mit einer voreiligen Definition des Gruppenbegriffs (z.B. vor der Einsicht in Wurzelpermutierbarkeiten) die zugehörige pragmatische Ordnung verletzt. Einen entsprechenden 'Fehler' begeht, wer Anfängern in Analysis die Integrale von Riemann und Lebesgue als Sonderfälle einer abstrakten Integralnorm vorsetzt. Bezeichnenderweise verfuhr Henri Lebesgue selber in seinen Schriften dabei ganz anders, nämlich durch didaktisch geschickt angeregte Variationen bei der Bestimmung von Flächenmaßen (vgl. dazu das von K.O. May herausgegebene Buch "Measure and the Integral" (1966), bes. S.178ff).

Am krassesten liegen die Dinge in der Geometrie. Nicht nur hat man sich jahrhundertelang an Euklids Lehrgang geklammert, auch die philosophisch überhöhte Anwendungsferne der altgriechischen Wissenschaft galt lange Zeit als vorbildlich. Das praktische Problem der Erzeugung geometrischer Formen scheint niemals ernsthaft mit der Verstehbarkeit geometrischer Begriffe in Zusammenhang gebracht worden zu sein, nicht einmal im 17. Jahrhundert, einer Blütezeit gehobenen Handwerks. Jene unzureichende, nämlich bloß systematisch ausgerichtete Ordnung in der Geometriegenese ist aber nicht allein geschichtlich bedingt. Wie wir im nächsten Abschnitt aufzeigen werden, sind es nicht zuletzt erkenntnistheoretische Lehrmeinungen, deren Einseitigkeit oder deren Mangel an Präzision auch heute noch die Herausbildung von Interpretationen erschweren, die sich als Grundlage für einen genetischen Geometrie-Unterricht eignen.

5.5. Aspekte der Geometriegenese

Nach unseren grundsätzlichen Überlegungen wollen wir nun die Geometrie unter den dabei auseinandergesetzten Kategorien des Genetischen betrachten. Zur faktischen Genese gehören dabei die Geschichte der Geometrie und die Entwicklung geometrischer (räumlicher) Vorstellungen. Diese sehr weitgespannten Gebiete können hier nur genannt, nicht jedoch erörtert werden. Was die konstruktible Genese angeht, so behandeln wir etwas ausführlicher einige mögliche Leitgedanken zur Interpretation geometrischer Begrifflichkeit, darunter den phänomenologischen Ansatz und vor allem das von Dingler entwickelte operative Geometrieverständnis.

Geschichte der Geometrie

Die Entwicklungslinien der Geometrie von Euklid bis zur Gegenwart sind ausgiebig untersucht worden und bedürfen hier keiner eigenen Schilderung (vgl. z.B. die Einführung von K. Mainzer (1980)). Nur spärlich sind dagegen die Kenntnisse darüber, wie sich in früheren Zeiten geometrische Vorstellungen herausgebildet und schließlich zu theoretischen Begriffen entwickelt haben. Für eine operative Genese der Geometrie wäre ferner historisch von besonderem Interesse der Zusammenhang und die Wechselwirkung geometrischer Konzepte mit grundlegenden Verfahren der Technik (z.B. des Bauens oder der Formung). Anmerkungen dazu findet man bei Inhetveen (1983, S.120ff) sowie in Abschnitt 9.2.

Psychologische Beiträge

Gerade jene geschichtlichen und individualgenetisch schwer zu fassenden Anfänge haben seit je die Psychologie und die philosophisch-psychologische Spekulation herausgefordert. Unter der älteren psychologischen Literatur war besonders einflußreich das Werk von C. Stumpf "Über den Ursprung der Raumvorstellung" (1873). Stärker an der Geometrie orientiert sind die Arbeiten von E. Mach, etwa "Zur Psychologie und natürlichen Entwicklung der Geometrie" (1902/1926). Fast unübersehbar ist die Fülle des neueren einschlägigen Schrifttums, besonders zur Struktur des phänomenalen Raumes. Einen Eindruck davon vermittelt der bereits 1966 in Band I/1 des Handbuchs der Psychologie veröffentlichte Artikel von N. Bischof über die Psychophysik der Raumwahrnehmung.

Auf entwicklungspsychologischem Gebiet wurden auch Forschungen unter der Leitung Piagets betrieben und 1948 in den Werken "La représentation de l'espace chez l'enfant" und "La géométrie spontanée de l'enfant" veröffentlicht. Die Entwicklung des räumlichen Denkens, die Piaget nachzeichnet, beginnt mit der Herausbildung einfachster 'topologischer' Beziehungen innerhalb des durch Wahrnehmen und zeichnerisches Tun erschlossenen Feldes. Ein Zwischenstadium bilden die 'projektiven' Strukturen, die entstehen, wenn die Dinge der Wahrnehmung sich aus ihrer Isolation herauslösen und in ein umfassenderes und ihre räumliche Koordinierung ermöglichendes Blickfeld eintreten. Schließlich erfolgt der Übergang zum 'euklidischen' Raum; ihn denkt sich Piaget sowohl von 'topologischen' Anschauungen als auch von 'projektiven' Strukturen ausgehend gebildet. Kennzeichnend sind hierfür jeweils die Gewinnung der Begriffe 'Maß' und 'Distanz' bzw. das Auftreten bestimmter Invarianzen.

Weniger die experimentellen Befunde selbst als vielmehr das Verfahren, sie längs eines gruppentheoretischen Aufbaus der Geometrie zu deuten, hat verschiedentlich Zweifel an Piagets Entwurf geweckt. Freudenthal (1973, Bd.1) hat ferner mit Recht darauf hingewiesen, daß Piaget zwar ausgiebig mathematisches Vokabular verwendet, aber eben nicht in genau umrissener Weise und nicht in dem Sinn, der Mathematikern geläufig ist (weshalb wir einige Begriffe soeben in Anführungszeichen gesetzt haben). Wenn man gegenwärtig auch noch nicht abschließend über Piagets genetische Theorie der geometrischen Begriffe urteilen kann, so können wir dennoch eines der von ihm aufgestellten Ergebnisse auch als einen uns leitenden Gedanken hervorheben, den die vorliegende Schrift von einem anderen Standpunkt aus bewahrheiten soll: "Die Anschauung des Raumes ist kein Ablesen der Eigenschaften der Gegenstände, sondern vielmehr von Anfang an ein auf die Gegenstände ausgeübtes Handeln" (Piaget/Inhelder 1948/1975, S.520).

Leitgedanken zur Interpretation der Geometrie

Was die konstruktible Genese der Geometrie anbelangt, so finden wir besonders häufig ihre systematisierenden Formen. Hierzu gehört z.B. eine Gliederung der Geometrie nach dem Prinzip der Transformationsgruppen, wie es Felix Klein in seinem berühmten sog. Erlanger Programm von 1872 entwickelt hat; ferner auch die von Pasch und Hilbert herausgearbeitete Axiomatik oder, in neuerer Zeit, der Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff nach F. Bachmann. Zweifellos handelt es sich hierbei um Höhepunkte wissenschaftlicher Systematik. In ihnen wird die Einheit des geometrischen Wissens sichtbar, aber auch seine Mannigfaltigkeit aus gewissen voneinander unabhängigen Teilen. Allerdings sind diese Einheit und Mannigfaltigkeit formaler Natur, sie sind losgelöst von der Konstitution der Wissensinhalte. Hugo Dingler, dessen Wissenschaftstheorie wir noch als einen der bisher bedeutendsten Beiträge zum Problem der Geometriegenese herausstellen werden, hat daher die geometrische Axiomatik folgendermaßen kommentiert: "Aber der Erfolg dieser ungeheuren geistigen Leistung bürgt noch nicht dafür, daß damit auch die epistomologisch optimale Form der Geometrie erreicht sei" (1933, S.28). Freilich, hier wird man sich zunächst fragen, was denn in diesem Zusammenhang unter 'epistomologisch optimal' zu verstehen sei. Welches sind die Kriterien, mit denen wir die epistemologische Güte feststellen sollen? Fraglich ist auch, ob es dann nur eine einzige optimale Form gibt. Sicherlich bedarf es hierzu einer interpretierenden Wissensgenese. Es stellt sich somit die Frage, welche Art der Interpretation dabei zugrunde liegen soll.

Nicht selten wird in dieser Frage eine Auffassung einseitig als die alleinseligmachende vertreten. Der Vielseitigkeit menschlichen Welterfahrens entspräche jedoch eher eine Synthese der unterschiedlichen Deutungsversuche. Allerdings ist dies ein Wunschtraum, von dem man zur Zeit noch weit entfernt ist. Wovon wir praktisch auszugehen haben, sind im wesentlichen zwei programmatische Entwürfe: die Sinndeutung der Geometrie

a) im Bereich des <u>Erlebens</u> (anschauliches Erfassen),
b) im Bereich des <u>Handelns</u> (praktisches Gestalten).

Wir möchten sogleich anmerken, daß sich hinter dieser Zweiteilung eine doppelte Vereinfachung verbirgt. Erstens handelt es sich bei den Punkten a) und b) keineswegs um jeweils einheitliche Programme; z.B. umfaßt a) so gegensätzliche Auffassungen wie die Helmholtzsche Theorie vom empirischen Ursprung der Geometrie, Kants Lehre von der Konstruktion in reiner Anschauung oder die von Edmund Husserl begonnene phänomenologische Deutung der Geometriegenese. Zweitens sind die Bereiche a) und b) gegeneinander nicht so scharf abzugrenzen, wie dies vielleicht auf den ersten Blick scheinen mag. Kants reine Anschauung liefert einem schematisierten Handeln das 'Material'; beim Rückgang auf eine vortheoretische anschauliche Umwelt ("Lebenswelt") stoßen wir mit Husserl zwangsläufig auf eine Verfertigungspraxis, auf ein Hantieren mit und Bearbeiten von physischen Körpern. Mach bewegt sich in der bereits erwähnten Arbeit von 1902, wenn auch insgesamt fragmentarisch, in beiden Bereichen gleichermaßen ausgiebig.

Aufschlußreich ist es, die beiden Interpretationsrichtungen hinsichtlich ihres Einflusses zu vergleichen, den sie auf den Mathematik-Unterricht und auf das Denken der Mathematiker im allgemeinen ausgeübt haben und immer noch ausüben. Zwar spielen operative Gesichtspunkte immer wieder einmal eine gewisse Rolle, doch überwiegt alles in allem die Berufung auf das anschauliche Erfassen räumlich-geometrischer Verhältnisse. Nicht selten spricht man in diesem Zusammenhang von einer 'naiven' Raumanschauung als etwas mehr oder weniger fertig Gegebenem. In der 'naiven' Anschauung geraten nicht nur empirisches Wahrnehmen und geometrische Intuition in- und durcheinander, sie droht auch das Tor zur genetischen Analyse dieser Erkenntnisvorgänge zu versperren. Angebracht wäre es wohl, anstatt von 'naiver' Anschauung von einem naiven Reden über 'Anschauung' zu sprechen. Husserl hat die Situation treffend wie folgt beschrieben:

"Wie die lebendige Tradition der Sinnbildung der elementaren Begriffe sich wirklich vollzieht, sehen wir am elementaren geometrischen Unterricht und seinen Lehrbüchern; was wir dort wirklich lernen, ist: mit den fertigen Begriffen und Sätzen in strenger Methodik umgehen. Die sinnliche Veranschaulichung der Begriffe an den Figuren der Zeichnung unterschiebt sich dem wirklichen Erzeugen der Uridealitäten. Und das weitere tut der Erfolg - nicht der Erfolg der wirklichen Einsicht über die der logischen Methode eigene Evidenz hinaus, sondern die praktischen Erfolge der angewandten Geometrie, ihre ungeheure, wenn auch unverstandene praktische Nützlichkeit." (1954, S.376).

Unverstandene praktische Nützlichkeit - in seiner ganzen Härte trifft dieser Vorwurf heute nicht mehr. Immerhin ist es gegenwärtig die ausdrückliche Absicht der meisten Didaktiker, den Wirklichkeitsbezug der Mathematik zu einem der Tragpfeiler des Lernprozesses zu machen. Allerdings ist es hierbei ebenfalls nicht mit 'naiv-anschaulich' behandelten Anwendungsproblemen getan, wenn die Anwendbarkeit selbst auch tatsächlich verstanden werden soll. Wie wir in vorliegender Schrift demonstrieren, ist dazu die besondere Eigenart geometrischer Begriffe, ihr von Idee und Handlung geprägtes Doppelgesicht auf Schritt und Tritt zu berücksichtigen. Im übrigen können wir auch der Husserlschen Phänomenologie den Vorwurf nicht ersparen, daß der in ihr erbrachte Beitrag zur Sinndeutung der geometrischen Erkenntnis in concreto eher kärglich ausfällt, nicht zuletzt im Hinblick auf den programmatischen Anspruch, die praktische Nützlichkeit theoretischen Räsonierens im Rückgang auf den Bereich vorwissenschaftlichen Lebens verstehbar zu machen.

Am weitesten in diese Richtung ist O. Becker (1923) vorgestoßen, der in seiner Habilitationsschrift mit bemerkenswerter Gründlichkeit das Husserlsche Programm zu einer "phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen" auszuarbeiten sucht. Becker beschreibt gemäß Husserls Vorstellungen die Genese der geometrischen Formen über verschiedene Vorstufen der Raumkonstitution (sog. präspatiale Felder). Die in die geometrische Axiomatik unerklärt eingehenden Grundformen (Punkt, Gerade, Ebene usw.) haben wir uns als Ergebnisse von Grenzübergängen zu denken. Becker wagt sich auf diesem Boden sogar bis zu dem Versuch vor, die euklidische Geometrie als einzige adäquate Theorie des "Raumes der vor der physikalischen Wissenschaft uns anschaulich gegebenen 'Welt'" zu erweisen sowie "den Sinn und das Recht der Anwendung nicht-euklidischer Maßbestimmungen in der Physik nach phänomenologischer Methode zu untersuchen" (S.478).

Die damit verbundenen Überlegungen muß man in ihren Einzelheiten wohl als problematisch ansehen; doch fehlen hierzu noch reichlich klärende Diskussionen. Der Kritik wollen wir uns hier enthalten. Es sei aber darauf hingewiesen, daß die (von uns nicht erläuterte) phänomenologische Methode selbst als umstritten gilt, sogar unter Phänomenologen. Liefert sie wirklich Begründungen? Oder läßt sich mit ihr nur beschreiben, was im Rückgang auf lebensweltliche Erfahrung ins Licht der Reflexion gelangt?

Ein Beispiel dafür liefert der französische Philosoph M. Merleau-Ponty, für den die Phänomenologie ganz unter der Devise reinen Beschreibens zu stehen hat. In seinem bekannten Werk über die "Phänomenologie der Wahrnehmung" (1945/1966) umreißt er einen Standort diesseits von 'Konstruktion' und 'Konstitution', der ihm gestatten soll, das Erleben der Umwelt nicht als faktisch gegebenes und objektiviertes wiederzugeben, sondern den existentiellen Sinn dieses Erlebens gleichsam von innen her zu erfassen, wie er sich für ein leibhaftiges ("inkarniertes") Bewußtsein ergibt, insbesondere also auch für ein zu räumlicher Bewegung befähigtes Subjekt. Nicht zuletzt der Raumerfahrung widmet Merleau-Ponty ausführliche, höchst lesenswerte Analysen. Es sucht sie als "primordinale" Erfahrung, als Erfahrung "vor aller begrifflichen Ausarbeitung" zu beschreiben und erhebt dabei Erkenntnisansprüche in Konkurrenz zur experimentell-naturwissenschaftlichen Methodik (vgl. dazu Schreiber (1981)). Sicherlich hatte Merleau-Ponty nicht die Absicht, seinen Ansatz auf Einzelheiten der geometrischen Erkenntnis anzuwenden. Gleichwohl überschätzt er die Interpretationsmöglichkeiten, die sich ergeben, indem man allein die Bewegungsentwürfe des "perzeptiven Bewußtseins", die virtuelle "autonome Bewegung" des Leibsubjektes verfolgt.

Soweit diese Streiflichter auf Beiträge der Phänomenologie zur Sinndeutung der Geometrie im Bereich des Erlebens. Nicht nur der phänomenologische Ansatz, auch andere Interpretationen im Bereich a) vernachlässigen einen wichtigen Wesenszug im menschlichen Dasein. Gewiß, Leibsubjekte haben anschauliche Vorstellungen und profilieren diese Anschauungen, indem sie sich im Raum bewegen. Das ist aber wirklich nur der 'phänomenale' Aspekt dieses Tuns. Hinzu kommt ein finaler Gesichtspunkt, unter dem die Bewegung als zielgerichtet verstanden wird, als Bewegung im Kontext eines auf die Gegenstände der Wahrnehmung gerichteten Handelns. Kurzum, wir haben auch hier daran zu denken, daß Menschen problemlösende Wesen sind und daß ihr ursprünglicher Konnex mit ihrer Umwelt sich nicht aufs Anschauen oder Spazierengehen beschränkt. Das ist natürlich nicht neu, wird aber gelegentlich wieder vergessen. Für eine konstruktible Genese, in der unter anderem die praktische Nützlichkeit der Geometrie verstanden werden soll, ist dieser teleologische Aspekt wesentlich. In der Geometrie spielt er umso mehr eine hervorragende Rolle, als er sich dort - im Unterschied etwa zu

Algebra oder Integralrechnung - schon im vortheoretischen Bereich, beim allerersten Ausprägen geometrischer Vorstellungsweisen, aufdrängt.

Damit kommen wir zur Konzeption Dinglers als einem der unseres Erachtens wichtigsten Beiträge, die dem Bereich b) zugehören. Dingler hat die Bedeutung des teleologischen Aspektes in operativem Sinn nicht bloß erkannt und verbal bekräftigt; er hat ihn in zahlreichen Büchern konsequent für die Ausarbeitung einer Geometriegenese fruchtbar zu machen versucht, in der auch Einzelheiten der Begriffs- und Theoriebildung berücksichtigt werden. Wir wollen hier nicht auf Dinglers umfassende Philosophie der Wissenschaft eingehen, obwohl wir einige ihrer Elemente bei unseren eigenen Untersuchungen zur Geometrie verwenden. Wir machen aber stets deutlich, wann und inwiefern wir jeweils auf Dinglersche Grundgedanken zurückgreifen. Dasselbe gilt für die Theorien der sog. Erlanger Schule um P. Lorenzen, mit denen gewisse Teile der Lehre Dinglers in gewandelter Gestalt als "protophysikalisches" Programm fortbestehen. Systematische Erörterungen zu diesem Problembereich findet der Leser in Kapitel 10. An dieser Stelle können wir uns damit begnügen, einen vorläufigen Eindruck von den Gedanken zu vermitteln, die in Dinglers Genese der geometrischen Erkenntnis eine besondere Rolle spielen.

Dingler begann seine wissenschaftliche Laufbahn als Assistent an der TH München und war dort seit 1912 als Privatdozent einer der frühesten Vertreter des Faches "Didaktik der mathematischen Wissenschaften" in Deutschland (vgl. dazu H.G. Steiner (1978), S.XXIX). Seine erste größere Publikation zur Geometrie "Die Grundlagen der angewandten Geometrie" (1911) erwähnt im Untertitel "den Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung in den exakten Wissenschaften", ein Thema, auf das Dingler in seinen späteren Arbeiten immer wieder zurückgekommen ist. Der Begriff 'Erfahrung' bedeutet dabei nicht nur die Summe dessen, was wir durch bloßes sinnliches Wahrnehmen an Umwelteindrücken sammeln können; er bedeutet vor allem auch die <u>durch technische Instrumente und Apparate unterstützte und erweiterte Wirklichkeitserkenntnis</u>.

Bekanntlich ist es dieses Verfahren des Experimentes, dem die Naturwissenschaften seit den Tagen Galileis ihre Erfolge verdanken. Nun erfordert aber gerade der Bau von Instrumenten und Apparaten geometrische Kenntnisse, insbesondere ein Wissen darüber, auf welche Weise man die Grundformen der Geometrie praktisch herstellen kann. Schon das Verfertigen eines Lineals verlangt Kenntnisse über den Inhalt des Begriffs 'Gerade'. Um zu einer brauchbaren Auffassung über die Herkunft dieser Kenntnisse zu gelangen, mußte Dingler zunächst einmal den empiristischen Standpunkt überwinden, wonach die geometrischen Begriffe ausschließlich der Erfahrung (natürlich einer instrumentell noch nicht erweiterten Erfahrung) entspringen. Andererseits bot auch Kants Theorie der reinen Anschauung keine zufriedenstellende Lösung des Anwendungsproblems. Dingler entwickelte daher ein eigenes und neuartiges Konzept der geometrischen Erkenntnis, das in seiner 1933 veröffentlichten Abhandlung "Die Grundlagen der Geometrie" zu einem gewissen Abschluß kam. Bezeichnend für dieses Konzept ist die das Vorwort eröffnende Devise: "Geometrie nicht als Erkenntnis, sondern als Tat ...". Hierdurch erhoffte sich Dingler "zum ersten Male seit Euklid einen Aufbau der Geometrie, in dem dessen Zusammenhang mit dem Realen unmittelbar gegeben ist" (1933, S.5).

Das ist leichter gesagt als getan angesichts der Schwierigkeiten, die sich einer inhaltlichen Auffassung der geometrischen Grundbegriffe in den Weg stellen. Schon Euklid hatte versucht zu definieren, was Punkt, was Gerade oder was Ebene sei. In der späteren Axiomatik, bei Pasch und Hilbert, wird auf solche Erklärungen ganz verzichtet. Denn: erstens erfüllen sie nicht die Anforderungen, die Mathematiker und Logiker gewöhnlich an eine vernünftige Definition stellen; und zweitens werden sie zur Herleitung geometrischer Sätze aus den Axiomen überhaupt nicht benötigt. Da ist es schon besser, man läßt sie ganz aus dem Spiel. Will man indessen über dieses 'Spiel' des Ableitens hinaus die Anwendungsverbundenheit der Geometrie, ihre praktische Nützlichkeit verstehen, so bleibt erheblich mehr zu tun. Nicht selten ist es der bereits früher erwähnte empiristische Standpunkt, der das dabei entstandene Vakuum ausfüllen soll. Natürlich läßt es sich kaum bestreiten, daß wir geometrische Begriffe und Einsichten niemals entwickeln würden, gäbe es keine Erfahrung des Räumlichen und kein Erleben der uns umgebenden Wirklichkeit. Das muß deshalb aber nicht notwendig bedeuten, die Begriffe entstammten dieser Erfahrung und die Geometrie brauchte aus den Komplexen sinnlicher Wahrnehmung gleichsam nur herausgelesen zu werden. Kant hat das in seiner Einleitung zur zweiten Auflage der "Kritik der reinen Vernunft" treffend so ausgedrückt: "Wenn aber gleich alle unsere Erkenntnis mit der Erfahrung anhebt, so entspringt sie darum doch nicht eben alle aus der Erfahrung." Daß dies bis zu einem gewissen Grade dennoch der Fall sei, behauptet die empiristische Erkenntnistheorie.

Eine entscheidende Rolle spielt in diesem Zusammenhang die Frage: Wie wird die empiristische Auffassung mit dem von Helmholtz so beschriebenen Umstand fertig, daß "wir es in der Geometrie stets mit idealen Gebilden zu thun haben, deren körperliche Darstellung in der Wirklichkeit immer nur eine Annäherung an die Forderungen des Begriffs ist, und wir darüber, ob ein Körper fest, ob seine Flächen eben, seine Kanten gerade sind, erst mittels derselben Sätze entscheiden, deren thatsächliche Richtigkeit durch die Prüfung zu erweisen wäre" (1868/1968, S.32f)? Kurzum, wie ist die Schärfe geometrischer Begriffe angesichts der Unvollkommenheit zu erklären, die den Gebilden der Körperwelt anhaftet? Mehr noch: Wieso können wir überhaupt eine solche Unvollkommenheit feststellen, da doch die geometrischen Begriffe ihren Ursprung in eben dieser Körperwelt haben sollen?

Für gewöhnlich beantwortet man diese Fragen vom empiristischen Standpunkt aus durch die Mutmaßung, der Sprung in die Theorie gelinge durch eine Art von 'Abstraktion aus der Wirklichkeit'. N.W. Efimow drückt dies deutlich aus, wenn er sagt: "Die Geometrie operiert mit Begriffen, die aus der Erfahrung als Ergebnis einer Abstraktion von den Gegenständen der realen Welt entstehen, wobei nur einige Eigenschaften der realen Dinge berücksichtigt werden" (1953/1970, S.29). Ebenso hatte schon viel früher Otto Hölder im 3. Teil seines 1924 erschienenen Werkes "Die mathematische Methode" ausführlich die empiristischen Ansichten über die abstraktive Gewinnung der geometrischen Begriffe sowie die Anwendbarkeit der Mathematik im allgemeinen auseinandergesetzt und als "folgerichtig" empfohlen. Ähnliche Vorstellungen sind im übrigen als 'realistische Sicht' der Dinge unter Mathematikern weiter verbreitet als man glaubt.

Beschränken wir uns hier auf eine kritische Prüfung der Abstraktionstheorie, sie scheint ja vorzüglich ins Bild der Mathematik als einer Wissenschaft von abstrakten Objekten zu passen. Was ist aber 'abstrakt', worin besteht der Vorgang der Abstraktion? Gewöhnlich herrschen hierüber nicht gerade klare Vorstellungen. Wenn wir das Zitat nach Efimow aufgreifen, so werden wir sagen: Man spricht über einen Gegenstand in einer Abstraktion, indem man über bestimmte Eigenschaften nicht spricht, gleichgültig, ob er sie besitzt oder nicht.

Wir können dies noch präziser fassen, wenn wir zusehen, wie Gottlob Frege den Zahlbegriff aus dem Begriff der Klasse durch Abstraktion entstehen läßt. Angenommen, wir machen eine Aussage über eine Klasse K von Objekten, etwa Kühen auf der Weide. Dabei sollte auf die Natur der sie bildenden Dinge kein Bezug genommen, d.h. von den Eigenschaften dieser Objekte abgesehen ('abstrahiert') werden. - Beispiel für eine solche Aussage: " K zerfällt in zueinander disjunkte Teilklassen G, H, zwischen denen es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Elemente gibt". - Besteht K aus vier Kühen, so ist die Aussage offenbar zutreffend, und daran ändert sich auch dann nichts, wenn wir K durch eine zu K gleichzahlige Klasse K' ersetzen (von der nur zu fordern ist, daß sich ihre Elemente denen von K umkehrbar eindeutig zuordnen lassen). Das kann man auch folgendermaßen ausdrücken: Das Wahrsein der obigen Aussage über K ist invariant bei Ersetzung von K durch eine gleichzahlige Klasse. Insofern handelt die Aussage gar nicht von der Klasse selbst, sondern von ihrer Anzahl (sie besagt nämlich, daß die Anzahl der Dinge in K gerade ist). Es ist also möglich, von der Anzahl einer Klasse zu reden, ohne den Begriff 'Anzahl' schon zu benutzen. Was man dazu braucht, ist lediglich die Beziehung der Gleichzahligkeit (oder Gleichmächtigkeit), bei deren Definition vom Anzahlbegriff kein Gebrauch gemacht wird. Das ist der von Frege beschriebene Weg, Zahlen aus Klassen zu abstrahieren. Die Methode ist heute in der Mathematik allgemein bekannt unter der Bezeichnung 'Definition durch Bildung von Äquivalenzklassen'.

In unserem Beispiel entspricht der dabei ins Spiel kommenden Äquivalenzrelation die Beziehung der Gleichzahligkeit.

Wir wollen nun die These von der abstraktiven Gewinnung der geometrischen Begriffe so verstehen, als solle die soeben skizzierte Methode der Abstraktion nach einer Äquivalenzbeziehung auf die Geometrie übertragen werden. Nehmen wir als Beispiel den Begriff der Ebene. Wer glaubt, dieser Begriff entstehe durch Abstraktion von den Unvollkommenheiten realer Flächen, muß dann aber erklären, wie wir mit Hilfe einer geeigneten Äquivalenz zwischen Flächen Aussagen über eine Ebene von anderen Aussagen unterscheiden können. Man kann sich nur schwer vorstellen, wie dabei die Bezugnahme auf die jeweils erreichte Realisierungsgüte der Flächen zu vermeiden ist. Ein gelungener Versuch in dieser Richtung ist uns überdies auch nicht bekannt. Dingler hat sich dazu folgendermaßen geäußert:

"Selbst wenn in der Natur eine absolut genaue Ebene vorkommen würde, wären wir nicht einmal in der Lage, dies festzustellen. Würden wir willkürlich eine bestimmte Fläche zur Grundfläche der Geometrie wählen und ernennen, so würden alle 'Unebenheiten' dieser empirischen Fläche in die Definition miteingehen, und ihre Reproduktion könnte nur immer mit jener beschränkten Genauigkeit geschehen, die an der Definitionsfläche vorhanden war. Wenn man meinen sollte, man müsse von jenen Unebenheiten 'abstrahieren', so müssen wir fragen von welchen? Wird diese Frage irgendwie beantwortet, so ist dies nur möglich aufgrund einer Idee, die unbemerkt hinter dieser Antwort steckt." (1955/1969, S.134f).

Eine ähnliche Kritik der empiristischen Theorie hat W. Wundt am Beispiel des Geradenbegriffs formuliert (1921). G.I. Ruzavin, bei dem sich dieser Hinweis findet, bemerkt im übrigen, daß solche Begriffe "durch Idealisierung und nicht durch Weglassen bestimmter Eigenschaften" entstehen (1977, S.21), und hierunter versteht er ganz treffend "eine Art Gedankenexperiment" (S.33).

Woher stammen nun aber die Ideen der Geometrie? Haben wir sie uns in der Art der Platonischen Ideen vorzustellen, die uns angeboren sind und mit deren Hilfe wir die Wirklichkeit erkennen, sofern diese an den Ideen teilhat? Nach Dingler entwickelt der Mensch die geometrischen Ideen aus eigener Kraft anläßlich praktischer Bedürfnisse und aus dem Willen zur eindeutigen Lösung der dabei zu bewältigenden Probleme. Er versteht es, Objekte zu entwerfen und Handlungen zu planen, die bestimmten Zwecken genügen sollen. Dabei bilden sich gewisse Vorstellungen von geometrischen Formen heraus: von Ebenen, Kugeln, Zylindern, Geraden usw. Wer diese Ideen erfassen will, hat nach Dingler auf die Handlungsvorschriften dessen zu achten, der die ihnen entsprechenden Formen praktisch realisiert. Dingler schwebte vor, die jeweiligen Herstellungskriterien in eine wissenschaftliche Sprache zu übersetzen und so zu einem "epistemologisch optimalen" System geometrischer Grundsätze zu gelangen, das die bisherige Axiomatik zumindest teilweise ablöst und überdies eine Art inhaltlicher Festlegung der Grundbegriffe der Geometrie leistet. Die so gewonnenen Grundsätze brauchten dann nicht durch Berufung auf anschauliche Evidenz begründet zu werden, sie wären auch keine willkürlichen Festsetzungen, deren Zweckmäßigkeit sich zufällig zu ergeben scheint und somit unverstanden bleibt. Vielmehr hätte man in ihnen Prinzipien, die unmittelbar zweckorientiert sind und die Rolle eines Bindeglieds zwischen gedanklichem Entwurf und Realität übernehmen.

Der Konjunktiv in diesen Formulierungen erscheint uns angebracht, wenn er auch nicht im irrealen Modus steht. Wer die Schwächen von Empirismus oder Phänomenologie nicht übersieht, gewahrt auch die Vertracktheiten des von Dingler angestrebten Übersetzungsprozesses und all der daraus erwachsenden Probleme. Daß dieser Prozeß eine makellose Formulierung geometrischer Ideen hervorbringe und daß diese Ideen zum vollständigen Aufbau der Geometrie ausreichen, - das alles ist bis zu einem gewissen Grade (noch) frommes Wünschen. Bis zu einem gewissen Grade, und das heißt keinesfalls schlechthin. Bei unserer Arbeit am Dinglerschen Programm haben wir erfahren, wie wenig sich übertriebene Erwartungen erfüllen können, aber auch, wie vieles sich aus den Schwierigkeiten lernen läßt.

6. DIE OPERATIVE INTERPRETATION VON WISSENSCHAFT

> Wir haben die Wahrheit nicht, sondern sie will durch Handeln gewonnen sein.
>
> Hermann Weyl: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft

Bisher haben wir unter anderem eine Vorstellung davon zu vermitteln versucht, wie eine konstruktible Genese der Geometrie in operativer Interpretation auszusehen und was sie zu leisten hat. Denkt man an die hervorragende Rolle, die wir dabei dem Begriff 'operativ' übertragen, so erscheint es als wünschenswert, einmal mehr grundsätzlich zu klären, was wir unter einer operativen Interpretation von Wissenschaft verstehen wollen. Dazu umreißen wir in 6.1 den operativen Standpunkt zunächst ganz allgemein; in 6.2 beschreiben wir seine Rolle innerhalb einer Theorie des Begriffs.

Dabei möchten wir für dieses und zugleich die folgenden Kapitel zu bedenken geben: Wir beanspruchen keinesfalls eine adäquate Auslegung der Dinglerschen Wissenschaftsphilosophie; ebensowenig verstehen wir uns als Anhänger irgendwelcher 'konstruktivistischer' Richtungen. Vielmehr machen wir freien Gebrauch von Gedanken Dinglers, Lorenzens und anderer - allerdings einen Gebrauch mit Bremse. Der Leser kann vorerst nur eine von uns zu verantwortende Auffassung der interpretierenden Geometriegenese kennenlernen. Wir haben uns zwar bemüht, nennenswerte Unterschiede an Ort und Stelle zu klären; voll verständlich wird die Art unseres Auswählens aber erst durch die in Kapitel 10 entwickelte Kritik in eher systematischer Absicht, auf die hier ein für alle Mal hingewiesen sei.

6.1. Der operative Standpunkt

Es gibt zahlreiche Gelegenheiten, bei denen uns Wissenschaftler versichern, sie verträten einen operativen Standpunkt. Wenn dies nicht genauer erläutert wird, so können wir daraus lediglich schließen, daß sie ihre Probleme vor dem Hintergrund festumrissener Verfahrensweisen oder wohlbestimmter Handlungsschemata betrachten möchten. Hier interessiert uns vor allem die erkenntnistheoretisch hochstilisierte Version dieses Standpunktes: Danach sind Begriffe, Ideen und Theorien, kurzum die gesamte Wissenschaft, als etwas unserem Handeln Zugehöriges aufzufassen.

Bekanntlich forderten schon die altgriechischen Geometer zu bestimmten Begriffen (wie Kreis, Lot, Winkelhalbierende usw.) ein Verfahren zur figürlichen Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Diese Art des Operierens ist natürlich sehr speziell und läßt sich nur mit einem höchst beschränkten Teil der Mathematik in Verbindung bringen. Andererseits hat es lange (nämlich bis gegen Ende des 19. Jahrhunderts) gedauert, bis man durch methodenkritische Analysen ein weiteres Feld operativer Grundlagen für Mathematik und Naturwissenschaften erschlossen hatte. An diesen Untersuchungen beteiligten sich Mathematiker, Naturforscher und Philosophen. Stellvertretend nennen wir davon Charles S. Peirce (pragmatische Philosophie), Hermann Weyl (Theorie der symbolischen Konstruktion), Percy W. Bridgman (operationelle Analyse) und nicht zuletzt Hugo Dingler, dessen operative Wissenschaftsmethodik nachhaltig den von P. Lorenzen entwickelten sog. Konstruktivismus beeinflußt hat.

Im folgenden wollen wir nun nicht den Einzelheiten in der geschichtlichen Entwicklung der operativen Sichtweise nachspüren. Stattdessen werden wir ihren systematischen Standort umreißen, auch wenn dabei einige ideengeschichtliche Vereinfachungen in Kauf zu nehmen sind. Daran anschließend entwickeln wir ein klassifizierendes Schema zur Einführung wissenschafts- und alltagssprachlicher Ausdrücke. In ihm lassen sich jene Stellen markieren, an denen bestimmte Arten von Operationen eine Rolle spielen. Damit verfügen wir künftig über ein Raster, das bei einigen späteren Gelegenheiten unsere eigenen Redeweisen präzisieren soll.

Beginnen wir mit der Frage: Wie eignet ein Mensch sich Begriffe an? Wie lernen wir z.B. den richtigen Gebrauch von Wörtern wie 'grün', 'hart', 'gerecht', 'rechtwinklig' oder 'wahrscheinlich'? Man kann das Problem auf zweierlei Weisen verstehen. Psychologisch: Dann geht es um das Verhalten sowie die seelischen Vorgänge, die bei bestimmten Personen mit den betreffenden Lernprozessen verbunden sind. Oder epistemologisch: Dann geht es um die inhaltliche Bestimmbarkeit und den logischen Aufbau der Begriffe für ein erkennendes Wesen. Nur diesen zweiten Aspekt werden wir hier verfolgen. Das bedeutet aber nicht, daß die Frage dann nur noch für die akademische Philosophie interessant bleibt. Vielmehr ist sie auch eine der Grundfragen der Didaktik, sofern diese sich um ein adäquates Verständnis des wissenschaftlichen Denkens bemüht. - Wir umreißen zunächst zwei extreme Versuche, die genannte Grundfrage zu beantworten: Den ersten nennen wir, in Anlehnung an K. Popper, Essentialismus; den zweiten bezeichnen wir als Formalismus (in einem etwas weiteren Sinne als üblich). Schließlich wird der Operationalismus als eine Auffassung verstanden, die teils einen Kompromiß zwischen den beiden Extremen darstellt, teils aber auch neue Gedanken zur Frage des Begriffserwerbs enthält.

Unter Essentialismus verstehen wir die seit Aristoteles in Philosophie und Wissenschaft verbreitete Ansicht, der korrekte (und verständnisvolle) Gebrauch eines Begriffs könne nur mittels einer Definition erreicht werden. Solche Definitionen nannte man in der traditionellen Logik auch Realdefinitionen oder Wesenserklärungen. In ihnen sollen die wesentlichen Eigenschaften und Beschaffenheiten einer Sache (Wesen = lat. essentia) ausgesprochen werden. Zum Beispiel definiert Aristoteles den Begriff 'Mensch' durch 'vernunftbegabtes Lebewesen' - eine alles andere als plausible Erklärung, ganz zu schweigen von der Definitionsbedürftigkeit der genannten Merkmale. Auch Naturforscher zur Zeit Newtons stellten immer wieder die Frage, was denn nun 'eigentlich' Materie, Masse oder Gravitation seien. Es hat sich aber als völlig fruchtlos erwiesen, physikalische Gesetze aufgrund von Wesensdefinitionen der in ihnen vorkommenden Begriffe ableiten zu wollen. Nicht weniger deutlich scheitert die essentialistische Begriffslehre an ganz alltäglichen Beispielen. Was rot oder grün ist, stellen wir nicht fest, indem wir eine Definition der Farben zu Rate ziehen. Und will jemand die Länge eines Regals bestimmen, so benötigt er dazu keine Erklärung über das, was Länge ist, sondern ein Verfahren, mit dem man sie durch Messen ermittelt. In diesem letzten Beispiel zeichnet sich bereits der Grundgedanke ab, der uns aus der Sackgasse des Essentialismus herausführen wird:

Die Bedeutung (das vermeintliche Wesen) eines Begriffs besteht in nichts anderem als den Regeln zu seinem Gebrauch.

Danach ist also das Verstehen eines Ausdrucks ein Gebrauchsverstehen, seine Aneignung die Übernahme einer bestimmten Gebrauchstechnik. Begriffe sind keine Etiketten, die man unabhängig von ihnen bestehenden Bedeutungen aufgeklebt hat. Diese grundlegende These ist schon von Peirce in seiner pragmatischen Sinnkritik angebahnt, von Bridgman in seiner operationellen Begriffsanalyse auf die Naturwissenschaft angewandt und schließlich von der neueren Analytischen Philosophie in aller Breite ausgearbeitet worden. Hierbei spielt vor allem die Sprachspieltheorie Ludwig Wittgensteins eine hervorragende Rolle. Wittgenstein hat diese Theorie entwickelt, um die Vielfalt von Regelarten aufzuweisen, die den Gebrauch von Ausdrücken im alltäglichen Leben und in der Wissenschaft bestimmen können. Hier ist nicht der Ort, auf den Begriff des Sprachspiels näher einzugehen (vgl. dazu die ausgezeichnete Darstellung in K. Wuchterl (1969), bes. S.129ff). Für unsere Zwecke ist aber entscheidend, daß wir in der These 'Bedeutung = Gebrauch' über einen gemeinsamen Rahmen für die formalistische und die operationalistische Begriffslehre verfügen.

Zunächst zum Formalismus. Mit ihm soll natürlich der alte Fehler der essentialistischen Auffassung vermieden werden. Das gelingt auch. Allerdings schüttet der Formalist das Kind mit dem Bade aus: Er beschränkt sich zwar auf das durch Gebrauchsregeln geleistete Begriffsverständnis, doch läßt er dabei nur eine ganz bestimmte Sorte von Gebrauchsregeln zu. Man könnte diese als Regeln zum 'internen' Gebrauch bezeichnen. - Dazu einige Beispiele: In der Geometrie sind die Axiome Hilberts Regeln zum Gebrauch der geometrischen Grundbegriffe. Sie bestimmen aber nur deren Verwendung relativ zueinander; auf Regeln darüber, unter welchen Umständen ein reales Ding als eben, gerade usw. zu gelten hat, wird ganz bewußt verzichtet. Das kann, in gewissen Fällen, methodisch durchaus berechtigt sein. Aus der Perspektive des Didaktikers, der an einem möglichst beziehungsreichen Begriffserwerb interessiert ist, erscheint diese Beschränkung auf interne Gebrauchsregeln jedoch als ein unannehmbarer Verlust an Bedeutungsaspekten im Lernprozeß. Entsprechendes gilt von der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Auch hier bedarf es außer den Rechenregeln noch weiterer Anwendungs- und Bestimmungsregeln für Wahrscheinlichkeiten (über Häufigkeit, Schätzen, Symmetriebetrachtungen und dgl. mehr). Wer solche "Sprachregeln" zum Luxuszubehör mathematischer Begrifflichkeit zählt, der sollte einmal bedenken, welchen Nutzen etwa eine Grammatik von Farbausdrücken hätte, in der 'externe' Gebrauchsregeln fehlen, in der es also gar nicht erst dazu kommt, daß diese Tomate hier rot und jener Rasen dort grün genannt werden können.

Diesem Mangel sucht der <u>Operationalismus</u> abzuhelfen, indem er seiner Bedeutungslehre eine größere Klasse von Gebrauchsregeln zugrunde legt. Vor allem werden dabei auch solche Regeln zugelassen, in denen Beispiele und Gegenbeispiele den Gebrauch eines Ausdrucks mitprägen. Auf jeden Fall kommen nun zusätzliche Regeln in Betracht, die <u>einen Begriff mit seinem potentiellen Anwendungsbereich in Beziehung setzen</u>. Je nach Sachgebiet oder auch Definition der Regelklasse entsteht dann die eine oder andere Spielart des Operationalismus (pragmatisch, intuitionistisch, konstruktiv, behavioristisch usw.); über sie wird in einer historisch-kritischen Studie von J. Klüver (1971) ausführlich berichtet. Hier wollen wir uns auf einige wenige Anmerkungen beschränken, mit denen wir bereits jetzt gewisse Schwierigkeiten des operativen Standpunktes andeuten wollen. Was insbesondere die Geometrie betrifft, so werden sich später noch weitere Probleme dazugesellen.

Dem operativen Standpunkt begegnen wir in der Mathematik vor allem als konstruktivistischer Begründungstheorie von Arithmetik und Analysis. Gerade hier hat man eine Vielzahl von Konstruktionsbegriffen zu unterscheiden, was die Diskussion über den sog. Konstruktivismus natürlich keineswegs erleichtert (siehe K. Mainzer (1972/73)). Im deutschsprachigen Raum hat sich zweifellos die Theorie von P. Lorenzen am meisten bemerkbar gemacht; unter der Devise "Mathematik als Handlung" wurde sie in einer erziehungswissenschaftlichen Dissertation sogar der Mathematik-Didaktik empfohlen (vgl. R. Jeuck (1973)). Wenn man auch die anregenden Einflüsse der von Lorenzen gegründeten Erlanger Schule auf die Philosophie der Mathematik nicht übersehen darf, so ist dennoch grundsätzlich vor einer Überschätzung der operativen Methode zu warnen.

Wir können hier nicht auf Einzelheiten eingehen, wollen aber als kritischen Punkt wenigstens dies anführen: Auch der Konstruktivist hat einen verengten Begriff von Gebrauchsregeln. So wird etwa die Arithmetik vermöge eines bloßen Strichkalküls aufgebaut, der Kalkül selbst aber nicht wieder eigens interpretiert. Vielmehr erscheint er - zugespitzt formuliert - gleichzeitig als Anwendungsfall des durch ihn fundierten Zahlbegriffs. Man wird dabei unterscheiden müssen zwischen einer didaktischen und einer grundlagentheoretischen Beurteilung. Aus didaktischer Sicht liegt in dieser Art der konstruktiven Begründung ein Mangel an Bedeutungsaspekten, bedingt durch den Ausschluß realitätsbezogener "Sprachspiele". Darüber darf man keinesfalls hinwegsehen - schließlich soll ja eine konstruktiv aufgebaute Arithmetik besser zu verstehen sein (und wohl nicht allein für Mathematiker). Der Konstruktivismus enthält also, recht besehen, auch einen didaktischen Anspruch, der allerdings nur sehr bedingt eingelöst werden kann. In der Geometrie sind die Verhältnisse übrigens weitaus günstiger; denn hier bezieht sich das Operieren nicht auf die Bestandteile eines Kalküls, sondern sogleich auf reale Objekte und deren Formen.

Was endlich die grundlagentheoretische Beurteilung anbelangt, so wurden bald nach dem Erscheinen von Lorenzens "Einführung in die operative Logik und Mathematik" (1955) nicht nur formale Mängel kritisiert, sondern auch Bedenken gegen das Verfahren vorgetragen, Figuren durch Kalküle zu erzeugen, ohne dabei inhaltliche Annahmen heranzuziehen und damit eine geeignete Deutung dieser Figuren zu ermöglichen (vgl. z.B. G.H. Müller (1957)). Im Prinzip deckt sich auch diese Kritik mit unserer Behauptung, der Konstruktivismus arbeite mit einem verengten Konzept von Gebrauchsregel. Aber in mindestens demselben Maße tut das ja auch der Formalismus. Eine formalisierte Mengenlehre (oder Analysis) läßt sich axiomatisch durchaus als ein Kalkül vortragen. Doch das allein genügt dem Konstruktivisten nicht zur Rechtfertigung, und er fragt daher nach aufweisbaren Objekten, durch welche die Mengenterme des Kalküls zu deuten sind. Was heißt aber 'aufweisbar'? Die Antwort lautet: konstruierbar, und zwar als Figur eines geeigneten Kalküls. Hier stellt sich natürlich wiederum die Aufgabe, die Wahl dieses Kalküls zu rechtfertigen. Das läßt sich nur erreichen, indem man das Operieren in ihm als sinnhaftes Handeln ausweist. Vielleicht bedarf es dazu dann eines allgemeineren Konzepts von symbolischer Konstruktion, wie es z.B. Weyl für die Mathematik und theoretische Naturwissenschaft (beides als Einheit betrachtet) angedeutet hat (s. Weyl (1949)). Wir wollen aber diese einigermaßen schwierige Problematik (soweit sie die Geometrie nicht betrifft) jetzt und auch später nicht weiter verfolgen.

In den empirischen Wissenschaften geht es ebenfalls darum, bestimmte Begriffe durch geeignete Gebrauchsregeln inhaltlich zu deuten. Wir sahen das bereits am Beispiel des Längenbegriffs, der erst dann einen empirischen Sinn besitzt, wenn man über ein Verfahren zur Messung von Längen verfügt. Berühmt ist Einsteins

Definition der Gleichzeitigkeit: in ihr wird erstmals auf ein Verfahren Bezug genommen, mit dem experimentell zu bestimmen ist, ob zwei Ereignisse gleichzeitig stattfinden oder nicht. Um es genauer zu sagen: Der Relation 'gleichzeitig' wird durch die Angabe eines solchen Verfahrens überhaupt erst eine physikalische Bedeutung verliehen. Der amerikanische Physiker Bridgman empfahl dann Ende der Zwanziger Jahre, möglichst viele und vor allem zentrale Begriffe der Wissenschaft nach diesem Muster zu 'operationalisieren'.

Die Forderung richtet sich in erster Linie auf sogenannte Dispositionsprädikate wie 'wasserlöslich', 'magnetisch' oder auch vergleichbare Begriffe der Psychologie und der Sozialwissenschaften. Ein eher schon berüchtigtes Beispiel ist die Erklärung, Intelligenz sei das, was ein Intelligenztest mißt. Bekannt sind auch die Versuche, die man in der Pädagogik unternommen hat, um Lernziele durch Testvorschriften für das Endverhalten der Lernenden operational zu fassen. Allerdings läßt sich dieses Programm leichter verkünden als verwirklichen, denn im Unterschied etwa zur Naturwissenschaft hat man hier verstärkt darauf zu achten, daß die Willkür beim Festlegen der Operationen auf ein Mindestmaß beschränkt bleibt. Gleichwohl hat der Operationalismus auch ohne diese Probleme noch seine Klippen. Nennt man einen Gegenstand wasserlöslich, wenn er sich bei Hineingabe in Wasser auflöst, so zeigt eine genauere Analyse, daß der so definierte Begriff zu weit ausfällt (er kommt nämlich auch sämtlichen nie ins Wasser gegebenen Objekten zu). Natürlich haben Wissenschaftstheoretiker diese Inadäquatheit zu beseitigen versucht. Sie sind dabei aber auf immer neue Probleme gestoßen, was letzlich zu einer Revision und teilweisen Einschränkung des operativen Standpunktes geführt hat (vgl. dazu die ausführliche Schilderung der wissenschaftstheoretischen Gedankengänge bei W. Stegmüller (ab 1969), Bd. II, S.211ff).

6.2. Elemente einer Begriffslehre

Wir entwerfen nun ein begriffstheoretisches Raster mit den für unsere Zwecke (der Geometriegenese) wichtigen Elementen einer operativen Wissenschaftsinterpretation. Die so gewonnene Begriffslehre systematisiert zwar einige Einsichten, die den soeben durchgeführten Überlegungen zu entnehmen sind, sie beansprucht jedoch keineswegs Gültigkeit für den gesamten Bereich wissenschaftlicher Begriffsbildung.

Das Problem, mit dem wir es zu tun haben, läßt sich knapp als die Aufgabe kennzeichnen, prädikative Ausdrücke (Prädikate) in die Sprache des Alltags oder der Wissenschaft einzuführen. Dabei spielt es keine Rolle, ob die betreffenden Ausdrücke einstellig (wie z.B. 'grün', 'magnetisch', 'eben') oder mehrstellig (wie z.B. 'schwerer als', 'kongruent', 'liegt zwischen') sind. - Bei aller Kritik am

Operationalismus halten wir an dem Grundgedanken fest, wonach die Bedeutung eines Begriffs durch die Regeln zu seinem Gebrauch bestimmt wird. Wir hatten bereits vorläufig unterschieden zwischen einem 'internen' und einem 'externen' Gebrauch. Dem soll nunmehr die Unterscheidung intensionaler von extensionalen Bestimmungen entsprechen. Die intensionalen Bestimmungen eines prädikativen Ausdrucks sind grammatischer Natur und betreffen ausschließlich seine Verwendung relativ zu anderen Ausdrücken. Hingegen wird in seinen extensionalen Bestimmungen stets Bezug auf einen Bereich von Objekten genommen, auf die das Prädikat zutrifft oder nicht. Diese Unterscheidung steht in Einklang mit der inzwischen eingebürgerten wissenschaftstheoretischen Terminologie, in der mit den Begriffen 'Intension' und 'Extension' das präzisiert wird, was die traditionelle Logik 'Begriffsinhalt' bzw. 'Begriffsumfang' nannte (vgl. dazu W.K. Essler (1972), S.103ff).

Betrachten wir nun die Sache im Detail. Ein wichtiger Sonderfall der intensionalen Bestimmung sind die in der Mathematik gebräuchlichen Nominaldefinitionen. Dabei wird ein Prädikat, etwa ein einstelliges Symbol P, dadurch eingeführt, daß man in der jeweils zugrunde liegenden Sprache eine Bedingung formuliert, die ein Ding x genau dann erfüllen muß, wenn $P(x)$ (gelesen: x ist P) gelten soll. Ganz entsprechend ist das Vorgehen bei mehrstelligen Ausdrücken: z.B. definiert Euklid für Geraden den Ausdruck 'x parallel zu y' durch die Bedingung 'Es gibt keinen Punkt, der sowohl auf x als auch auf y liegt'. - Die Nominaldefinitionen haben einen bemerkenswerten Vorteil gegenüber allen anderen Arten intensionaler Bestimmungen: Sie sind eliminierbar, d.h. eine Aussage, die den neu definierten Ausdruck enthält, läßt sich stets in eine Aussage der alten Sprache umformen; man hat dazu bloß anstelle von $P(x)$ die definierende Bedingung für x zu setzen. Insbesondere läßt sich so aus jeder geometrischen Aussage das Wort 'parallel', wenn nötig, wieder entfernen.

So unentbehrlich die (nominellen) Definitionen für den Aufbau vor allem deduktiver Theorien sind, sie haben dennoch den Nachteil beschränkter Anwendbarkeit. Wie wir gesehen haben, braucht man für jede Definition eine definierende Bedingung und damit auch wieder prädikative Ausdrücke (bei deren Definition sich diese Folge wiederholt). Man kann also nicht alles definieren. Wie hilft man sich? Sind etwa $P_1, \dots, P_n$ undefiniert gebliebene Prädikate, so wird ihr Gebrauch gewöhnlich durch ein Regelsystem $\mathfrak{R}[P_1, \dots, P_n]$ näher bestimmt. In der Mathematik hat $\mathfrak{R}$ häufig die Form eines Axiomensystems, z.B. Hilberts Geometrie (vgl. dazu unsere Ausführungen zum Thema 'implizites Definieren' in 5.1). Einen Spezialfall hiervon bilden klassifizierende Regelsysteme, für die bereits antike und scholastische Logiker eine besondere Vorliebe besaßen.

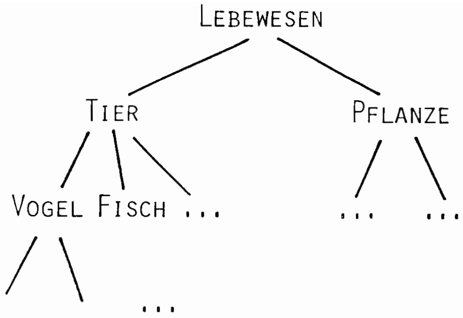


Abb.181

Mit einem solchen Schema (Abb.181) läßt sich eine Fülle von Regeln übersichtlich darstellen. So entnimmt man der Stellung des Prädikates 'Vogel' die Vereinbarung, daß jedes Ding, dem man das Prädikat 'Vogel' zugesprochen hat, auch Tier genannt werden kann - als Regel notiert: x ist Vogel $\Longrightarrow$ x ist Tier. - Das Schema enthält aber auch die Regel: x ist Vogel $\Longrightarrow$ x ist nicht Pflanze. - Wir wollen hier die Frage ausklammern, wie derartige Systeme von Übergangsregeln zu gewinnen seien. Für unsere Zwecke genügt es, wenn wir sie als eine mögliche Form intensionaler Begriffsbestimmung ansehen. Wenn z.B. Biologen übereinkämen, Viren den pflanzlichen Lebewesen zuzurechnen, so müßten sie das durch die Regel ' x ist Virus $\Longrightarrow$ x ist Pflanze' zum Ausdruck bringen. Man beachte: diese Regel stellt weder ein Naturgesetz dar noch handelt es sich bei ihr um eine Definition von 'Virus'. Vielmehr würde durch sie lediglich eine vorläufige, aufgrund späterer Befunde durchaus revidierbare Vereinbarung für einen Ausschnitt des praktischen Gebrauchs getroffen.

Der Vollständigkeit halber wollen wir nun noch skizzieren, wie man sich nach Lorenzen (1965/1968) den Übergang von prädikativen Ausdrücken zu Begriffen vorzustellen hat. Dazu nehmen wir $\mathfrak{R}[P,Q,\ldots]$ als ein Regelsystem an, aus dem sich für die (ohne Einschränkung einstellig vorausgesetzten) Prädikate P, Q die Regeln

$$P(x) \Longrightarrow Q(x),$$
$$Q(x) \Longrightarrow P(x),$$

ableiten lassen. In diesem Falle nennt man die beiden Prädikate P und Q synonym (sinngleich) bezüglich des Systems $\mathfrak{R}$. Die Synonymität von Prädikaten ist eine Äquivalenzrelation, und die mit ihr zu leistende Abstraktion (nach dem in 5.5 beschriebenen Muster) führt uns von Prädikaten zu Begriffen. Genauer heißt dies folgendes: Bestimmte Aussagen über ein Prädikat P lassen sich auffassen als Aussagen über 'den von P repräsentierten Begriff'; und zwar ist dies genau dann der Fall, wenn P stets durch ein beliebiges zu P synonymes Prädikat Q ersetzt werden kann, ohne daß sich dadurch der Wahrheitswert der betreffenden Aussage ändert. "Durch die Abstraktion wird das System von Prädikaten zu einem Begriffssystem. Die konstituierenden Regeln des Begriffssystems mögen daher 'Begriffsbestimmungen' heißen" (Lorenzen, S.36). Es handelt sich aber wohlgemerkt um intensionale Begriffsbestimmungen, die für sich betrachtet noch nicht zur Rede von einer operativen Begriffslehre berechtigen (es sei denn in dem viel zu weiten Sinne, den auch der Formalismus für sich beanspruchen darf).

Erst mit den extensionalen Bestimmungen können wir den Anspruch des operativen Standpunktes befriedigen, Begriffe als etwas unserem Handeln Zugehöriges einzuführen. Denn Handeln meint jetzt nicht bloß ein formelles Hantieren mit Wörtern, sondern ein praktisches Tun, das die Wörter mit realen Dingen verbindet. Auch dies geschieht durch Regeln. Deren Aufgabe besteht darin, einen prädikativen Ausdruck P durch Angabe eines Objektes a mit P(a) (teilweise) zu bestimmen. Dazu eignen sich mindestens zwei Verfahren: die <u>Exemplifikation</u>, bei der auf Beispiele a für P in Wort oder Tat <u>verwiesen</u> wird; und die <u>Realisation</u>, bei der solche Beispiele nach mehr oder weniger ausdrücklich gegebenen Handlungsvorschriften <u>praktisch</u> <u>hergestellt</u> werden.

Die Exemplifikation (von Lorenzen "exemplarische Einführung" genannt) spielt eine überragende Rolle im begrifflichen Denken. Ein Prädikat wie 'grün' läßt sich nicht erklären; stattdessen zeigt man Kindern einen Apfel und sagt dabei 'grün'. Sie werden schließlich durch entsprechende Hinweise auch davon abgehalten, Tomaten oder andere nicht-grüne Gegenstände grün zu nennen. Außer durch solche <u>ostensiven</u> Gebrauchsregeln lassen sich Beispiele und Gegenbeispiele auch <u>verbal</u> anführen ('Dein Löffel gehört zum Besteck, aber deine Tasse gehört zum Geschirr' usw.). Bekanntlich beschränkt sich jedoch die Bedeutung von Beispielen keineswegs auf die frühen Stadien sprachlich-begrifflicher Entwicklung. Das beweist gerade die Herausbildung abstrakter mathematischer Begriffe. Selbst dann, wenn diese Begriffe nominell definiert werden können (wie z.B. 'Vektorraum' oder 'Gruppe'), haben Beispiele nicht eine bloß illustrative Aufgabe. Vielmehr ist ein gutes Beispiel immer auch ein <u>führendes</u> <u>Beispiel</u>, d.h. es ist konstitutiv für die Aneignung des Begriffs, indem es dessen allgemeine Verwendungsweise 'durch das Besondere hindurch' sichtbar werden läßt. (Daher ist z.B. ein Sammelsurium aus endlichen Gruppen noch lange keine brauchbare exemplarische Grundlage für den Gruppenbegriff.)

Der Gedanke ist schon alt, bereits Aristoteles entfaltet ihn in seinen "Analytica posteriora" als das Prinzip des Heranführens (= gr. epagoge), das von M. Glatfeld und E.C. Schröder (1977) ganz zu Recht als Konzept einer "didaktischen Induktion" in Wittgensteins Theorie der von Paradigmen geleiteten Sprachspiele eingeordnet wurde (vgl. dazu auch Schreiber (1979b)). Zu erwähnen ist hier ebenfalls die Pädagogik M. Wagenscheins. Sie führt auf das Problem exemplarischer Gegenstände im mathematischen Unterricht, mit dem sich G. Becker (1971) eingehend auseinandersetzt.

Zum Thema 'Exemplifikation' gehört schließlich auch noch die Funktion der Gegenbeispiele. Aus der historischen Genese sind sie nicht wegzudenken: gerade das Studium der Fälle, in denen sich ein Begriff nicht wie gewohnt anwenden läßt, ebnet häufig künftigen, erweiternden Begriffsbildungen den Weg. (Man denke nur an die Tatsache, daß die Lösungsformel für quadratische Gleichungen nicht immer eine reelle Wurzel liefert, oder daran, daß manche Funktionen kein Riemannsches Integral besitzen, und dgl. mehr.) Zweifellos ist das Potential begriffserzeugender Kräfte, das in gewissen führenden Gegenbeispielen schlummert, bislang didaktisch noch viel zu wenig genutzt worden.

Gewiß zeigen alle diese Bemerkungen, wie bedeutsam und unentbehrlich die Exemplifikation für die Begriffsbildung insgesamt ist. Ihren wirklichen Nutzen entfaltet sie freilich erst dann, wenn man sie nicht überschätzt oder überstrapaziert. Bei weitem nicht jeder Begriff läßt sich durch ostensiven oder verbalen Beispielaufweis inhaltlich näher bestimmen, und auch dort, wo dies geht, ist es noch lange nicht immer sinnvoll. Was Primzahlen sind, könnte man Schüler wohl erraten lassen, indem man ihnen eine nach der anderen vorsetzt. Schüler sind durch Quizspiele leicht zu begeistern, und so wird die Definition möglicherweise sogar bald getroffen. Das zeigt aber gerade, daß wir es dabei gar nicht mit einer extensionalen Begriffsbestimmung zu tun haben (jedenfalls nicht in ihrer hauptsächlichen Funktion der Einführung nicht nominell zu definierender oder wenigstens abstrakter Prädikate). Ernster zu nehmen sind da schon Probleme, die mit der Einführung bestimmter physikalischer Begriffe (wie Masse, Kraft, elektrisches Feld usw.) verbunden sind. Hier kann das Exemplifizieren gar keine oder doch nur eine höchst bescheidene Rolle spielen. Niemand entwickelt den Begriff 'Elektron', indem er einige Elektronen von allen Seiten betrachtet und allmählich von Nicht-Elektronen unterscheiden lernt. Den Begriff 'Elektron' eignet sich vielmehr nur an, wer zugleich in eine ganze Theorie, etwa das Bohrsche Atommodell, einzudringen versucht. Entsprechendes gilt von Begriffen wie 'Masse', 'elektrisches Feld' usw.

Eine denkwürdige Grenze exemplifizierenden Vorgehens zeigt sich ferner in der Begriffslehre Lorenzens. Dort wird nämlich nicht nur behauptet, der Gebrauch des Regelpfeils '$\Longrightarrow$' könne praktisch eingeübt werden (was man ja wohl als schlichte Tatsache ansehen darf). Als zweistelliges Prädikat aufgefaßt soll '$\Longrightarrow$' auch exemplarisch einzuführen sein. Diese Ansicht erweist sich aber als überaus fragwürdig (vgl. dazu Schreiber (1978a)).

Nicht weniger als über Begriffe der Physik stolpert die Beispielmethode über solche der Geometrie. Die dabei entstehenden Schwierigkeiten machen es erforderlich, daß wir mit der Realisation eine weitere Art von extensionaler Bestimmung ins Auge fassen. Gewiß werden einem eine ganze Reihe geometrischer Begriffe durch Exemplifikation vertraut. Was 'innen' und 'außen' bedeutet, erfassen auch kleine Kinder mühelos und bald bewußt im Umgang mit Schachteln oder Kreidefiguren auf dem Gehsteig. Ebenso leicht wird am konkreten Bild begriffen, wann Punkte mit einer Geraden inzidieren, wann sie zwischen zwei Punkten einer Geraden liegen und ähnliches mehr. Aber ausgerechnet bei den Punkten, Geraden und Ebenen selbst beginnt eine Schwierigkeit, der sich durch Beispiele nicht mehr angemessen beikommen läßt. Man kann natürlich einen Tisch hernehmen und auf seine Ecken, Kanten und Oberfläche verweisen. Vielleicht gewinnt ein Schüler daran auch Erkenntnisse wie die, daß zwei Punkte eine Gerade, drei nicht-kollineare Punkte eine Ebene festlegen, oder daß der Schnitt zweier verschiedener Ebenen stets eine Gerade ist. Dagegen wollen wir hier gar nichts einwenden. Allerdings ist es unsere Meinung (eine Meinung, die uns überhaupt erst zum Schreiben dieses Buches veranlaßt hat), daß erkenntnistheoretisch wie didaktisch gesehen die genannten Bestimmungen bei weitem nicht ausreichen.

Das Argument ist denkbar einfach: Die zur Exemplifikation der Grundbegriffe herangezogenen Grundformen sind ja strenggenommen überhaupt keine Beispiele (sondern nur Näherungen). Ferner handelt es sich bei ihnen zumeist gar nicht um naturwüchsige Dinge, sondern um planmäßig hergestellte Objekte. Den Herstellungsvorgang wollen wir Realisation nennen. Allgemein besteht die Bestimmung eines Prädikates P durch Realisation darin, daß ein Ding a hergestellt wird, für das P(a) (zumindest annährungsweise) gilt; dabei hat man sich an mehr oder weniger präzise Handlungsvorschriften zu halten. Der fragliche Begriff wird also in hohem Maße von solchen Regeln bestimmt. Insbesondere gilt das für geometrische Grundformen. Die Konsequenz hieraus kann nur lauten: Bedeutungsaspekte und inhaltliches Wissen, die durch Realisierungsvorgänge in geometrische Begriffe eingehen, sind sowohl erkenntniskritisch wie im Rahmen der Begriffsgenese zu thematisieren. Zu solchen Inhalten zählen nicht allein die Handlungsschemata jener Realisationen, sondern in der Regel auch Ziele und Zwecke, auf deren Erfüllung die Handlungen sich richten. Das ist die Pointe des von uns durchgängig benutzten operativen Standpunktes.

Wir fassen unsere Ausführungen zur operativen Interpretation von Wissenschaft in einer Übersicht (Abb.182) zusammen (der Leser wird darin ohne Mühe ein Regelsystem für den Gebrauch der bisher entwickelten epistemologischen Ausdrücke erkennen).

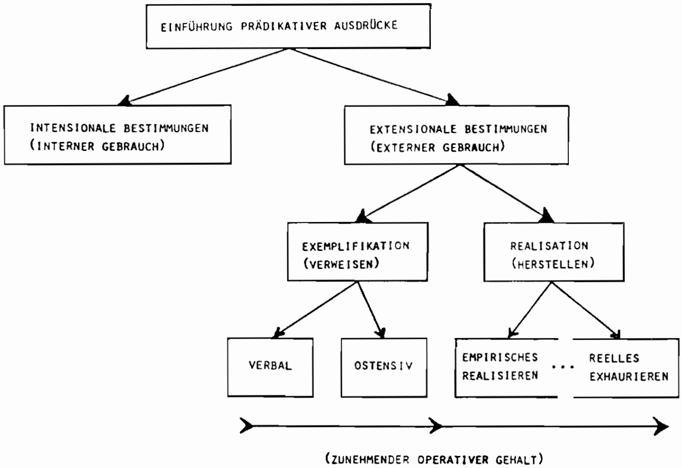


Abb. 182

Es bedarf hier noch eines wichtigen Zusatzes. Das Schema enthält nämlich eine Unterteilung der Realisation in empirisches Realisieren und reelles Exhaurieren, wobei noch mögliche Zwischenstufen angedeutet sind. Damit hat es folgende Bewandtnis: Das Realisieren wird durch Handlungsvorschriften geleitet. Wie wir in den weiteren Abschnitten sehen werden, sind diese Vorschriften nicht gleichermaßen deutlich.

Sind sie so präzise wie z.B. bei der Realisation von Ebenen und gewissen anderen geometrischen Grundformen, so sprechen wir von einer reellen Exhaustion. (Dieser Begriff wird noch ausführlich in Kapitel 9 erörtert werden.)

Nehmen wir aber z.B. den Begriff der Orthogonalität. Eine im Unterricht gern geübte Methode besteht darin, daß die Schüler einen rechten Winkel mittels Papierfalten selbst erzeugen. Darin liegt etwas qualitativ Neues gegenüber einer bloßen Exemplifikation (z.B. durch Verweis auf Pflanzenwuchs oder Hausbau). Die Schüler müssen nämlich jetzt bewußt dafür sorgen, daß die beim zweiten Falten des Blattes entstehenden Winkelfelder zur Deckung kommen. Damit geht eine zunächst hinreichend gut präzisierte Herstellungsvorschrift in den Begriff des rechten Winkels ein. Es geht aber noch mehr ein, z.B. das zur Realisation unerläßliche Deformationsverhalten des Papiers. Als vom Lernenden nicht selbst verantworteter Teil der Realisation kann es ihm allerdings erst nachträglich und bisweilen viel später bewußt werden. (Dasselbe gilt im Prinzip auch für die Herstellung längeninvarianter Maßstäbe oder sonstiger starrer Körper.) Ein gewisses Problem werfen hier nun die Handlungsvorschriften auf. Fraglich ist nicht, ob es sie gibt - die betreffenden Materialeigenschaften werden ja in der Praxis zumeist hinreichend gut realisiert. Allerdings scheinen die dabei leitenden Vorschriften weniger deutlich greifbar, schwieriger explizierbar zu sein, als dies beim reellen Exhaurieren geometrischer Grundformen der Fall ist. Vielleicht rührt dies daher, daß man, was zu realisieren ist, schon leichter im rein empirisch Gegebenen selbst vorfindet: Eine gute Ebene läßt sich nur durch langwieriges Bearbeiten von Körpern gewinnen; für hinreichend deformationsarmes Material hat man hingegen bloß einige Dinge vom Boden aufzulesen. Von jener unterscheiden wir daher diese etwas schwächer ausgeprägte Form des Operierens als empirisches Realisieren. Bis hin zur reellen Exhaustion besteht wohl ein nur gradweiser Übergang.

Indes ist empirisches Realisieren im allgemeinen etwas anderes als die Exemplifikation. Denn während ein Beispiel stets zum jeweiligen Begriff passen muß, sind den Begriff realisierende Objekte zumeist prinzipiell unvollkommen und als Glieder in einem unabschließbaren Prozeß der Verbesserung anzusehen. Hierin liegt auch der tiefere Grund dafür, daß sich geometrische Grundbegriffe wie 'Punkt', 'Gerade' und 'Ebene' durch Exemplifikation niemals angemessen einführen lassen. Liegt ein Punkt zwischen zwei anderen, so gibt es keine Gradunterscheidung für diese Zwischenlage: sie besteht oder sie besteht nicht. Dagegen sind die Ecken, Kanten und Flächen eines Tisches stets mehr oder weniger gut realisierte Punkte, Geraden und Ebenen. Daran würde auch die Verwendung noch so guter Realisierungsverfahren nichts ändern.

7. DIE IDEE DER HOMOGENITÄT

> In den Wissenschaften ist es höchst verdienstlich, das unzulängliche Wahre, was die Alten schon besessen, aufzusuchen und weiter zu führen.
>
> Goethe: Maximen und Reflexionen

7.1. Herkunft und epistemologisches Verständnis

Dingler kommt das Verdienst zu, die bedeutsame Rolle erkannt zu haben, die der Gedanke der Ununterscheidbarkeit in einer wirklichkeitsbezogenen Genese geometrischer Begriffe notwendigerweise spielen muß. Wer z.B. eine möglichst ebene Fläche herstellen will, folgt nach Dingler der "Idee einer Lauffläche, welche so beschaffen ist, daß ihre beiden Seiten weder im Ganzen noch in einem beliebig kleinen Stück ... eine angebbare Verschiedenheit aufweisen, und so, daß ein kleines und ein größeres Stück ... keine angebbare Verschiedenheit aufweisen" (1933, S.10). Wir können die Idee der Ununterscheidbarkeit in der Geometrie wohl über Leibniz bis zu Euklid und sicherlich noch weiter zurückverfolgen. Doch besitzen diese Denker nicht die operative Sicht - die Ununterscheidbarkeit der Stellen einer Ebene erscheint bei ihnen eher als anschauliche Erkenntnis und nicht, wie bei Dingler, als eine Forderung an einen herzustellenden Gegenstand, als eine menschliches Wirklichkeitsgestalten leitende Idee.

Gleichwohl ist es interessant zu sehen, inwieweit ältere Fassungen der Idee mit der von Dingler angegebenen übereinstimmen. Beispielsweise nennt Leibniz die Ebene "eine innerlich gleichförmige, in all ihren Teilen ähnliche Fläche" (zit. nach den von E. Cassirer herausgegebenen "Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie" (1904), Bd.I, S.59). Vermutlich lehnt Leibniz sich hier an Euklid an, der das Buch I seiner Elemente u.a. mit folgenden Definitionen einleitet: "Eine ebene Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt. Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt."(Es handelt sich um Definition 7 und 4, zit. nach O. Becker (1964a), S.88.) Auch den rechten Winkel definiert Euklid in diesem Stil, nämlich durch die Forderung, daß er von seinem Nebenwinkel ununterscheidbar sein soll. - Wir erwähnen diese Beispiele nicht bloß wegen ihres historischen Interesses, sondern auch deshalb, weil ein bestimmter in ihnen bemerkbarer Unterschied später noch eine Bedeutung bei dem Versuch erlangen wird, die Idee der Ununterscheidbarkeit für die geometrischen Formen zu präzisieren. Bei der Ebene etwa handelt es sich darum, daß Leibniz und Dingler von der Ununterscheidbarkeit ihrer zweidimensionalen Teile zu reden scheinen, Euklid sich jedoch auf die in ihr verlaufenden Geraden bezieht. Zudem ist es auch möglich, die Ununterscheidbarkeit in den Punkten der Fläche zu verlangen, wie P. Lorenzen dies tut. Welcher Weg der geeignete ist, werden wir im Verlaufe der weiteren Überlegungen erörtern.

Fragen wir aber zunächst einmal nach Herkunft und erkenntnistheoretischem Status des Ununterscheidbarkeitsgedankens: Welches ist seine Quelle? Als was haben wir ihn anzusehen? Man kann die Herkunftsfrage von zwei Seiten her angehen, einer objektiven und einer subjektiven. Nach Dingler hat die subjektive Seite Vorrang, doch tut man gut daran zu bedenken, daß es sich um verschiedene Seiten ein und derselben Sache handelt (wenn es auch schwer fällt zu sagen, welcher Sache).

Da ist zuerst die Sphäre der Wahrnehmungen, in der uns eine Fülle von Phänomenen anzuregen vermögen: die Symmetrien bei Pflanze und Tier; periodische Erscheinungen, in denen sich Gleiches oder Ähnliches wiederholt; die glatte Oberfläche eines windstillen Sees und dgl. mehr. Diese Anregungen von objektiver Seite spielen eine gewisse Rolle, man sollte sie aber nicht überschätzen. Wer hunderte Male eine glatte Wasseroberfläche beobachten konnte, hat deshalb noch nicht die Idee der Ebene. Häufung der Fälle schafft noch keinen Begriff. Was hinzukommen muß, ist ein Motiv, gleichsam als eine Mitgift des Subjekts.

Um gleich den Ursprung der Motivation anzudeuten, spricht Dingler vom Willen. Für ihn ist es nicht das Problem, ob wir uns etwa eine ebene Fläche vorstellen können, sondern "daß wir den Willen fassen können, eine solche Fläche so gut als möglich herzustellen" (1933, S.11). Man könnte daran denken, diesen Willen noch näher zu erklären, z.B. durch Nützlichkeitserwägungen oder anhand einer psychologischen Theorie. Die Nützlichkeit von Handlungen wird überall im Alltag erwogen. Wozu brauchen wir schließlich ebene Flächen? Doch wohl zum Bauen von Häusern oder Straßen, zum Herstellen von Gebrauchsgegenständen wie Tischen oder Spiegeln. Nun bedarf es auch zu diesem Tun abermals einer Willensentschließung. Dingler geht deshalb dazu über, den Willen als das subjektive Prinzip der Wissenschaftsgenese anzusehen. Wille ist für ihn ein Prinzip, weil wir nicht fragen können, warum wir etwas wollen, ohne immer wieder auf frühere Willensentscheidungen zu treffen. Auch psychologische Erklärungsversuche lehnt Dingler ab. Ein Versuch, psychische oder psychophysische Gründe für Willensentschlüsse aufzuweisen, mag für sich betrachtet wohl aufschlußreich sein, er verstößt jedoch gegen das Prinzip der pragmatischen Ordnung, weil "kausal erklärende psychologische Konstruktionen erst einen späteren logischen Ort im Aufbau des Systems der Wissenschaft haben und haben können" (1933, S.11). Das mindert auch den Wert eines solchen Versuchs für das Verständnis der finalen Struktur, die wir in Kapitel 5 als Kennzeichen konstruktibler Genesen erkannt hatten. Man erinnere sich etwa an die dort geschilderte Verlegenheit, in die Piaget mit seiner Theorie angesichts des Problems der Motivation gerät.

Bei allem, was dafür spricht, den Willen als eine vergleichsweise autonome Instanz im Kontext der Ideenbildung anzuerkennen, wollen wir ihn aber dennoch nicht zu einem für alles zuständigen metaphysischen Popanz aufblasen. Als Grundlage unserer Untersuchungen benötigen wir nicht den Boden - oder Bodensatz - einer voluntaristischen Weltanschauung. Wir begnügen uns damit, eine einfache, aber grundlegende Konsequenz hinsichtlich des erkenntnistheoretischen Status der (geometrischen) Ideen zu ziehen:

Ideen sind bewußt und willentlich gefaßte Zielbilder menschlichen Handelns.

Damit unterscheiden sie sich von dem, was Platon oder Kant unter Idee verstanden haben. Ideen sind für Platon selbständig existierende Urbilder der Dinge; für Kant sind sie Begriffe, die der menschlichen Vernunft entspringen, aber ohne gegenständliches Substrat bleiben. Setzen wir anstelle einer unpersönlichen Vernunft eine leibbegabte ('inkarnierte') Intelligenz, die die Welt, ihre Umwelt, nicht allein betrachtet, sondern sie auch erschließt, in sie eingreift und sie nach ihren Bedürfnissen formt, so haben wir einen neuen Begriff von 'Idee' aus operativer Sicht: wir sehen dann ihre eher instrumentelle Natur, ihren Entwurfscharakter. Wir werden nicht soweit gehen, ein Ausrufungszeichen etwa an die Idee der Ebene zu setzen, um in ihr die Aufforderung zur Herstellung von ebenen Flächen zu erblicken. Der postulatorische Sinn der Idee beinhaltet keine Aufforderung, sondern eine Anforderung. <u>Wenn</u> jemand eine Fläche ebnen möchte, <u>dann</u> hat er diese ideelle Anforderung zu beachten.

Bevor wir uns der Aufgabe zuwenden, die Ununterscheidbarkeitsforderung genauer zu verstehen und soweit wie möglich auch formal zu fassen, ist noch eine apologetische Vorbemerkung am Platze: Wir sehen in der Präzisionsbedürftigkeit dieser Idee noch keinen grundsätzlichen Mangel, der es rechtfertigen könnte, sie mit anderen noch ungeklärten Begriffen über Bord zu werfen. Wollte man durchweg so vorgehen, so würde man die Entwicklung des mathematischen Denkens langsam, aber sicher paralysieren. Es gäbe heute keine Analysis, wenn man sich nicht geraume Zeit über die Vagheiten im Stetigkeitsbegriff oder die Unsicherheiten in Konvergenzfragen hinweggesetzt und die damit verbundenen Probleme der logischen Analyse und Explikation nicht immer wieder zu lösen versucht hätte. Wissenschaft beginnt eben nicht erst da, wo wir ein fertiges System von Definitionen, Axiomen und Theoremen vorgesetzt bekommen. Gewiß, ein großer Teil wissenschaftlicher Probleme hat die Form von Rätseln, die im Rahmen definitorisch abgeklärter Systeme formuliert werden. Solche Probleme sind selbst dann anerkannt, wenn sie - wie z.B. das inzwischen wohl gelöste Vierfarbenproblem - nicht unmittelbar praktisch bedeutsam sind. Eine andere nicht minder wichtige, doch gelegentlich umstrittene Sorte von Problemen betrifft Fragen der Begriffs- und Theorienbildung selbst. Nehmen wir beispielsweise die von Paul Dirac intuitiv eingeführte Deltafunktion, die vielen Mathematikern solange anrüchig vorkam, bis Laurent Schwartz in jener vielzitierten "Anstrengung des Begriffs" ihre Explikation im Rahmen der von ihm neugeschaffenen Distributionentheorie gelang. Seine Aufgabe bestand nicht im Lösen eines wohldefinierten Rätsels, sondern darin, der Mathematik neues begriffliches und methodisches Terrain zu erschließen. Es gibt wohl keinen ernstzunehmenden Mathematiker, der diese Leistung nicht anerkennen würde.

Hinterher ist das leicht. Aber da, wo ein Erfolg noch nicht greifbar nahe liegt, z.B. in den Grundlagen der Mengenlehre oder der Geometrie, bedarf es einer gewissen Überwindung, um einige der anstehenden Explikationsprobleme (den Mengenbegriff bzw. die geometrischen Grundbegriffe betreffend) überhaupt als sinnvolle Forschungsaufgaben der Mathematik anzuerkennen. Hier ist man nicht allein durch den Komfort bereits kalkülisierter Systeme verwöhnt; man neigt auch - vor allem in der Grundlagentheorie - zu einem merkwürdigen puristischen Gebaren und schiebt die Fragen, die eigentlich den Mathematiker und Logiker interessieren sollten, auf philosophisches oder weltanschauliches Gebiet. Auf die Dauer kann den Fragen diese Art der Behandlung nicht gut bekommen. Der Grundlagentheoretiker Georg Kreisel hat sie als einen "Impotenzkult" gegeißelt; sie scheint also auch dem um die Begriffsprobleme bemühten Logiker nicht sonderlich gutzutun. Statt solcher Formulierungen möchten wir empfehlen, angesichts vager Begriffe nicht Verzicht zu predigen, sondern ihre Herausforderung anzunehmen.

Herausforderung statt Verzicht! Verfolgen wir die pädagogischen Aspekte der Angelegenheit noch für einen Augenblick weiter. H. Meschkowski hat in mehreren seiner Bücher darauf hingewiesen, daß die Versuche Euklids zur Definition der geometrischen Grundbegriffe unzulänglich seien. Dem muß man zustimmen; ebenso wie seiner Forderung, eine mit Zeichengeräten geübte geometrische Propädeutik dürfe "nicht das letzte Wort der Schule zu den Grundlagenfragen der Geometrie sein" (1965, S.64). Zu Recht verlangt Meschkowski auf höherer Stufe auch eine Behandlung der "Frage nach dem Wesen der geometrischen Grundgebilde, nach den Definitionen und der Möglichkeit des axiomatischen Aufbaus" (S.64). Leider entsteht aber der Eindruck, als solle der Standpunkt der Hilbertschen Axiomatik das letzte Wort zu den erwähnten Grundlagenproblemen sein. Was beweist es schon, daß die "moderne Mathematik" die Konsequenz gezogen hat, "daß man auf die Definition der geometrischen Grundbegriffe (Punkt, Gerade, Ebene) verzichten müsse" (S.62)? Es beweist jedenfalls nicht die Sinnlosigkeit des Versuchs, diese Begriffe von einem inhaltlichen (etwa dem operativen) Standpunkt aus zu untersuchen. Im Leben ist es wohl oft zweckmäßig, aus der Not eine Tugend zu machen. Das gilt nicht unbedingt auch für die Wissenschaft, wie das eben erwähnte Beispiel Laurent Schwartz' zeigt; zumindest gilt es in einem anderen Sinne. Hier ist es besser, die Ursachen einer begrifflichen Unklarheit soweit wie irgend möglich aufzudecken und zu untersuchen, anstatt sich resignierend mit ihr abzufinden und das ganze Problem auszuklammern.

Kommen wir nun zu unserer Aufgabe zurück, die Idee der Ununterscheidbarkeit präziser zu fassen. Dazu verfügen wir im wesentlichen über zweierlei Rüstzeug: erstens einen schon von Leibniz benutzten Explikationsgedanken, auf den auch Lorenzen in seinen Untersuchungen zur Geometrie zurückgreift; und zweitens die Mittel der formalen Logik. In seinem "Specimen Calculi universalis" nennt Leibniz zwei Dinge ununterscheidbar, wenn in jeder Aussage über eines der beiden das andere an seine Stelle treten kann, ohne daß sich dadurch der Wahrheitswert der Aussage ändert. Wörtlich heißt es in der Gerhardtschen Ausgabe seiner philosophischen Schriften, Bd. VII: "Eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest salva veritate ..." (S.219). Eine ähnliche Definition gibt Leibniz auch noch in einem Brief an Th. Burnett aus dem Jahre 1699 (vgl. Gerhardt III, S.258).

Verdeutlichen wir seine Erklärung an einem Beispiel, an dem schon Frege seine Theorie der Identität zu erläutern pflegte: der Gleichheit von Morgenstern und Abendstern. Eine Eigenschaft, die man am Morgenstern festgestellt hat, besitzt auch der Abendstern, und umgekehrt; es handelt sich um ein und dasselbe physische Objekt, und lediglich die es bezeichnenden Eigennamen differieren (weil man womöglich aufgrund der unterschiedlichen Gegebenheitsweise des Sterns verschiedene Sterne zu benennen glaubte). Ununterscheidbarkeit bedeutet in diesem Beispiel also dasselbe wie Identität.

Es gibt jedoch Fälle, die es geraten erscheinen lassen, den Begriff der Ununterscheidbarkeit weiter zu fassen als den der Identität. Man stelle sich dazu etwa die Kopie einer künstlerischen Plastik vor, die so vollkommen ist, daß es aufgrund sämtlicher verfügbarer Daten keinem Experten gelingt, sie vom Original zu unterscheiden. Offenkundig sind die beiden Exemplare nicht identisch, obgleich sie sich nicht in irgendwelchen Eigenschaften unterscheiden. Sie sind verschieden, denn sie befinden sich an verschiedenen Stellen im Raum. Wollte man das mittels einer Eigenschaft ausdrücken, so müßte man sich auf einen absoluten, mit einem Koordinatensystem ausgestatteten Raum beziehen. Freilich definiert die Angabe von Koordinaten auch nur eine Eigenschaft der aus Objekt und System gemeinsam gebildeten Konfiguration, sie eignet sich daher nicht zur Unterscheidung von Objekten durch für sie selbst definierte Eigenschaften. Schon Kant erwähnt in seiner Abhandlung über den Unterschied der Gegenden im Raum die Existenz inkongruenter Spiegelbilder, z.B. eine linke und eine rechte Hand; sie gilt ihm als Beweis dafür, daß ein Ding, sofern es sich im Raum befindet, äußere Eigenschaften hinzuerwirbt, die es ermöglichen, es von einem anderen Ding, das in der Lage seiner Teile mit ihm übereinstimmt, zu unterscheiden. Nach dem zuvor

Gesagten ist diese Ansicht falsch, wie außerdem K. Reidemeister in einer ausführlichen und scharfsinnigen Analyse (1957, S.53ff) nachgewiesen hat.

Wir wollen gleich hinzufügen, inwiefern diese Überlegungen für unsere Zwecke bedeutsam sind. Man denke sich auf einer ebenen Fläche zwei Stellen markiert, beides Kreisscheiben gleichen Durchmessers. Würden wir nun ihre Ununterscheidbarkeit auch bezüglich der vermeintlichen Eigenschaften verlangen, die ihnen nach Kant vermöge ihrer Lage im Raum zukommen sollen, so ergäbe dies offenkundig nicht den gewünschten Sinn: es dürfte dann ja gar keine verschiedenen Stellen mehr geben, und die Fläche würde zu der kleinsten auf ihr markierbaren Stelle entarten. Dieser Fehler läßt sich leicht vermeiden: wir brauchen beim Sprechen über die Stellen S einer Fläche F lediglich Aussagen auszuschließen, in denen S und F auf andere ausgezeichnete Raumstellen, eine feste Fläche oder ein Koordinatensystem bezogen werden. Was dies in logischer Hinsicht besagt, werden wir später noch genauer ausführen. Vorerst ergibt sich als Ununterscheidbarkeitsforderung für eine Fläche F die folgende Norm:

Sind S, S' irgend zwei Stellen auf F und gilt irgendeine Aussage $\mathfrak{A}(F,S)$, in der kein Bezug auf eine ausgezeichnete Raumstelle stattfindet, so gilt auch $\mathfrak{A}(F,S')$.

Wir dürfen dies als eine vorläufige (und spezielle) Fassung der Idee der Ununterscheidbarkeit betrachten, wie sie sich aus dem von Leibniz dargelegten Gedanken ableiten läßt. Lorenzen hat vorgeschlagen, die Forderung als Prinzip der Homogenität zu bezeichnen, eine Sprechweise, die wir in diesem Buch übernommen haben. Bei Dingler (1955/1969, S.135) finden wir dazu den Begriff der symmetrischen Fläche. Allerdings setzt Symmetrie den Gebrauch von Abbildungen voraus, der hier zunächst keine Rolle spielt. Gleichwohl besteht zwischen Symmetrie und Homogenität ein sachlicher Zusammenhang, dem wir in 7.6 nachgehen werden.

7.2. Allgemeinstes Konzept der Homogenität

Wir wollen nun das Konzept der Homogenität in der allgemeinsten Form, die mit den sprachlichen Mitteln der elementaren Prädikatenlogik möglich erscheint, fassen und untersuchen. Das hat den Vorteil, daß sich einige in Zukunft auftretende Probleme besser auf ihren logischen Kern reduzieren lassen. Was die dabei benutzten logischen Grundbegriffe und Symbole betrifft, so verweisen wir dazu auf Anhang I.

Die größtmögliche Allgemeinheit der Formulierung läßt sich dadurch erreichen, daß man die in der Geometrie benötigte Inzidenz von Stellen mit einer Fläche durch eine beliebige zweistellige Relation ersetzt. Dazu denken wir uns als Rahmen eine Sprache L erster Stufe, bei der die Frage der Interpretation vorerst keine Rolle spielen soll. L enthalte u.a. das Relationszeichen ϱ , für das wir das folgende Formelschema betrachten:

$$\varrho(u,x) \wedge \varrho(u,x') \wedge \mathfrak{A}(u,x) \longrightarrow \mathfrak{A}(u,x') .$$

Zunächst einige Erläuterungen zur Schreibweise: Aus technischer Zweckmäßigkeit können an der Stelle von u (oder x bzw. x') jeweils mehrere Variablen stehen, die nicht unbedingt gleichsortig sein müssen. Die Variablen(blöcke) u, x sind an die Formel $\mathfrak{A}$ angefügt, um anzudeuten, daß sie in $\mathfrak{A}$ frei vorkommen und außer ihnen keine Variable in $\mathfrak{A}$ frei vorkommt. Die Substitution von x' für x ist so vorzunehmen, daß man jedes freie Vorkommen von x durch eines von x' ersetzt (ohne Einschränkung darf man dazu voraussetzen, daß x' in $\mathfrak{A}(u,x)$ nicht vorkommt). Die Formel $\mathfrak{A}$ ist unbestimmt gelassen, an ihre Stelle kann jeweils eine konkrete einschlägige Formel der Sprache L treten. Wir haben es also nicht mit einer einzigen bestimmten Formel zu tun, sondern mit einem sog. Formelschema. Wie sich später herausstellen wird, ist das obige Schema nicht sinnvoll, wenn man für $\mathfrak{A}$ ganz beliebige Formeln wählen kann. Vielmehr müssen wir uns bei der Wahl von $\mathfrak{A}$ auf eine (mehr oder weniger gut spezifizierbare) Formelklasse Ω beschränken. Unter dieser Voraussetzung nennen wir unser Formelschema Homogenitätsschema (H-Schema) für ϱ bezüglich Ω und bezeichnen es mit $\mathrm{Hmg}(\varrho\,;\Omega)$ (oder kürzer nur mit $\mathrm{Hmg}(\varrho)$). Dieselbe Bezeichnung wollen wir für die Menge aller Formeln verwenden, die aus dem obigen Schema durch Wahl einer bestimmten Formel aus Ω für $\mathfrak{A}$ hervorgehen. Mißverständnisse sind dabei nicht zu befürchten.

Nunmehr können wir das H-Schema auch inhaltlich erläutern und es als allgemeine Form des Gedankens der Ununterscheidbarkeit plausibel machen. Wir beziehen uns zunächst auf ein früheres Beispiel, indem wir $\varrho(u,x)$ als ' x ist Kopie von u ' deuten. Das H-Schema drückt dann die Forderung aus, die Kopien eines bestimmten Originals u in möglichst vielen Hinsichten 'gleichartig' oder 'gleichförmig' herzustellen. Allgemeiner: Was von einem Ding x gilt, das zu einem Ding u in der Beziehung ϱ steht, gilt von jedem anderen Ding x' , das ebenfalls zu u in der Beziehung ϱ steht. - Offensichtlich fällt unter dieses H-Schema auch die früher beschriebene Forderung der (inneren) Homogenität für Flächen; man hat lediglich ϱ als Inzidenz einer 'Stelle' mit einer Fläche aufzufassen. Wir wollen bereits hier anmerken, daß sich sämtliche von P. Lorenzen betrachteten Homogenitätsprinzipien in der Form eines H-Schemas schreiben lassen. Bevor wir uns aber wieder den Problemen der geometrischen Homogenität zuwenden, wollen wir das H-Schema für den Fall erörtern, daß ϱ eine Äquivalenzrelation darstellt. Dem Leser wird es danach leichter fallen, die Idee der Ununterscheidbarkeit in den Rahmen der ihm bekannten Elementarmathematik einzuordnen. Anschließend untersuchen wir die Frage der Widerspruchsfreiheit von Homogenitätsforderungen, die eine gewisse Rolle bei der Spezifizierung der zulässigen Formelklasse Ω spielt.

Eine mit ϱ bezeichnete Beziehung heißt bekanntlich Gleichheits- oder Äquivalenzrelation, wenn folgende Aussagen beweisbar sind:

$\bigwedge x \; \varrho(x,x)$ (Reflexivität),
$\bigwedge x \bigwedge y \; (\varrho(x,y) \rightarrow \varrho(y,x))$ (Symmetrie),
$\bigwedge x \bigwedge y \bigwedge z \; (\varrho(x,y) \wedge \varrho(y,z) \rightarrow \varrho(x,z))$ (Transitivität).

Äquivalenzrelationen gibt es viele in der Mathematik: die Gleichzahligkeit von Klassen, die Synonymität von Prädikaten, die Kongruenz von Figuren oder die Parallelität von Geraden sind Beispiele. Der mit diesem Begriff nicht vertraute Leser mag sich auch überlegen, weshalb die früher erwähnte Beziehung zwischen Original und Kopie keine Äquivalenzrelation ist (wenn man das Original als solches markiert hat). - Weshalb betrachten wir hier gerade Äquivalenzrelationen? Der Grund liegt darin, daß für sie das H-Schema in ein anderes Schema übergeht, das dem Leser aus der Logik oder vom üblichen Verfahren des abstrakten Definierens her bekannt sein dürfte. Genauer gilt folgendes: Für eine Äquivalenzrelation (sogar schon für eine reflexive und symmetrische Relation) ϱ ergibt sich aus $\mathrm{Hmg}(\varrho)$ das Schema

(*) $\varrho(x,y) \wedge \mathfrak{A}(x) \rightarrow \mathfrak{A}(y)$,

wobei $\mathfrak{A}(x)$ eine einschlägige Formel mit x als einziger freier Variablen ist.

Dem recht einfachen Beweis dieser Behauptung schicken wir einige erläuternde Bemerkungen voraus:

Ist $\mathfrak{A}(x)$ eine bestimmte Formel, die (*) erfüllt, so erblickt man in $\mathfrak{A}$ kein Reden mehr über x selbst, sondern über die bezüglich ϱ gebildete 'Klasse' zu x äquivalenter Dinge. Die betreffende Klasse liegt dabei nicht konkret vor, sie wird vielmehr als durch Abstraktion gebildetes Objekt gedacht. Häufig trifft man auch das Schema dann an, wenn bewiesen werden soll, daß eine bestimmte Definition für Äquivalenzklassen (abstrakte Objekte) unabhängig von der Auswahl des Repräsentanten ist, z.B. bei der Definition von Summe und Produkt von Restklassen ganzer Zahlen. Ein bekannteres Beispiel liefern vielleicht die rationalen Zahlen, die ja vermöge der Äquivalenzrelation $(a/b) \sim (a'/b')$ (genau dann, wenn $ab' = ba'$) aus den Bruchtermen a/b abstraktiv gebildet werden. Hier bezieht sich eine Formel $\mathfrak{A}(a/b)$ auf die durch a/b repräsentierte rationale Zahl, wenn mit $\mathfrak{A}(a/b)$ und $(a'/b') \sim (a/b)$

auch $\mathcal{L}(a'/b')$ gilt. Wer z.B. feststellt, daß Zähler und Nenner eines Bruchterms gerade sind, redet daher ersichtlich nicht über die durch den Bruchterm dargestellte rationale Zahl: seine Aussage trifft ja etwa auf 4/10 zu, nicht jedoch auf den dazu äquivalenten Bruchterm 2/5 . Aus entsprechenden Gründen wird durch die Rechenvorschrift:

$$(a/b) \circ (c/d) := ((a+c)/(b+d))$$

keine Verknüpfung im Bereich der rationalen Zahlen definiert.

Der Beweis der obigen Behauptung wird am zweckmäßigsten halbformal geführt. Für $\mathfrak{A}(u,x)$ setzen wir $\varrho(u,x) \wedge \mathcal{L}(x)$; dann liefert das Homogenitätsschema

$$\varrho(u,x) \wedge \varrho(u,y) \wedge \varrho(u,x) \wedge \mathcal{L}(x) \longrightarrow \varrho(u,y) \wedge \mathcal{L}(y) \ .$$

Substituiert man y für u und beachtet die Reflexivität und Symmetrie von ϱ , so ergibt sich hieraus

$$\varrho(x,y) \wedge \mathcal{L}(x) \longrightarrow \mathcal{L}(y) \ ,$$

was zu zeigen war. (Für transitives ϱ läßt sich auch umgekehrt Hmg(ϱ) aus (✱) gewinnen, sofern man in $\mathcal{L}$ wenigstens noch eine weitere freie Variable zuläßt.)

Die einfachste Äquivalenzrelation ist die Identität. Für sie geht das Homogenitätsschema über in das in der Prädikatenlogik gebräuchliche Gleichheitsschema

$$x = y \wedge \mathcal{L}(x) \longrightarrow \mathcal{L}(y) \ .$$

Das folgende Beispiel soll illustrieren, inwiefern die Gleichheitsbeziehung durch dieses Schema 'bestimmt' wird. Nähert man die Zahlen $a = 1 + \sqrt{2}$ und $b = \sqrt{6}$ durch Dezimalbrüche auf eine Stelle hinter dem Komma an, so erhält man in beiden Fällen den Wert 2,4 . So gesehen sind a und b ununterscheidbar. Das Gleichheitsschema läßt aber - ohne Berechnung weiterer Dezimalstellen - diesen Umstand als nur 'ungefähre Gleichheit' erscheinen, und zwar durch Angabe einer Formel $\mathcal{L}(x)$, hier: $x^2 = 6$, für die $\mathcal{L}(b)$ gilt, nicht dagegen $\mathcal{L}(a)$ (wegen $a^2 = 1 + 2(1 + \sqrt{2}) < 1 + 2 \cdot 2{,}5 = 6$).

Wie weit die Bestimmung von ϱ durch ein H-Schema reicht, hängt plausiblerweise von den in Ω zugelassenen Formeln ab. Ein drastisches Beispiel hierzu liefert das H-Schema für eine reflexive Relation ϱ . Wenn wir nämlich in Ω Formeln aufnehmen, die mit Hilfe der Identität aufgebaut sind, so geht das H-Schema bei der dann erlaubten Wahl von " u = x " für $\mathfrak{A}(u,x)$ in folgende Formel über:

$$\varrho(u,x) \wedge \varrho(u,x') \wedge u \neq x \longrightarrow u \neq x' .$$

Daraus wird nach Substitution von u für x' und aufgrund der Reflexivität von ϱ

$$\varrho(u,x) \wedge u \neq x \longrightarrow u \neq u ,$$

also nach einfacher logischer Umformung

$$\bigwedge u \bigwedge x \; (\varrho(u,x) \longrightarrow u = x) .$$

Somit stehen zwei Dinge genau dann in der Beziehung ϱ, wenn sie identisch sind, d.h. ein reflexives ϱ mit Hmg(ϱ) <u>ist</u> bereits die Identität. Wollte man demnach etwa die Kongruenzbeziehung zwischen zwei Raumstücken mit Hilfe eines H-Schemas 'festlegen', so darf die Formulierung der Eigenschaften, in denen die betreffende Ununterscheidbarkeit hergestellt werden soll, nicht den Begriff der Identität enthalten. (Dieser Umstand spiegelt sich in der gewöhnlichen Geometrie dadurch wider, daß dort die Gleichheitsbeziehung keinerlei wesentliche Rolle spielt.)

Wir haben bisher davon gesprochen, daß das H-Schema einer Relation diese 'festlege' oder bis zu einem gewissen Grade 'bestimme'. Es wäre wünschenswert, diese Redeweisen zu explizieren. Der systematische Versuch dazu führt zu Aufgaben, die wir in 7.5 als Interpretationsproblem der geometrischen H-Schemata vorstellen werden. Es empfehlen sich aber bereits an dieser Stelle einige grundsätzliche Hinweise.

Jedes H-Schema läßt sich prinzipiell auf mindestens zwei Arten auffassen:

1. als Bestimmung eines Objektes
2. als Bestimmung einer Relation.

Bei der ersten Möglichkeit notieren wir das Schema mit einer Konstanten a wie folgt:

$$\bigwedge x \bigwedge x' \left[\varrho(a,x) \wedge \varrho(a,x') \wedge \mathfrak{A}(a,x) \longrightarrow \mathfrak{A}(a,x') \right];$$

und setzen dabei ϱ als bekannt sowie $\mathfrak{A}$ als Formel einer - wie auch immer - interpretierten Sprache voraus. Das Schema beinhaltet danach also gewisse Bedingungen, denen das durch a bezeichnete Objekt genügen soll. Diese Version entspricht der Weise, in der Dingler seine Ununterscheidbarkeitsforderungen aufgefaßt hat. Sie bringt Schwierigkeiten mit sich, die sich erst angreifen lassen, wenn wir die Prozesse der Ideation und Exhaustion genauer untersuchen werden. Das gilt zum Teil auch für die zweite Auffassung, wonach das H-Schema für ϱ eine Anforderung an eben diese Relation darstellen soll. Diese Auffassung erinnert von weitem an das sog. implizite Definieren von Grundbegriffen.

In der Tat, bei formaler Betrachtungsweise läßt sich jeder Sonderfall eines H-Schemas als ein Axiom ansehen, welches zur Festlegung der undefinierten Relation ϱ beiträgt. Möglich ist das wohl, wenn auch nicht im Sinne des Erfinders. Der Vorteil der Homogenitätsaussagen gegenüber den landläufigen Axiomen soll ja in dem ihnen mitgegebenen operativen Sinn liegen. Euklids Axiome verweisen uns auf eine (manchmal zweifelhafte) Anschauung räumlicher Verhältnisse; Dinglers Homogenitätsprinzipien verweisen uns auf das praktische Herstellen räumlicher Grundformen. Gerade das hatte Dingler im Auge, als er von einer "epistemologisch optimalen" Form der Geometrie sprach. Unangemessen wäre es, Dingler zu kritisieren, weil seine Homogenitätsforderungen ebenfalls zu einer formalen Axiomatik führen. Wer seine zahlreichen Schriften auch nur oberflächlich durchblättert, kann unmöglich übersehen, daß Dingler ein Bewunderer der von Hilbert geübten axiomatischen Methode war. Am liebsten hätte er sogar das eine oder andere Lehrstück seiner Wissenschaftstheorie in formaler Manier dargeboten. Freilich, gerade darin liegen die Schwierigkeiten: Was man durch die operative Aneinanderbindung von Theorie und Wirklichkeit gewinnt, läßt sich nicht restlos und dann auch nur mühevoll in eine formale Axiomatik hinüberretten.

In der gerade beschriebenen doppelten Auffassung des allgemeinen H-Schemas kündigen sich diese Probleme an; in ihrer ganzen Schärfe werden sie sich uns später aufdrängen. Keinesfalls ist die Präzisierung operativer Prinzipien ein Universalschlüssel, mit dem sich das Tor zur Geometrie so reibungslos öffnen ließe, wie dies lange Zeit von Adepten der Erlanger Schule hingestellt wurde. (Allerdings räumt P. Janich (1976a) ein, daß auch nach einer Präzisierung für einen "formalistischen Mathematiker" die Begründungsaufgabe "dann immer noch keineswegs trivial ist" (S.83). Man lasse sich aber nicht irritieren: Auch für einen nicht-formalistischen Mathematiker ist diese Aufgabe noch recht schwer. Der kritische Leser wird am Ende der Lektüre dieses Buches kaum einen anderen Eindruck gewonnen haben als den, daß das gesamte Unternehmen der 'operativen Geometrie' noch einigermaßen unabgeschlossen ist.)

7.3. Probleme der Widerspruchsfreiheit

An dieser Stelle unserer logischen Analyse müssen wir noch einer Frage mehr formalen Charakters nachgehen. Sie ist aber von grundsätzlicher Bedeutung; überdies fällt von ihr aus ein helleres Licht auf die eingangs erwähnte Notwendigkeit, in den Eigenschaften von Flächenstellen den Bezug auf irgendwelche ausgezeichneten Stellen des Raumes zu vermeiden. Es handelt sich um das Problem der Widerspruchsfreiheit von H-Schemata. Man kann wohl über den Sinn streiten, den die formale Konsistenz für einen bislang noch nicht interpretierten Kalkül haben mag. Anders dürfte dies bei den Homogenitätsprinzipien sein: Da es sich bei ihnen um formalisierte Handlungsanweisungen handelt, würde ihre Widersprüchlichkeit nicht bloß einen (tatsächlichen oder vermeintlichen) logischen Konflikt bedeuten, sondern auch eine viel verhängnisvollere praktische Ausweglosigkeit hervorrufen. Nicht eine Theorie drohte sinnlos zu werden, sondern ein Regelsystem für reelle Operationen würde sich als grundsätzlich undurchführbar erweisen. Solche Befürchtungen glauben wir jetzt und im folgenden ausräumen zu können.

Natürlich kann man nicht erwarten, daß H-Schemata mit allen möglichen Theorien verträglich sind; sie würden dann ja nichts mehr besagen als logische Wahrheiten. Das heißt: Ist A ein widerspruchsfreies System von Aussagen einer Sprache L und ϱ ein Relationssymbol von L , so ist A+Hmg(ϱ) im allgemeinen keinesfalls widerspruchsfrei. Als einfaches Beispiel wähle man für A die elementare Arithmetik und für $\varrho(u,x)$ die Teilbarkeitsrelation $u|x$ (u ist Teiler von x). Aus Hmg(ϱ) würde dann z.B. die offensichtlich in A falsche Formel $2|x \wedge 2|x' \wedge 2 < x \longrightarrow 2 < x'$ folgen, d.h. A+Hmg(ϱ) ist widerspruchsvoll.

Das brauchen wir nicht zu bedauern, denn derartige Homogenitätsforderungen haben ohnehin nichts in der Zahlenlehre zu suchen. Fragen wir also lieber, wie die Dinge sich in der euklidischen Geometrie verhalten. Legt man etwa Hilberts Axiomensystem zugrunde und denkt sich dazu beispielsweise das Schema für die Homogenität von Ebenen in der betreffenden Sprache geeignet formuliert, so wird man vermuten dürfen, daß sich das Schema in einem passenden, hinreichend übersichtlich konstruierten Modell (etwa dem Cartesischen Modell) als gültig herausstellt. Infolgedessen wäre es dann nicht widerlegbar. Also muß es nach einem Resultat von Tarski über die deduktive Vollständigkeit beweisbar sein (vgl. Anhang I). Erst recht wäre es also mit der euklidischen Geometrie widerspruchsfrei verträglich. Allerdings hängt dies, wie gesagt, von einer - wenn auch plausiblen, so doch bislang unbewiesenen - Vermutung ab.

Die eben vorgeführten Beispiele machen deutlich, daß die gewünschte Widerspruchsfreiheit von A+Hmg(ϱ) naturgemäß eng an die besondere Beschaffenheit des Systems A geknüpft ist. Besonders einfach verläuft der Fall $A = \emptyset$; wir haben dann lediglich zu zeigen, daß das allgemeine H-Schema für sich genommen widerspruchsfrei ist. Dazu denke man sich die zugrunde liegende Sprache L folgendermaßen interpretiert: Sei M eine Menge von zwei Elementen, etwa den Zahlen 0 und 1 . Wir interpretieren ϱ durch die Relation $\{(0,1)\}$, d.h. mittels der Vorschrift

" $\varrho(u,x)$ genau dann, wenn $u = 0$ und $x = 1$ ",

die übrigen nicht-logischen Zeichen dagegen ganz beliebig. Tatsächlich erhalten wir hierdurch ein triviales Modell für Hmg(ϱ) mit M als Trägermenge (Individuenbereich), und das beweist die Widerspruchsfreiheit des H-Schemas. Der Trick, auf dem das Modell beruht, ist höchst einfach und läßt sich bequem illustrieren, indem wir für einen Augenblick auf unser früheres Beispiel vom Kopieren eines Originals zurückgreifen. Man stelle sich die Situation vor, daß es von einem bestimmten Original eine einzige Kopie gibt und die augenblickliche und künftige Existenz weiterer Kopien aus irgendwelchen Gründen mit Sicherheit auszuschließen ist. Natürlich versteht es sich dann von selbst, daß alle Kopien des betreffenden Originals ununterscheidbar sind, sie sind ja sogar identisch mit einer einzigen. In dieser Situation ist also das H-Schema für ϱ erfüllt, wenn $\varrho(u,x)$ gedeutet wird als ' x ist Kopie des Originals u '.

Dieses stark 'verarmte' Modell hat allerdings einen Nachteil: man kann es nicht auf geometrische, jedenfalls nicht in einer engeren Auslegung geometrische Theorien A übertragen. Überlegen wir uns dies für den naheliegenden Fall, daß ϱ für die Inzidenzbeziehung zwischen Punkten und Ebenen steht. Es müßte dann bei der Konstruktion eines M entsprechenden 'räumlichen' Modells einen Punkt P_0 geben, so daß alle Punkte von durch P_0 verlaufenden Ebenen (Flächen) mit P_0 zusammenfallen. Der Punkt P_0 wäre also gewissermaßen ein 'Loch', eine nicht inzidenzfähige Stelle des zugrunde liegenden Raumes. So etwas sollte es in der Geometrie natürlich nicht geben, und daher wird man von A wenigstens verlangen, daß es die Ableitung einer Aussage gestattet, die das Nichteintreten jenes unerwünschten Sachverhaltes ausdrückt. Die Existenz von 'Löchern' zu verbieten heißt aber dies: Man fordert zu jedem Punkt P die Existenz einer Ebene (oder Fläche) F durch P sowie mindestens eines weiteren (von P verschiedenen) Punktes P' , der ebenfalls mit F inzidiert. Wenn wir das in die Sprache L übersetzen, erhalten wir folgende Bedingung (die wir mit U_ϱ abkürzen wollen):

$$[U_\varrho] \qquad \bigwedge x \bigvee u \bigvee x' \qquad (\varrho(u,x) \wedge \varrho(u,x') \wedge x' \neq x) .$$

Das Problem der Widerspruchsfreiheit von A+Hmg(ϱ) ist somit nur dann wirklich interessant, wenn wir A als widerspruchsfreies System voraussetzen, aus dem die Aussage U_ϱ abgeleitet werden kann. Wir kommen in diesem Zusammenhang zu einem notwendigen Kriterium für die Konsistenz von $A+Hmg(\varrho)$ (wobei U_ϱ aus A ableitbar); es handelt sich um das Verbot von Individuenkonstanten in den Formeln des H-Schemas für ϱ. Genauer zeigen wir folgendes:

Sind in den Formeln aus Ω Individuenkonstanten zugelassen, so ist $A+Hmg(\varrho\,;\Omega)$ widerspruchsvoll.

Zum Beweis dieser Behauptung nehmen wir an, c sei eine Konstante aus L, auf die in den Formeln des H-Schemas für ϱ Bezug genommen werden darf. Wir wählen für $\mathfrak{A}(u,x)$ die dann statthafte Formel: $\varrho(u,x) \wedge x = c$. Aus $Hmg(\varrho)$ folgt somit

$$\varrho(u,x) \wedge \varrho(u,x') \wedge x = c \longrightarrow x' = c \ ,$$

also nach Substitution von c für x :

$$\varrho(u,c) \wedge \varrho(u,x') \longrightarrow x' = c \ .$$

Nun führen wir die Quantoren nach den Regeln der elementaren Prädikatenlogik ein und erhalten

$$\bigvee x \bigwedge u \bigwedge x' \ (\varrho(u,x) \wedge \varrho(u,x') \longrightarrow x' = x) \ .$$

(Inhaltlich ergibt sich diese Existenzbehauptung durch Angabe eines 'Beispiels', nämlich c für x.) Man überzeugt sich unmittelbar davon, daß die letzte Aussage logisch gleichwertig mit $\neg U_\varrho$ ist und damit einen Widerspruch in $A+Hmg(\varrho)$ erzeugt. Denselben Widerspruch erhält man (auf dazu duale Weise) durch Wahl von $\varrho(u,x) \wedge x \neq c$ für $\mathfrak{A}(u,x)$.

Bisher hatten wir von den Formeln des H-Schemas stets verlangt, daß sie genau zwei freie Variablen (oder 'Variablenbündel') enthalten sollten. Diese Forderung findet sich auch bei Lorenzen (1961/1968, S.134), und sie ist offenbar notwendig; andernfalls könnte man nämlich auf gleiche Weise wie oben bei Konstanten die Aussage $\neg U_\varrho$ und damit einen Widerspruch in $A+Hmg(\varrho)$ ableiten. Somit erscheint es hier als sinnvoll, in Ω nur Formeln $\mathfrak{A}(u,x)$ zuzulassen, die außer u und x keinen weiteren Parameter (freie Variable, Individuenkonstante) enthalten. Wir nennen solche Formeln (Eigenschaften) parameterfrei.

Hierzu stellt sich noch die Frage, ob auch Funktionssymbole den Parametern zuzurechnen seien. Wir nehmen dazu einmal an, in A wäre beweisbar, daß die durch das 1-stellige Funktionssymbol f bezeichnete Abbildung genau einen Fixpunkt besitzt. Dann kann man offenbar in A+Hmg(ϱ) mittels $\varrho(u,x) \wedge f(x) = x$ denselben Widerspruch gegen U_ϱ erzeugen wie eben. Insofern müßten eigentlich auch solche Funktionszeichen f ausgeschlossen werden, die sich aus einer vorgegebenen Formel mitsamt eines f definierenden Axioms nicht mittels logischer Äquivalenzumformungen eliminieren lassen. Für die Geometrie können wir aber auf eine solche Maßnahme verzichten, denn die hier vorkommenden Funktionen (wie Translation, Rotation und dgl. mehr) beziehen sich stets auf mehrere Argumente. Um z.B. in einer Formel $\mathfrak{A}(u,x)$ auszudrücken, daß x Fixpunkt einer Rotation ist, muß (bei genauer Befolgung der Schritte definitorischer Spracherweiterungen) zunächst eine Formel $\mathfrak{L}(a,w,x,y)$ angegeben werden, die inhaltlich besagt, daß die Lote von x und y auf die Gerade a einen gemeinsamen Fußpunkt besitzen und dort den Winkel w einschließen. Sind dann die Formeln

$$\bigwedge a,w,x \bigvee y\ \mathfrak{L}(a,w,x,y) \qquad \text{(Existenz) und}$$
$$\bigwedge y,y'\ (\mathfrak{L}(a,w,x,y) \wedge \mathfrak{L}(a,w,x,y') \longrightarrow y = y') \quad \text{(Eindeutigkeit)}$$

beweisbar, so wird schließlich ein 3-stelliges Funktionssymbol f über folgendes Zusatzaxiom eingeführt:

$$y = f(a,w,x) \longleftrightarrow \mathfrak{L}(a,w,x,y) \ .$$

Um die Eigenschaft, Fixpunkt einer Rotation zu sein, auszuschließen, brauchen wir daher gar nicht erst einen weitergefaßten Parameterbegriff; es hat sich vielmehr herausgestellt, daß sie ohnehin Parameter enthält, die wir schon 'verboten' haben (hier: die freien Variablen 'a' und 'w'). Ganz entsprechend ist die Situation bei anderen Abbildungen in der Geometrie.

Das Parameterverbot verhilft uns nun zum logischen Verständnis einer Schwierigkeit, die bei der provisorischen Fassung der Ununterscheidbarkeitsidee aufgetreten war. Die Ununterscheidbarkeit der Stellen einer Fläche sollte sich auf deren 'innere' Eigenschaften beziehen und ihre Lage im Raum außer Acht lassen. Wir hatten deshalb diejenigen Aussagen aus dem Homogenitätsprinzip auszuschließen, in denen Bezug auf eine ausgezeichnete Raumstelle genommen wird. In einer Aussage Bezug auf eine oder mehrere feste Raumstellen zu nehmen, bedeutet aber formallogisch gerade, daß die betreffende Aussage nach Formalisierung einen oder mehrere Parameter enthält. Der dadurch auf der Ebene der Beschreibung entstehende Widerspruch hat ein praktisches Spiegelbild in der Unmöglichkeit, die Forderung nach Homogenität eines Gebildes damit zu vereinbaren, daß dieses Gebilde naturgemäß eine Mannigfaltigkeit ganz bestimmter Raumstellen einnimmt. Die geometrische Idee der Ununterscheidbarkeit bedeutet 'qualitative Gleichheit' bei verschiedener Lage im Raum.

7.4. H-Schemata in der Geometrie

Wir haben bislang den Gedanken der Ununterscheidbarkeit als eine wesentliche Leitvorstellung für eine (vom operativen Standpunkt aus) interpretierende Genese der Geometrie angesehen. Natürlich ist er dies nicht in irgendeinem absoluten Sinne; vielmehr finden wir uns hier vor die Aufgabe gestellt, seine Rolle und seine Tragweite in der Geometrie überhaupt erst einmal zu untersuchen und sichtbar zu machen. Die Ununterscheidbarkeitsidee wurde mit Hilfe von H-Schemata präzisiert. Daher läuft unsere Aufgabe darauf hinaus, diejenigen Grundbegriffe und Axiome herauszufinden, die sich in geeigneter Weise durch H-Schemata erläutern bzw. ersetzen lassen. Selbstverständlich sind H-Schemata keine Allzweckinstrumente. Daß es überhaupt geometrische Gebilde, z.B. ein nicht-komplanares Punktequadrupel im Raum gibt, läßt sich ihnen nicht abpressen und muß in eigenen Existenzaxiomen gefordert werden. Man kann aber danach trachten, möglichst viele und dabei funktionell wesentliche Teile der Geometrie auf der Grundlage von Homogenitätsforderungen zu durchdringen.

Diese Aufgabe ist alles andere als eindeutig; es führen ja bekanntlich viele Wege ins axiomatische Rom, und auch die naheliegende Auflage, einen natürlichen Weg zu gehen, verleiht unserem Aufgabengebiet nur eine etwas vage Kontur. Was heißt schon 'natürlich'? Immerhin, wir brauchen uns nicht um diejenigen Möglichkeiten zu kümmern, deren Hauptzweck in metamathematischen Untersuchungen (der Unabhängigkeit, Vollständigkeit etc.) liegt. Für solche Untersuchungen empfiehlt sich oft eine Sprache nur mit Punktvariablen sowie einer oder zwei nicht-logischen Relationen. Tarski (1959) etwa verwendet die Beziehungen der Zwischenlage und der Gleichabständigkeit, und M. Pieri hat bereits in einer Arbeit von 1908 gezeigt, daß eine einzige Grundrelation (nämlich: x hat von y und z gleichen Abstand) zur Definition der übrigen Begriffe ausreicht. Aber hier wie anderswo erhöht das Vereinfachen der Sprache die innere Komplexität der Begriffe. Solche Verfahren stehen im Dienste systematisierender Genesen. Interpretieren wir dagegen die Geometrie vom operativen Standpunkt aus, so werden wir uns eher an Begriffe halten, die in der Praxis des Messens und des Herstellens von Körpern eine Rolle spielen.

Fundamentale Begriffe

Eine Schlüsselstellung nimmt hierbei zweifellos die Idee der Ebene ein. Geraden können wir uns als Schnitte von Ebenen, Punkte als Schnitte von Geraden denken, und alle diese Ideen liegen bereits der Fähigkeit zugrunde, einen linearen Maßstab anzufertigen. Mit Meßlatten wiederum messen wir Abstände, und dies geschieht durch Abtragen einer festgesetzten Längeneinheit an der auszumessenden Strecke. Welcher Zweck liegt in solchen Messungen? Naturwissenschaftler brauchen numerische Meßdaten für ihre Theorien; Kaufleute benötigen quantitative Angaben, um Materialbestellungen disponieren oder Preise kalkulieren zu können. Messungen haben aber häufig auch eine unmittelbare Funktion, bei der es gewöhnlich weniger auf das Meßergebnis selbst als vielmehr darauf ankommt, Längenverhältnisse zu ermitteln oder Erkenntnisse über das Passen von Einzelteilen zu gewinnen. P. Janich (1976a) beschreibt dies treffend wie folgt: "Man vergegenwärtige sich an einfachen Beispielen aus Handwerk und Technik, wozu jemand etwas mißt. Ein Schreiner mißt nicht etwa, um die Länge einer Tür in Metern aufschreiben zu können, sondern, damit die Tür in den Türstock oder in einen Schrank paßt. Wenn ein Zimmermann ein Fachwerk baut, so geht es ihm um Reproduktion von Längengleichheit oder von Längenverhältnissen an Einzelteilen des Fachwerks, oder aber von Winkeln, weil nachher einige Balken 'im Lot' und andere 'im Wasser' (Wasserwaage) stehen müssen" (S.90). Bei diesen Vorgängen macht man Gebrauch davon, daß der Maßstab sich nicht verändert, wenn man ihn von einer Lage in eine andere befördert. In die Sprache der Geometrie übersetzt bedeutet dies: ein auf dem Maßstab markiertes Punktepaar wird bei allen Bewegungen des Maßstabs in ein zu ihm kongruentes (deckungsgleiches) Punktepaar überführt. Damit haben wir die Idee des starren Körpers gefaßt, und zwar unter Verwendung der Idee der Kongruenz (von Punktepaaren oder Strecken).

Verfügen wir erst einmal über die Idee der Starrheit (oder Deformationsfreiheit) so läßt sich nach Helmholtz ein erhebliches Stück der Geometrie gewinnen, indem man für den starren Körper die sog. freie Beweglichkeit fordert. Im Augenblick brauchen wir diese Untersuchungen nicht zu verfolgen. Bedeutsam ist in unserem Zusammenhang vor allem die Tatsache, daß nicht nur - wie gerade gezeigt - die Idee der Starrheit aus der Idee der Kongruenz hervorgehen kann, sondern auch das Umgekehrte der Fall ist. Denn wie überzeugen wir uns von der Kongruenz zweier Strecken in verschiedener Raumlage? Doch wohl indem wir eine von ihnen auf einen starren Maßstab übertragen und die Markierung anschließend mit der anderen Strecke in Kontakt bringen. Geometrische Starrheit und Kongruenz sind im Grunde ein und dieselbe Idee. Aber wie sieht diese für die gesamte Geometrie fundamentale Idee überhaupt aus? Können wir sie insbesondere durch Homogenitätsforderungen präzisieren?

Zunächst scheint eines klar zu sein: Wir können nicht ohne weiteres Starrheit durch Kongruenz definieren und dann die Kongruenz durch Streckenübertragung mit starren Körpern erklären. Damit geriete man in einen Definitionszirkel und verlöre zudem den Bezug zur Wirklichkeit (vgl. auch unsere Ausführungen zum Prinzip der pragmatischen Ordnung in 5.4). Wir stehen also vor der Alternative, Starrheit oder Kongruenz jeweils unabhängig voneinander zu definieren. Die ältere empiristische Wissenschaftsphilosophie entschied sich zumeist für die Starrheit, sie leugnete aber, daß es sich bei ihr um eine Idee handelt. Danach soll der Inhalt des Begriffs 'starrer Körper' durch mehr oder weniger willkürliche Wahl eines materiellen Prototyps festgelegt werden, den starr zu nennen die Mehrheit der Physiker übereingekommen ist. Will man umgekehrt die Kongruenz definieren, ohne vom starren Körper Gebrauch zu machen, so muß man festlegen, wie anders als durch deformationsfreie Maßstäbe Distanzen zwischen beliebigen Raumstellen auszumessen seien.

Gewöhnlich geschieht dies durch Lichtstrahlen, die von den betreffenden Punkten ausgehen. Dabei entsteht eine merkwürdige Schwierigkeit aufgrund der energetischen Natur des Lichtes: Einerseits verhält es sich wie eine elektromagnetische Erscheinung, andererseits unterliegt es den Gesetzen des Schwerefeldes, z.B. wird ein Lichtstrahl beim Vorbeilaufen an einer großen Masse geringfügig abgelenkt. Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie liefert ein einheitliches Bild dieses Sachverhalts, indem sie elektromagnetisches Feld und Gravitationsfeld durch ein einziges theoretisches Modell beschreibt. In diesem Modell ist die Bahn eines Lichtstrahls stets eine Gerade, und seine vermeintliche Ablenkung im Schwerefeld der Sonne wird mit der Struktur des Raumes selbst erklärt. Das gelingt aber nur dadurch, daß man sich die Vorgänge in einen nicht-euklidischen Raum hineinverlegt denkt.

Einsteins Theorie ist viel bewundert, anfänglich aber auch scharf kritisiert worden, und das zumeist wegen der in ihr verwendeten nicht-euklidischen Geometrie (in der das Parallelenaxiom nicht gilt). Solche Kritik ist u.a. auch von Dingler ausgegangen. Wir möchten die leidige Streitfrage nicht verniedlichen, aber zu ihrer richtigen Einschätzung doch daran erinnern, daß Einstein in seiner Theorie ein nicht-euklidisches <u>Modell</u> des physikalischen Raumes entwickelt hat. Es handelt sich nicht um die Behauptung, der Realraum sei <u>an sich</u> nicht-euklidisch. Weder diese These noch ihr Gegenteil haben für sich genommen irgendeinen Sinn, wenn man nicht angibt, nach welchem Verfahren die Kongruenz von Strecken festgestellt werden soll. Kurzum: Welche Art von Geometrie wir in einer physikalischen Theorie anwenden, wird weitgehend durch das Verfahren bestimmt, mit dem wir die Distanzen zwischen den Punkten unseres Raumes ausmessen. Insofern steht es jedem frei, durch die Einführung eines solchen Verfahrens eine andere als die Einsteinsche Geometrie des physikalischen Raumes zu entwickeln. Es ist sogar möglich, das Verfahren so zu wählen, daß dabei die euklidische Geometrie herauskommt. Beide Methoden haben ihre Vor- und Nachteile. Die Gründe, sich für eine von ihnen zu entscheiden, sind nicht absolut zwingend. Dennoch scheint die Einsteinsche Theorie den Vorzug zu verdienen: ihre Geometrie ist zwar komplizierter als die euklidische, dafür gestattet sie aber eine (von den meisten Physikern höher bewertete) erheblich einfachere Formulierung der physikalischen Gesetze (eine übersichtliche Diskussion gibt R. Carnap (1966/1974), S.163ff). Es ist daher die Frage, ob mit der Durchsetzung euklidischer Strukturen in der Physik mehr erreicht werden kann, als unser wissenschaftliches Denken im Gebrauch einer liebgewordenen aprioristischen Schablone zu bestärken.

Der Leser wird nun vielleicht befürchten, wir wollten die Geometrie vor dem Hintergrund der Allgemeinen Relativitätstheorie entwickeln - der Bezug zur Wirklichkeit wäre hierdurch ja zweifellos gewährleistet. Wir schlagen aber einen anderen Weg ein, und zwar aus didaktischen Gründen, die sich aus dem Prinzip der pragmatischen Ordnung ergeben. Man vergegenwärtige sich noch einmal, daß es uns um eine vom operativen Standpunkt aus interpretierende Genese der Geometrie zu tun ist. Würden wir eine optische Distanzmessung zur Einführung der Kongruenz verwenden, so befänden wir uns an einer relativ fortgeschrittenen Stelle innerhalb der Kette derjenigen Operationen, mit deren Hilfe die geometrische und physikalische Wirklichkeitserkenntnis zustande kommen kann. Mit Recht wiederholt Lorenzen die Einsicht Dinglers, daß man für die optischen Verfahren bereits Geräte hergestellt haben muß, die ihrerseits gewisse Homogenitätseigenschaften besitzen. So werden wir zu der Idee der Kongruenz bzw. der Starrheit zurückgeführt. Wenn wir im folgenden abzuwägen haben, welche Variante dieser Idee aus operativer Sicht den Vorzug verdiene und wie diese Variante einzuführen sei, so werden wir uns nicht von der Vorstellung behexen lassen, es müsse sich am Ende eine ganz bestimmte Geometrie ergeben. Für das didaktische Problem der Geometriegenese ist es von vergleichsweise geringer Bedeutung, ob wir nun eine euklidische oder eine andere Geometrie entwickeln; ausschlaggebend ist der Wirklichkeitsbezug sowie die operative Interpretierbarkeit dieser Entwicklung.

Reduktion der Kongruenz?

Beginnen wir mit der Kongruenz. Bei Hilbert ist sie ein undefinierter Grundbegriff, aber das muß nicht unbedingt so sein. K. Reidemeister (1957) hat daran erinnert, daß die euklidische Geometrie ebenso ausgestaltet werden kann, indem man von Inzidenz, Parallelität sowie Rechtwinkligkeit (Orthogonalität) ausgeht. Man erklärt dazu Rhomben als Parallelogramme mit rechtwinkligen Diagonalen und "über die Rhomben dann die Kongruenz für Strecken" (S.111). Dieses Verfahren wählt auch Lorenzen, und zwar vor allem deswegen, weil er Parallelität und

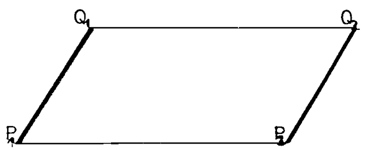


Abb.183

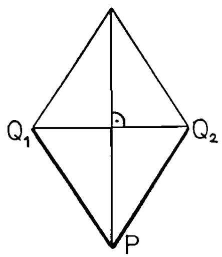


Abb.184

Orthogonalität durch geeignete H-Schemata einführen will. Wir skizzieren zunächst kurz die angedeutete Definition der Kongruenz. Zwei Punktepaare (P_1, Q_1) und (P_2, Q_2) sollen parallelkongruent heißen, wenn durch P_1, Q_1 und P_2, Q_2 sowie durch Q_1, Q_2 und P_1, P_2 jeweils zwei parallele Geraden verlaufen, d.h. wenn das Parallelogramm in Abb.183 existiert. Im Falle $P_1 = P_2 = P$ heißen die Paare spiegelungskongruent, falls die Figur in Abb.184 ein Rhombus ist, d.h. ein Parallelogramm mit zueinander senkrechten Diagonalen.

Kongruent werden schließlich solche Punktepaare im Raum genannt, die zu einem geeigneten dritten Punktepaar parallel- oder spiegelungskongruent sind (Abb.185), wobei die beiden auftretenden Parallelogramme i.a. nicht in derselben Ebene zu liegen brauchen (vgl. Lorenzen (1961/1968), S.127f).

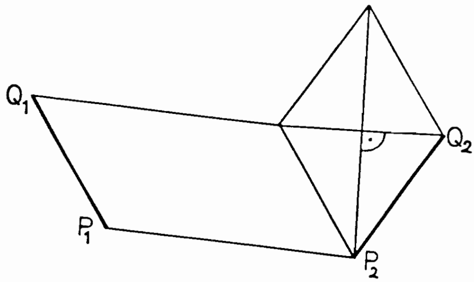


Abb.185

Ersichtlich wird in dieser Definition der Kongruenz die Idee des starren Körpers nirgends benutzt. Dafür treten aber die Beziehungen 'parallel' und 'orthogonal' auf, die nun ihrerseits ohne Verwendung von Kongruenz- oder Starrheitsbegriff einzuführen sind. Bei 'parallel' scheint dies nicht besonders schwierig zu sein; schon Euklid hat die Parallelität allein mittels der Inzidenz definiert. Danach sind zwei Geraden in einer Ebene (oder zwei Ebenen im Raum) genau dann parallel, wenn sie identisch sind oder keinen Punkt gemeinsam haben. - Eine andere, einfachere Möglichkeit besteht darin, zwei Ebenen parallel zu nennen, wenn sie beide zu einer dritten Ebene orthogonal sind. Beide Definitionen haben den Vorzug, daß allein noch die Orthogonalität eingeführt zu werden braucht.

Dennoch hat Lorenzen die Definitionen ursprünglich nicht in sein 'protophysikalisches Programm' aufgenommen, vermutlich wegen der dann wohl resultierenden Unabhängigkeit des Parallelenaxioms. (Gemeint ist hier die Tatsache, daß das Parallelenaxiom nicht aus den übrigen Axiomen der Geometrie abgeleitet werden kann. Man entdeckte dies im 19.Jahrhundert durch Modelle für das restliche Axiomensystem, in denen innerhalb einer Ebene durch einen außerhalb einer

Geraden g gelegenen Punkt unendlich viele Parallelen zu g verlaufen.) In dem Bestreben, seine 'protophysikalische' Geometrie als euklidisch nachweisen zu können, hat Lorenzen dann ein H-Schema für die Parallelität von Ebenen aufgestellt, das wir jedoch für ungeeignet halten und an dieser Stelle nicht näher erörtern wollen. Aussichtsreicher scheinen die Dinge bei der Orthogonalität zu liegen. Man erinnere sich, daß schon Euklid Geraden als senkrecht ansieht, wenn ihre Schnittwinkel ununterscheidbar sind. Aber hier tritt der Begriff des Winkels auf, der gewöhnlich kein Grundbegriff der Geometrie ist und den es daher in einer Homogenitätsforderung geschickt zu umgehen gilt. Lorenzen bietet dazu gleich zwei Wege an (wobei offen bleibt, welchen von ihnen wir als den besseren ansehen sollen).

Erste Möglichkeit: Man betrachtet das H-Schema für folgende Relation $\varrho_1(E,g;h)$ zwischen einer Ebene E mit einer Geraden g und einer Geraden h :

g steht senkrecht auf E , alle Punkte auf h sind Punkte von E , und alle g und E gemeinsamen Punkte liegen auf h .

Das entsprechende H-Schema

$$\varrho_1(E,g;h) \wedge \varrho_1(E,g;h') \wedge \mathfrak{A}(E,g,h) \longrightarrow \mathfrak{A}(E,g,h')$$

beschreibt somit die Ununterscheidbarkeit aller in E verlaufenden Geraden durch den Fußpunkt des Lotes g auf E (vgl. Lorenzen (1961/1968), S.135). Man kann sich das gut an der Konfiguration in Abb.186 einsichtig machen.

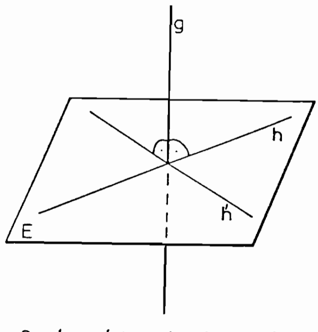


Abb.186 *Senkrecht auf einer Ebene (senkrecht 1)*

Zweite Möglichkeit: Man betrachtet das H-Schema für die Relation $\varrho_2(E,F;P)$ zwischen Ebenen E, F und einem Punkt P :

E steht senkrecht auf F , und P inzidiert weder mit E noch mit F .

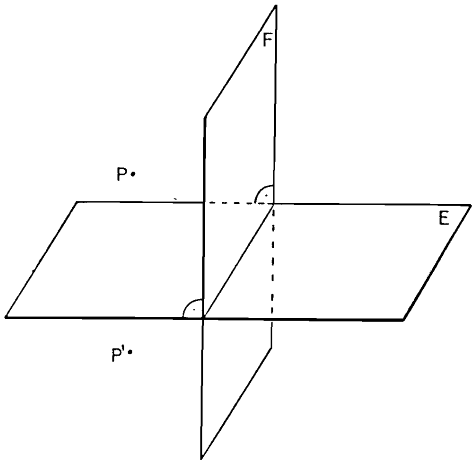


Abb. 187 *Orthogonale Ebenen (senkrecht 2)*

Bei dem zugehörigen Schema

$$\varrho_2(E,F;P) \wedge \varrho_2(E,F;P') \wedge \mathfrak{A}(E,F,P) \longrightarrow \mathfrak{A}(E,F,P')$$

haben wir es nach Lorenzen mit einer Forderung von "äußerer" Homogenität zu tun (vgl. Kamlah/Lorenzen (1967), S.231), und zwar deshalb, weil die Ununterscheidbarkeit von den außerhalb der Ebene gelegenen Raumpunkten gefordert wird. Offenbar soll die äußere Homogenität präzisieren, was Euklid mit der Ununterscheidbarkeit der Schnittwinkel lotrecht zueinander stehender Geraden gemeint hat. Wir halten das aber für einigermaßen zweifelhaft. Was in Wirklichkeit zum Ausdruck kommen muß, ist die Kongruenz dieser Schnittwinkel bzw. der in obiger Konfiguration entstehenden Viertelräume. In praktischer Sprechweise: Ein bei P gemachter Abguß passt in den P' umgebenden Viertelraum. Hier ebenso wie im allgemeinen Fall läßt sich die Kongruenz zweier Raumstücke schwerlich durch die Ununterscheidbarkeit ihrer inneren Stellen wiedergeben. (Wer das annimmt, könnte sich im übrigen gleich an diese Version halten und ganz darauf verzichten, die Kongruenz erst mit Hilfe der Orthogonalität einzuführen.)

Wir werden auf diese Schwierigkeiten später noch einmal eingehen, wenn wir die Realisation (reelle Exhaustion) geometrischer Ideen genauer erörtern. Man beachte aber bereits die phänomenologische Verschiedenheit, die sich in den Relationen 'inzidiert' und 'kongruent' manifestiert: Das Inzidieren einer Raumstelle mit einem Gebilde ist der Anschauung unmittelbar zugänglich. Dagegen müssen wir uns für die Kongruenz zweier Raumteile stets eine Bewegung vollzogen denken, die den einen Teil in den anderen überführt. Es ist daher nicht anzunehmen, daß sich die Idee der Kongruenz (und damit die der Orthogonalität) *allein* aus einer Homogenitätsvorstellung gewinnen läßt, denn in die Homogenität geht wesentlich nur die Inzidenzbeziehung ein. - Die methodische Konsequenz aus all dem ist einfach: Wenn wir zur Kongruenz über die Orthogonalität gelangen wollen, so jedenfalls nicht auf der Basis des H-Schemas für ϱ_2 .

Man wird sich daher fragen, was demgegenüber das erste H-Schema leistet. Es postuliert die Ununterscheidbarkeit der Geraden einer Ebene, die gemeinsam durch den Fußpunkt eines Lotes auf diese Ebene verlaufen. Etwas schwierig dürfte wohl die Handhabung des Schemas zu erklären sein, z.B. für den Fall, daß wir die Fußpunktgeraden bei nicht lotrechter Geraden g unterscheiden wollen. Möglicherweise hätte man dann allein die Winkel (!) zur Verfügung, die g mit den verschiedenen Fußpunktgeraden einschließt. Wie dem auch sei - in offenkundiger Weise zirkulär oder dem zu Definierenden unangemessen ist das H-Schema für ϱ_1 nicht. Wir lassen daher seine eventuelle Rolle bei der Entwicklung der Geometrie in der Schwebe, werden es jedoch im weiteren nicht verwenden. Als *Fazit* bleibt hier nur festzuhalten: Die Idee der Kongruenz (bzw. Starrheit) aus anderen geometrischen Begriffen zu gewinnen, ist wohl nicht von vornherein als logisch unmöglich auszuschließen, ist aber bei Gebrauch von Homogenitätsforderungen für diese Begriffe einigermaßen fraglich und erscheint uns daher unter genetischen Gesichtspunkten als wenig geeignet.

Hat man sich diese Meinung erst einmal zueigen gemacht, so ist es nur noch ein kleiner Schritt bis hin zu unserem Vorschlag, die Geometrie bei der Idee der Kongruenz selbst beginnen zu lassen. Natürlich ist das kein neuer Gedanke. Gleichwohl erhält er aber einen besonderen Akzent dadurch, daß er innerhalb einer operativ interpretierenden Geometriegenese angesetzt wird. Zudem wollen wir ihn durch eine *simultane Einführung von Kongruenzbegriff und Idee des starren Körpers* zu verwirklichen suchen. Das wird in 9.3 geschehen. Werfen wir vorab einen Blick auf die Gründe, die sich zugunsten dieses Vorgehens ins Feld führen lassen. Dabei haben wir es im wesentlichen mit drei Argumenten zu tun:

1. Das Senkrechtstehen (und damit erst recht die Parallelität) wird nicht nur systematisch einfach, sondern auch operativ ganz natürlich definierbar, indem wir von orthogonalen Ebenen die Kongruenz der von ihnen begrenzten Viertelräume verlangen. Haben wir uns erst einmal von dem Zwang befreit, Kongruenz mittels Orthogonalität erklären zu müssen, so wirkt sich, was zuvor den sinnvollen Einsatz von Homogenitätsforderungen behinderte, nunmehr geradezu als Vorteil aus.

2. Mehr als andere Ideen führen uns 'Kongruenz' und 'starrer Körper' in die Nähe jenes zentralen Bezirks geometrischer Operationen, die mit der Längenmessung

und, allgemeiner, mit der Maßbestimmung räumlicher Verhältnisse zu tun haben. Eine operativ abgestützte Gewinnung des Längenbegriffs ist nur schwer vorstellbar ohne Einsicht in das Abtragen kongruenter Strecken an starren Meßlatten.

3. Schließlich erwähnen wir die aus operativer Sicht bedeutungsvolle Realisierung geometrischer Ideen, d.h. deren angenäherte Herstellung an materiellen Körpern. Diese Körper müssen bis zu einem gewissen Grade deformationsfrei sein. E. Bopp hat darauf in seinen Schriften wiederholt hingewiesen. Das 'bis zu einem gewissen Grade' bedeutet (vor allem bei geometrischen Zwecken): so starr wie möglich, und so nicht-starr wie nötig (um die Körper noch mechanisch bearbeiten zu können).

Äußere Homogenität

Wir hatten oben den Versuch zurückgewiesen, die Kongruenz mit Hilfe einer äußeren Homogenität zu gewinnen, d.h. einer Forderung über Raumstellen, die nicht mit dem herzustellenden Gebilde inzidieren. Allem Anschein nach bedarf es aber einer solchen Forderung, wenn man die Ebene von den ebenfalls (innerlich) homogenen Flächen 'Kugel' und 'Zylinder' unterscheiden will. Tatsächlich kann man etwa außerhalb einer Kugel liegende Punkte von Punkten in ihrem Inneren mit Hilfe folgender Eigenschaft $\mathfrak{A}(F,P)$ (bezüglich der Kugel F) unterscheiden:

$\mathfrak{A}(F,P)$: Es gibt eine Ebene durch P, die mit F keinen Punkt gemeinsam hat.

Die äußeren Punkte besitzen diese Eigenschaft, die inneren nicht. Dasselbe gilt für den Zylinder. Bei der Ebene verhält es sich anders; von ihr ist zu verlangen, daß eine (parameterfreie) Eigenschaft, die ein nicht auf ihr liegender Punkt besitzt, jedem anderen äußeren Punkt (gleichgültig in welcher Raumhälfte) zukommt. Die entsprechende Forderung ist das *Schema der äußeren Homogenität* für F:

Sind S, S' irgend zwei nicht mit F inzidierende Stellen und gilt eine (parameterfreie) Formel $\mathfrak{A}(F,S)$, so gilt auch $\mathfrak{A}(F,S')$.

Wir schreiben formal mit einem Relationszeichen $\mid$ für die Inzidenz:

$$\neg S \mid F \wedge \neg S' \mid F \wedge \mathfrak{A}(F,S) \longrightarrow \mathfrak{A}(F,S') \qquad (\mathfrak{A} \in \mathfrak{L}).$$

Natürlich ist dieses Schema ein Spezialfall des allgemeinen H-Schemas, man hat bloß für $\varrho(F,S)$ zu setzen: $\neg S \mid F$. Wird $\varrho(F,S)$ durch $S \mid F$ erklärt, so ergibt sich die bisherige Fassung der Homogenität, die als 'innere' von ihrer 'äußeren' Variante deutlich abzuheben ist.

Ausblick

Insgesamt zeichnet sich nach den vorangegangenen Überlegungen ein deutlicheres Bild von den theoretischen Grundlagen unserer Geometriegenese ab. Zwei Stellen haben wir ausgemacht, an denen sich Geometrie und Wirklichkeit berühren: erstens die simultane Einführung von Kongruenzbegriff und Idee des starren Körpers - ein Vorgehen, bei dem im übrigen die Homogenität keine unmittelbare Rolle übernimmt; zweitens die Homogenitätsforderungen an geometrische Grundformen (vor allem an die Ebene), die sich als das eigentliche Anwendungsgebiet für H-Schemata herausschälen. - Beide Teile kennzeichnen wohl den Wirklichkeitsbezug des geometrischen Denkens, sie reichen aber keinesfalls aus, um auch schon die gewöhnlichen Sätze der Elementargeometrie formal abzuleiten. Hierzu bedarf es, wie an späterer Stelle auszuführen sein wird, geeigneter Existenzannahmen, die man nicht aus einer Beschreibung jener allgemeinen Ideen gewinnen kann.

Überdies haben wir bislang die - wenn man so will - topologischen Grundbegriffe der Geometrie zu wenig beachtet: Inzidenz (Zusammenfallen von Punkten mit Geraden oder Ebenen) und Zwischenrelation (z.B.: Punkt liegt zwischen zwei nicht inzidierenden Ebenen). Diese Beziehungen stellen keine geometrischen Ideen dar in dem für uns maßgeblichen Sinne, sie besitzen sogar - anders als etwa 'Ebene' und 'Gerade' - ein klar und eindeutig auszumachendes anschauliches Substrat. Liegt eine Stelle S auf einer Fläche F und zwischen zwei anderen Flächen F_1 und F_2 , die den Gesamtraum jeweils in zwei disjunkte Teile zerschneiden, und wird das diese Gebilde umschließende Raumgebiet einer topologischen Transformation unterworfen, so bleiben die bestehenden Beziehungen erhalten, d.h. für die (durch ' gekennzeichneten) Abbilder gilt: S' liegt auf

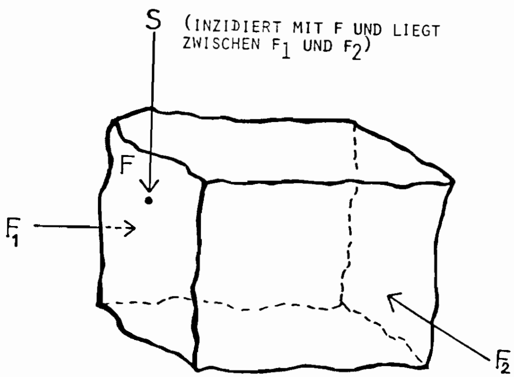


Abb.188 Zur Exemplifikation von Inzidenz und Zwischenrelation

F' und zwischen F'_1 und F'_2 . R. Carnap hat das in seiner Dissertation (1922, S.66) zu der Annahme veranlaßt, der Tatbestand der Erfahrung könne nicht in mehreren verschiedenen topologischen Formen erscheinen. Einiges spricht zugunsten dieser Annahme. Wir können Inzidenz und Zwischenliegen unmißverständlich am Einzelphänomen in der Wahrnehmung aufweisen, am physischen Modell oder innerhalb einer Zeichnung exemplarisch einführen. 'Unmißverständlich' bedeutet dabei: die vorstellungsmäßig repräsentierten Begriffsinhalte sind praktisch unabhängig davon, wie genau die Wahrnehmung oder Zeichnung ausfällt bzw. wie vollkommen am gewählten physischen Modell die geometrischen Grundformen realisiert wurden (s. Abb.188).

7.5. Bemerkungen zum Interpretationsproblem

Nunmehr haben wir uns den früher bereits erwähnten Fragen zuzuwenden, die bei der Interpretation der geometrischen H-Schemata auftreten. Wir werden hier das Interpretationsproblem weder restlos klären oder gar lösen, sondern so weit wie möglich verdeutlichen, worin es besteht und welches seine hauptsächlichen Schwierigkeiten sind. Dazu betrachten wir zunächst allein das H-Schema für die innere Homogenität einer Fläche F :

Hmg: $S \mid F \wedge S' \mid F \wedge \mathfrak{A}(F,S) \longrightarrow \mathfrak{A}(F,S') \quad (\mathfrak{A} \in \Omega)$.

Wir wollen vorab die Frage ausklammern, ob man sich unter F nun eine Ebene oder eine andere innerlich homogene Fläche vorzustellen habe. Es kommt uns hier ganz allein auf den Umstand an, daß durch Hmg überhaupt die fragliche innere Homogenität ausgedrückt werden soll. Gerade das ist nämlich in einem gewissen Sinne problematisch. Wir verweisen dazu auf die Rolle, welche die Klasse Ω der zugelassenen Formeln für den logischen Status sowie die Handhabung des betreffenden H-Schemas spielt. An der Präzisierung dieser Klasse hängt in der Tat das ganze Interpretationsproblem.

Wenn man sich daran erinnert, daß Ω aus gewissen einschlägigen Formeln besteht (wir wollen gelegentlich auch von 'Eigenschaften' sprechen), so wird man damit auf die naheliegende Frage geführt, in welcher Sprache die Formeln denn einschlägig zu sein haben. Zur formalen Herleitung geometrischer Sätze benötigen wir die Sprache der Geometrie, in etwa wie Hilbert sie in seinen Grundlagen verwendet. An sich spricht nichts gegen ein H-Schema in dieser geometrischen Sprache. Ebensowenig ist es auszuschließen, daß so formulierte Schemata an irgendeiner späteren Stelle der Geometriegenese sinnvoll einzusetzen sind. Es verstieße jedoch in eklatanter Weise gegen das Prinzip der pragmatischen Ordnung, wollte man die Sprache der Geometrie an den Anfang dieser Entwicklung stellen - in ihr reden wir ja bereits über Ebenen, Geraden, Punkte etc.

wie über fertig vorgegebene Grundformen. Dabei soll doch die Aufgabe des obigen H-Schemas Hmg gerade darin liegen, das Reden über diese Grundformen erst einmal zu ermöglichen.

Aber wie hat man sich das vorzustellen? Dingler verweist uns dazu an die "vortheoretische Sphäre des täglichen Lebens und Handelns" (1933, S.31), kurzum an das, was man seit E. Husserl gerne auch 'Lebenswelt' nennt. Solange wir noch ganz inmitten dieser vortheoretischen Lebenswelt stehen, also noch nicht über Theorien, Meßverfahren, technische Geräte usw. verfügen, beschränkt sich unser Wahrnehmungs- und Unterscheidungsvermögen auf das von Dingler so genannte "unmittelbare Erleben" (S.10). Der Begriff des unmittelbaren Erlebens birgt natürlich seine Schwierigkeiten. Zunächst einmal sollte man ihn nicht sensualistisch verstehen, so als bestünde die gesamte Lebenswelt aus nichts anderem als Sinnesempfindungen. Weiterhin stößt man auf die Frage, wie unmittelbar das unmittelbare Erleben denn eigentlich sei. Inwieweit kann es das Bewußtsein von Unterschieden vermitteln, wenn noch gar keine oder nur wenige Begriffe vorhanden sind? Wir müssen hier diese tief ins Grundsätzliche dringenden Fragen überspringen und davon ausgehen, daß wir auf vorwissenschaftlichem (nicht unwissenschaftlichem!) Niveau eine vielleicht noch sehr unentwickelte Sprache vorfinden, in der es gleichwohl möglich ist, im unmittelbaren Erleben gegebenen Unterschieden (Gleichheiten, Ähnlichkeiten etc.) zu hinlänglich deutlichem Ausdruck zu verhelfen. Was 'hinlänglich' ist, hängt dabei von der jeweiligen Situation ab; möglicherweise genügt ein geeignetes System aus Zeigehandlungen, Befehlen oder dergleichen.

Wir können aber nicht allein die vortheoretische Sprache nur höchst unscharf bestimmen, viel schwieriger noch, ja geradezu unmöglich dürfte es sein, die in dieser Sprache formulierbaren einschlägigen Eigenschaften anders als bloß vage abzugrenzen. Dabei kann auch eine Formalisierung der Ausdrucksbildung kaum weiterhelfen. Im Gegenteil, sie schüfe wohl einen gewissen symbolischen Standard und exakte Formregeln, doch geriete gerade dadurch der lebensweltliche Sinn jener Sprachgebilde in Gefahr verfälscht zu werden - man denke nur an die eigentümliche Vagheit vieler in alltäglicher Sprache formulierter Eigenschaften, die die Rolle der Formeln $\mathfrak{A}(F,S)$ in Hmg zu übernehmen hätten.

Z.B.: 'Bei normalem Tageslicht kann man erkennen, daß durch die Stelle S auf F eine winzige Rille verläuft.'

Oder: 'Wenn man die nähere Umgebung der Stelle S behutsam mit den Fingerkuppen überstreicht, so erweist sich dort die Oberfläche F als etwas rauh.'

Aus diesen und ähnlichen Eigenschaften besteht das anfängliche Repertoire Ω , und die Idee der innerlich homogenen Fläche ist auf diesem Niveau nicht mehr und nicht weniger als was durch das auf Ω eingeschränkte H-Schema ausgedrückt werden kann. Sicherlich schält sich dabei schließlich eine einfache vorgeometrische Sprache heraus, die wir uns nach Lorenzen am besten anhand eines Steinquaders (Ziegelsteins) mit grob vorgeebneten Seitenflächen eingeführt denken. Diese Seiten heißen dann 'flach' oder substantivisch 'Flache'; 'Kanten' bilden die Begrenzung aufeinanderstoßender flacher Seiten; drei zusammentreffende Kanten enden in einer 'Ecke' usw. Eine lange Liste vorgeometrischer Vokabeln ist bei P. Janich (1976a, S.93ff) entwickelt. In einer weiteren Stufe können wir also auch diejenigen Eigenschaften in Ω aufnehmen, die sich in einer solchen vorgeometrischen Sprache ausdrücken lassen. Allerdings stehen wir damit noch nicht in der Geometrie, insbesondere verfügen wir noch nicht über die Idee der Ebene im geometrischen Sinne.

Es gibt zwei Wege, auf denen wir diesen einigermaßen provisorischen Zustand verlassen können: die Ideation und die Exhaustion. Beide Verfahren werden noch ausführlich beschrieben und erörtert. Wir wollen aber hier schon kurz anzudeuten versuchen, worum es dabei im Zusammenhang mit dem Interpretationsproblem geht.

Die Ideation stellt ein Vorgehen dar, bei dem die Idee der Ebene oder irgendeine andere Idee durch einen einmaligen Sprung erreicht werden soll. Bei der Exhaustion will man ihr in mehr oder weniger kleinen Schritten allmählich näherkommen. Im Hinblick auf das Eigenschaftsrepertoire Ω bedeutet dies: Der ideative Weg wechselt abrupt die Sprache. War vorher in der Auffassung des unmittelbaren Erlebens und einer darauf beruhenden 'handwerklichen' Interpretation die Rede von Flachen, Kanten, Ecken etc., so wird nach der Ideation stattdessen von Ebenen, Geraden, Punkten etc. gesprochen. Geometrische Erkenntnisse lassen sich dann unter anderem begründen, indem man sie aus Homogenitätsforderungen ableitet, die nun die neuen Termini statt der vorgeometrischen enthalten. Aus ideativer Sicht erfolgt also die Rede von Objekten so, als ob sie jenen Forderungen genügten.

Die Exhaustion verfährt demgegenüber anders. Sie ist von dem Bemühen geleitet, das anfängliche Repertoire Ω sukzessive zu erweitern. Je umfassender Ω wird, je mehr Eigenschaften also bei der Unterscheidung von Flächenstücken miteinander konkurrieren, desto besser wird die Realisierung der entsprechenden Flachen, Kanten und Ecken. Neue Eigenschaften lassen sich dadurch hinzugewinnen, daß man Kontrollverfahren entwickelt, mit denen das Vorliegen der betreffenden Eigenschaften überprüft werden kann. Wer über das unmittelbare Erleben und die einfachsten handwerklichen Methoden hinauskommen will, der wird früher oder später physikalische Vorgänge auszunutzen suchen. Dingler spricht hier vom "Eingreifen der 'Physik'" (1933, S.44). Doch ist bei dieser Art physikalischer Interpretation darauf zu achten, daß wir mit ihr nicht das Prinzip der pragmatischen Ordnung verletzen. Das wäre z.B. dann der Fall, wenn von physikalischen Theorien Gebrauch gemacht würde, die sich ihrerseits wiederum auf bestimmte geometrische Erkenntnisse stützen. Dingler verlangt daher die "völlig untheoretische Natur" derartiger Prüfverfahren; er hält die von ihm so genannten "Abhängigkeitserlebnisse" für in diesem Sinne geeignet (vgl. S.46f). Aber wie weit auch immer man hier gehen mag, im Rahmen der Exhaustion lassen sich geometrische Ideen stets bloß relativ zur jeweils erreichten Eigenschaftsklasse Ω begreifen. Aus dieser Sicht gibt es nicht so ohne weiteres die Idee der Ebene, der Kongruenz etc. Bestenfalls ist 'die Idee' als 'Horizont' des exhaurierenden Vorgehens zu verstehen, als dessen 'Grenzfall', dem man durch immer neue Interpretationen hinreichend nahe kommt.

Dieses Phänomen läßt sich auf einfache Weise auch schon durch die innersystematische Auffassung von $\mathrm{Hmg}(\varrho\,;\Omega)$ vor Augen führen. Verfügen wir in Ω nur über topologische Eigenschaften, so sind als Flächen Kugel und Würfel gleichermaßen homogen. Kommen Stützeigenschaften hinzu, so können wir Eckpunkte und Punkte auf der Würfelkante von den übrigen regulären Punkten unterscheiden; allerdings sind dann alle glatten Flächen homogen. Daß z.B. Kugel und Ellipse verschieden sind und insbesondere auf einem Ellipsoid i.a. verschiedene Stellen existieren, erweist sich erst nach Hinzunahme von Krümmungseigenschaften zu Ω.

7.6. Symmetrie und Homogenität

Wir wollen nun noch der Frage nachgehen, in welchem Verhältnis die Begriffe 'symmetrisch' und 'homogen' zueinander stehen. In vereinzelten Passagen dieses Kapitels deutete das Thema sich bereits an (z.B. am Ende von 7.1 oder - zaghafter - bei der Gegenüberstellung von Inzidenz und Kongruenz in 7.4). Es verdient aber auch Interesse um seiner selbst willen schon deshalb, weil zumindest für einen Mathematiker die Verwandtschaft von Symmetrie und Homogenität gleichsam in der Luft liegt. Das Thema ist wichtig, für die operative Geometriegenese jedoch nicht lebenswichtig. Wir wollen dem Leser daher die Beschäftigung mit diesem Problem erleichtern, indem wir uns im folgenden auf intuitiv verständliche Überlegungen beschränken und die vollständigen formalen Betrachtungen in 10.2 nachholen. Die beiden sich nun unmittelbar anschließenden Vorbemerkungen sind von allgemeinerer Art. (Der an Logik weniger interessierte Leser kann die Bemerkung b) ohne weiteres überspringen.)

a) Homogenität ist, ebenso wie Symmetrie, eine Idee von beträchtlicher Allgemeinheit. Sie läßt sich aber aus einer noch allgemeineren Idee gewinnen, die ebenso abstrakt ist wie die vorhin erwähnte Exhaustion und für das mathematische Denken eine vergleichbar wichtige Schlüsselrolle spielt: die Idee der Invarianz. Beide Konzepte, Exhaustion und Invarianz, haben eine vielfältige

Bedeutung, nicht zuletzt für das Anwenden von Mathematik und nicht allein als mathematisch explizierte Begriffe. In mathematischem Gewand sind sie geläufig als 'Approximation' bzw. 'Gruppe', und auf solche Weise bilden sie Muster für eine Reihe zentraler Begriffe in vielen mathematischen Disziplinen. Für die Exhaustion verweisen wir dazu auf 9.1; für die Invarianz erinnern wir nur an ihre Bedeutung in der Algebra (Galoissche Theorie; strukturerhaltende Abbildungen), in der Geometrie (Invariantentheorie; sog. Erlanger Programm, vgl. dazu die bemerkenswerten Erläuterungen von H. Weyl (1928/1966), S.98ff), in der Physik (Erhaltungssätze; Invarianz der Theorien als Strukturprinzip, vgl. F. Hund (1969), S.70ff), sowie schließlich auch ganz allgemein bei der Herausbildung von 'Formen' (z.B. Gestalten der Wahrnehmung, bedingt durch Konstanzleistungen, vgl. K. Lorenz (1959/1968); oder logische Formpartikel, gekennzeichnet durch Invarianzforderungen, vgl. A. Schreiber (1978b)). Wir haben 'Approximation' und 'Gruppe' gerade als das bezeichnet, was den im mathematischen Vorfeld angesiedelten Konzepten 'Exhaustion' bzw. 'Invarianz' <u>innerhalb</u> der Mathematik entspricht. Ganz ähnlich liegt wohl in der Symmetrie (anschließend an die Gruppe) die mathematische Quintessenz der Homogenität (anschließend an die Invarianz); wir geben dazu ein schematisches Diagramm (Abb.189). Für die systematische Geometrie ist die Symmetrie ein zentraler Begriff; für die operative Geometriegenese, die ja im mathematischen Vorfeld beginnt, ist es die Homogenität.

"VORMATHEMATISCH"		"INNERMATHEMATISCH"
EXHAUSTION	⟶	APPROXIMATION
INVARIANZ	⟶	GRUPPE
↓		↓
HOMOGENITÄT	⟶	SYMMETRIE

Abb.189

b) Nach dem bisher Gesagten könnte man wohl auf den verlockenden Gedanken kommen, Homogenität und Symmetrie gleichsam in abstracto als äquivalente Begriffe nachzuweisen. Dies ist jedoch ein in mehrfacher Hinsicht schwieriges, vielleicht sogar aussichtsloses Unterfangen.

Zunächst liegt eine Schwierigkeit darin, daß die Begriffe verschiedenen Bereichen angehören: der eine der Mathematik, der andere ihrem Vorfeld. Einer ähnlichen Situation begegnet man in der Theorie der Algorithmen mit den Begriffen der (intuitiv) berechenbaren Funktion einerseits und der rekursiven

Funktion andererseits. Daß beide gleichwertig seien, besagt die sog. Churchsche These - eine Behauptung, die sich nicht beweisen läßt, aber mit deren Plausibilität man sich beschäftigen kann. Natürlich ist hier der Einwand möglich, daß im Unterschied dazu der Homogenitätsbegriff doch schon durch geeignete Formelschemata präzisiert und damit auch unabhängig vom Begriff der Symmetrie gefaßt ist. Das ist richtig, aber gerade in diesen Schemata liegen weitere Schwierigkeiten: Erstens liefern sie in der elementaren Geometrie (1. Stufe) keine Definition der Art 'Das Objekt a ist homogen genau dann, wenn ... ', da ja hierzu das Erfülltsein eines H-Schemas für alle Formeln der Klasse Ω ausgedrückt werden muß (was bei nicht-endlichem Ω explizit i.a. nur 2. Stufe möglich ist). Zweitens ist der Nachweis eines H-Schemas für ein (in irgendeinem Sinne) symmetrisches Gebilde deswegen problematisch, weil er entweder 2. Stufe oder metatheoretisch zu führen ist mittels einer geeigneten Induktion über den Aufbau der (gar nicht in offensichtlicher Weise induktiv erzeugbaren) Formeln aus Ω. Diese Schwierigkeit, auf die wir nochmals in 10.2 zurückkommen werden, wirkt sich speziell auch auf die nachfolgenden geometrischen Betrachtungen aus: Wir studieren wohl Symmetrieeigenschaften bei Vorliegen von Homogenität, müssen es aber umgekehrt bei der (nicht unvernünftigen) Arbeitshypothese belassen, daß symmetrische Flächen wie Ebene oder Zylinder ein H-Schema erfüllen. Wir nehmen also an, daß jede Einsetzung einer (parameterfreien) Formel in das H-Schema dieses in ein Theorem der (euklidischen) Geometrie verwandelt.

Sei $\mathfrak{A} \in \Omega$ mittels aussagenlogischer Verknüpfungen aus den Formeln $\mathfrak{A}_1$, ..., $\mathfrak{A}_n \in \Omega$ gebildet; dann läßt sich ein Beweis der H-Schema-Einsetzung mit $\mathfrak{A}$ aus vorausgesetzten Beweisen der H-Schema-Einsetzungen mit den $\mathfrak{A}_i$ (i=1,...,n) konstruieren. Es genügt die Analyse der Fälle $\mathfrak{A} = \neg \mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_2 \wedge \mathfrak{A}_3$.

Nun zu den intuitiven Überlegungen. Wir beginnen mit einer Betrachtung von Körpern, die (unserer Arbeitshypothese aus Bemerkung b) zufolge) eine homogene Oberfläche im Sinne des Prinzips der inneren Homogenität besitzen, und zwar: Ebene, Kugel und Zylinder. Bei diesen Flächen handelt es sich offenbar um geometrische Gestalten von hochgradiger Symmetrie. Strenggenommen kann von der Symmetrie einer Figur nur die Rede sein, wenn man angibt, unter welchen Abbildungen (Transformationen) des Gesamtraumes die in ihm liegende Figur in sich übergeführt wird.

Beispielsweise ist ein Schmetterling (als ebene Figur aufgefaßt) symmetrisch in bezug auf die Spiegelung an seiner Mittelachse. Ein vierblättriges Kleeblatt hat einen höheren Symmetriegehalt: Man kann es nicht nur an vier verschiedenen Achsen spiegeln, sondern auch noch um ganze Vielfache von 90° drehen.

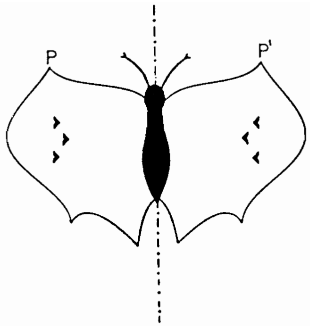


Abb.190

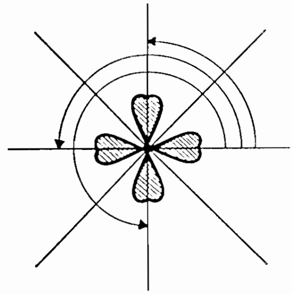


Abb.191

Von ganz anderer Art ist die Symmetrie von Ornamenten, insbesondere von (nach links und rechts unbegrenzt fortgesetzt zu denkenden) Streifenornamenten.

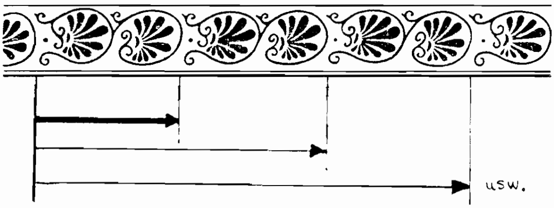


Abb.192

Der Streifen in Abb.192 läßt nur Verschiebungen (Translationen) längs seines Randes zu, die ganze Vielfache der Translation um die eingezeichnete Elementarlänge darstellen. - Weitere Beispiele (wie Bienenwabe, Tapetenmuster, Vasen, Methanmolekül) mag der Leser auf eigene Faust durchdenken oder in den schönen Büchern nachschlagen, die Hermann Weyl (1952/1955) und L. Fejes Tóth (1965) zum Thema Symmetrie geschrieben haben.

Schon diese wenigen Beispiele machen deutlich, daß der Symmetriebegriff an den Begriff der Abbildung gebunden ist. Haben wir allgemein einen Raum R (der nicht notwendig der dreidimensionale euklidische Raum sein muß), ferner eine Gruppe $\mathbf{G}$ von bijektiven Selbstabbildungen von R und eine Figur (Teilmenge) F in R, so interessiert die Menge aller Abbildungen aus $\mathbf{G}$, welche die Figur F in sich selbst überführen. Diese Menge bildet eine Untergruppe von

G , die sog. Symmetriegruppe von F in G . Die Symmetriegruppe einer Figur gibt uns Einblick in Art und Gehalt der vorliegenden Symmetrie. Ist etwa F ein völlig irregulärer Klecks auf der euklidischen Ebene und G die Gruppe der Bewegungen, so besteht die zugehörige Symmetriegruppe allein aus der identischen Abbildung - der Symmetriegehalt ist Null. Denken wir uns an die Stelle des Kleckses eine der oben wiedergegebenen Figuren, so enthalten die jeweiligen Symmetriegruppen mindestens zwei, im Falle des Streifenornaments sogar abzählbar-unendlich viele Transformationen. Es handelt sich hierbei um diskrete Symmetrie.

Das Gegenstück dazu ist die kontinuierliche Symmetrie, z.B. bei Gerade und Kreis oder bei Rotationsflächen wie Kegel, Zylinder und Hyperboloid. Auch die anfangs genannten homogenen Flächen sind kontinuierlich-symmetrisch. Ebene, Kugel und Zylinder lassen sich sogar durch eine besondere Symmetrieeigenschaft von anderen Formen unterscheiden. Sie sind nämlich in ihrem Lager frei beweglich in folgendem Sinn: Ohne daß die zugehörigen Körper die von ihnen eingenommene Stelle im Raum verlassen, können sie so bewegt werden, daß jeder Punkt auf ihnen die Stelle eines jeden anderen einnehmen kann; sie können also als ihre eigene Symmetriegruppe eigentlicher Bewegungen aufgefaßt werden. (Der Zusatz 'eigentlich' besagt, daß 'spiegelungshaltige' Abbildungen dabei auszuschließen sind.) Machen wir uns das etwa am Beispiel des Zylinders klar.

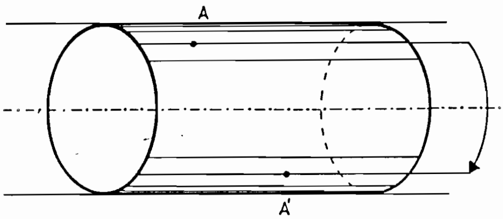


Abb.193

Wir können den Zylinder längs seiner Achse verschieben, und zwar um jede beliebige Strecke nach links oder nach rechts (siehe Abb.193); wir können ihn aber auch links- und rechtsherum um seine Achse drehen, und zwar um jeden beliebigen Winkel. Genau diese Transformationen (die man tunlichst als Selbstabbildungen des Raumes auffaßt) sowie deren Zusammensetzungen sind die im Raum ausführbaren Bewegungen, bei denen der Zylinder in sich selbst übergeht, d.h. sie bilden seine Symmetriegruppe eigentlicher Bewegungen. Denken wir uns nun einen Punkt A auf dem Zylinder fixiert. Wirkt eine Symmetrietransformation auf die Raumpunkte, so landet A an einem Punkt A' des Zylinders. Wenn wir umgekehrt einen Zylinderpunkt A' vorgeben, so gibt es stets genau ein Element der Symmetriegruppe, das A in A' überführt. Eine entsprechende Überlegung gilt für Ebene und Kugel, nur daß hierbei die Symmetrietransformation nicht eindeutig bestimmt ist (denn sie besitzen auch Symmetriedrehungen mit Fixpunkten). Also läßt sich der Zylinder als seine eigene Symmetriegruppe auffassen, Ebene und Kugel sogar als echte Untergruppen ihrer jeweiligen Symmetriegruppen (eigentlicher Bewegungen).

Bei allen übrigen Flächen sind die Symmetriegruppen kleiner, z.B. beim Kegel: Er ist wohl hochgradig homogen, aber eben doch nicht ganz: Seine Spitze S unterscheidet sich von den übrigen Punkten der Fläche dadurch, daß man eine Ebene durch S legen kann, die keinen anderen Punkt auf dem Kegel enthält. Es leuchtet daher ein, daß eine Symmetrietransformation den Punkt S festlassen muß. Genauer kommt man zu dem Ergebnis: Die zugehörige Symmetriegruppe besteht aus sämtlichen Drehungen um die Kegelachse.

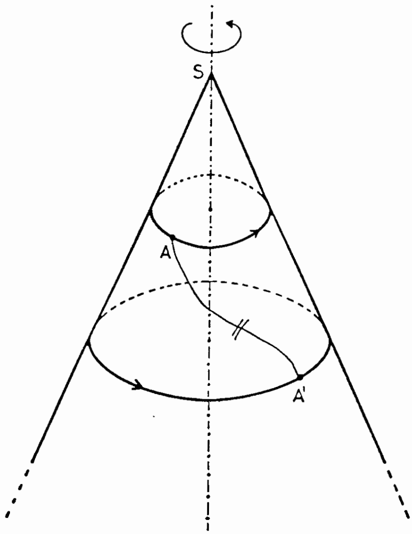


Abb.194

Für jede solche Drehung sind die Ebenen senkrecht zur Achse (und damit die von diesen auf dem Kegel ausgeschnittenen Kreise) Fixfiguren; und für zwei Punkte A und A' , die zwei verschiedenen dieser Kreise angehören, gibt es keine Symmetrietransformation des Kegel, die den einen auf den anderen abbildet. Die Symmetriegruppe des Kegels wird also bereits durch eine beliebige Kreisbahn auf ihm repräsentiert.

Aus unseren Betrachtungen ergibt sich nunmehr die Frage: Ist die Symmetrie homogener Flächen ein glücklicher Zufall, und wenn nein: worin sind die Gründe dafür zu sehen? Ist schließlich vielleicht auch an einen Beweis der Symmetrieeigenschaft aus dem Prinzip der inneren Homogenität zu denken? Bei der letzten Frage hat man sich zu vergegenwärtigen, daß die Homogenität der Flächen in einem Formelschema rein mit den Sprachmitteln der elementaren Geometrie zu formulieren ist. Dies ist von vornherein etwas anderes als die sonst mathematisch gebräuchliche Definition von Symmetrie oder (damit gleichbedeutend) Homogenität. (Allgemein heißt ein Raum R zusammen mit einer Gruppe G homogen, wenn G auf R transitiv operiert, d.h. wenn zu Punkten $p,q \in R$ stets ein $\alpha \in G$ mit $p = \alpha q$ existiert.) Wie soeben gezeigt, sind Ebene, Kugel und Zylinder in diesem Sinne symmetrisch (oder homogen, und zwar bezüglich der eigentlichen Bewegungsgruppe), was sinnfällig wird als freie Beweglichkeit in ihrem Lager. Es soll nun plausibel gemacht werden, daß diese Eigenschaft in der Tat von der inneren Homogenität (als Ununterscheidbarkeit) herrührt.

Denken wir uns einen Körper $\mathfrak{K}$ mit homogener Oberfläche gegeben, d.h.: die Stellen seiner Oberfläche sind ununterscheidbar. Wir markieren einen beliebigen Punkt auf $\mathfrak{K}$ und machen von diesem Punkt zusammen mit einer vollen Umgebung von ihm einen Abdruck. Stellt man sich diesen etwa als einen Stempel vor, so fällt der ursprüngliche Punkt mit einem inneren Punkt S der Stempelfläche zusammen (Abb.195).

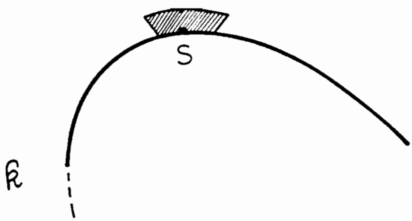


Abb.195

Wir stellen uns nun die Frage: Wo überall auf der Oberfläche von $\mathfrak{K}$ läßt sich der Stempel aufsetzen? Hätten wir ihn beispielsweise außen am Scheitel eines Paraboloides hergestellt, so ließe sich die Stelle S keineswegs mit weiter vom Scheitel abgelegenen Punkten der Schale zur Berührung bringen (Abb.196a).

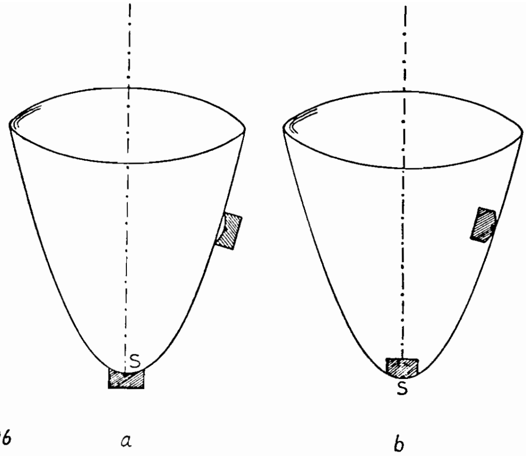


Abb.196

Allerdings zeigt sich darin gerade die Inhomogenität des Paraboloides. Da die Oberfläche von $\mathfrak{K}$ aber als homogen vorausgesetzt ist, gelingt es uns für jeden ihrer Punkte P den Stempel so auf sie aufzusetzen, daß P und S zusammenfallen. Freilich ist es damit noch nicht genug. Wie in Abb.196b illustriert wird, könnte diese Forderung auch sehr wohl im Inneren der Paraboloidschale erfüllt sein (wenn nämlich der Stempel auch hier am Scheitel hergestellt würde). Allerdings berühren dabei nicht alle Punkte der Stempelfläche die Schale. Bei homogener Fläche ist dies aber stets (weil einmal) der Fall: An sämtlichen Stellen kann der Stempel voll aufgesetzt werden, d.h. alle Punkte der Stempelfläche berühren dabei $\mathfrak{K}$. Nun war über die Größe des Stempels nichts besonderes vorausgesetzt. Man kann ihn sich relativ klein vorstellen, ebenso aber auch groß. Insbesondere kann er so groß angenommen werden, daß er die ganze Oberfläche von $\mathfrak{K}$ berührt und auf diese Weise ein Lager für $\mathfrak{K}$ bildet (Abb.197 zeigt das für den Fall einer Kugel).

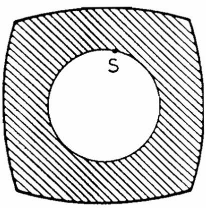


Abb.197

Nach dem bisher Gesagten ist $\mathfrak{K}$ in diesem Lager frei beweglich, da S von jedem Punkt der Fläche zu jedem anderen transportiert werden kann; wir haben also den Nachweis der gewünschten Symmetrieeigenschaft für $\mathfrak{K}$.

Abschließend wollen wir noch überlegen, wie sich die äußere Homogenität der Ebene (vgl. 7.4) abbildungsgeometrisch als Transitivität einer geeigneten Symmetriegruppe fassen läßt. Welche Symmetriegruppen kommen dafür in Frage? Es muß sich um eine Gruppe des Restraumes (ohne die Ebene) handeln. Zugleich muß sie eine Symmetriegruppe der Ebene sein, denn eine bijektive Selbstabbildung eines Raumes R läßt eine Figur F genau dann fest, wenn sie ihr Komplement R-F festläßt. Die eigentlichen Symmetriebewegungen genügen dazu nicht: Mit Spiegelungen des Raums an Achsen, die in der Ebene verlaufen, werden zwar die beiden Raumhälften ineinander übergeführt und damit als kongruent erwiesen, bei jeder Symmetriebewegung der Ebene bleibt jedoch der Abstand eines jeden Punktes zur Ebene erhalten, und infolgedessen lassen sich zwei beliebige Punkte außerhalb der Ebene nicht ineinander überführen. Äußere Homogenität heißt aber nicht Kongruenz der beiden Seiten der Ebene (Raumhälften), sondern Ununterscheidbarkeit der Stellen (Punkte) außerhalb der Ebene. Die Symmetriegruppe eigentlicher Bewegungen der Ebene muß daher zu einer Gruppe erweitert werden, die auch außerhalb der Ebene transitiv operiert. Eine solche Gruppe erhält man als gemeinsames Erzeugnis von eigentlicher Bewegungsgruppe und allen axialen Streckungen des Raumes. (Ein Punkt wird axial bezüglich einer Geraden g um den Faktor k gestreckt, indem er in der Ebene, die ihn enthält und von g senkrecht in Z durchstoßen wird, zentrisch bezüglich Z um k gestreckt wird.) Alle Abbildungen in der so erzeugten Gruppe sind orientierungserhaltend; die Symmetriegruppe der Ebene in ihr operiert transitiv sowohl auf der Ebene wie auf dem Restraum.

Der Leser mag sich auf eigene Faust den drastischen Unterschied gegenüber den äußerlich nicht homogenen Flächen 'Zylinder' und 'Kugel' klar machen: Nicht einmal deren Symmetriegruppe in der Homöomorphismengruppe des Gesamtraums operiert transitiv auf dem Restraum (ohne Zylinder bzw. Kugel).

8. IDEATIVE BEGRIFFSBILDUNG

> Tatsachen sind nichts, sie existieren nicht; es hat von uns nichts Bestand als Ideen.
>
> Honore de Balzac: Louis Lambert

> Keine Kraft ist einem so ungeheuren Verfall ausgesetzt wie die Idee, die in die Tatsachen niedersteigen soll.
>
> Henry de Montherlant: Tagebücher

Am Ende von Abschnitt 5.5 haben wir die Abstraktionstheorie der geometrischen Begriffe vorgestellt. Sie besteht in der Auffassung, die Ideen der Geometrie ließen sich aus angeschauten realen Formen durch Abstraktion gewinnen. Wir müssen dabei so tun, als besäßen die Formen gewisse Eigenschaften nicht, die ihnen in Wirklichkeit doch zukommen. Dingler hatte die Unzulänglichkeit der Abstraktionstheorie klar erkannt. Ihm zufolge sehen wir in der Geometrie nicht von Eigenschaften ab, die ein bestimmtes Ding möglicherweise besitzt; sondern wir schreiben ihm eine Eigenschaft zu, die es in Wirklichkeit nicht besitzt. Man könnte stattdessen auch sagen: der Geometer sieht die Formen der Dinge nur so, <u>als</u> <u>ob</u> sie den Anforderungen der geometrischen Ideen genügten. Lorenzen hat das in treffende Worte gefaßt: "Der Geometer blickt - im Sinne Platons gesprochen - nicht auf die Realisierung im Material, sondern auf die Idee selbst, auf die reine Form. Erst durch das Wissen um die Homogenität wird die Anschauung realisierter Formen zu einer reinen Anschauung. Nur das Auge des Geistes ist dieser reinen Anschauung fähig" (1961/1968, S.132).

Also nicht das <u>Absehen</u> von Eigenschaften ermöglicht geometrisches Denken, sondern eine Art des Hinsehens oder besser noch - <u>Hineinsehens.</u> Nicht <u>Abstraktion</u>, sondern <u>Ideation</u> bildet die dazu nötigen Ideen. Dingler hat zwar den Vorgang der Ideation immer wieder beschrieben, doch ohne dabei eine bestimmte Bezeichnung systematisch zu verwenden. Das hat z.B. Husserl getan (mit Begriffen wie 'ideativ', 'Idealisierung', 'ideierende Abstraktion'), aber erstens in schwankendem Sinn und zweitens in dem für unsere Zwecke weniger bedeutsamen Kontext seiner phänomenologischen Evidenzlehre.

Hier wollen wir die Termini 'Ideation', Idealisierung' und 'ideative Einführung (Bestimmung)' sinngleich verwenden und uns dabei auf die Überlegungen stützen, die in Schreiber (1980) zu ihrem logischen Verständnis entwickelt sind. Ziel jener Überlegungen ist ein möglichst allgemeiner Begriff von Ideation, der nicht auf die Geometrie beschränkt bleibt und auch in anderen Teilen der Mathematik und in der Physik eine Rolle spielt. Es wird dabei eine Synthese zweier Konzepte versucht: der von Lorenzen beschriebenen Einführung ideativer Normen, um deren formale Profilierung sich P. Janich in seiner Dissertation (1969a, S.43ff) bemüht, und der Gedanken, die Hilbert in seinen späteren Schriften zur Frage der sog. realen und idealen Elemente der mathematischen Erkenntnis äußert.

8.1. Ein algebraisches Beispiel

Wir entwickeln unseren Begriff der Ideation, indem wir den charakteristischen Vorgang an einem einfachen Beispiel erläutern. Das Beispiel ist mit Absicht nicht der Geometrie entnommen, denn dort ist das Ideationsverfahren eng mit dem Interpretationsproblem verflochten (vgl. 7.5). Dadurch würden wir auf gebietstypische Klippen geraten, die wir der Übersichtlichkeit halber für den Augenblick meiden wollen. Stattdessen begeben wir uns vorübergehend auf den bequemeren Boden der Algebra. Die Rolle der Ideen übernehmen hierbei bestimmte Gleichungen, genauer gesagt Existenzaussagen wie z.B.

(0) $\bigvee x\ (x^2 = 5)$.

Solche Aussagen wollen wir in unserem Zusammenhang auch Normen nennen und sie uns in einem System N , dem Normensystem, vereinigt denken. Für das Beispiel nehmen wir an, daß N nur aus (0) besteht. Ferner betrachten wir die Sprache der angeordneten Körper (bestehend aus den Konstanten ' 0 ' und ' 1 ', den Funktionszeichen ' + ' und ' $\cdot$ ' sowie dem Relationssymbol ' $<$ ') und die Menge E der in dieser Sprache einschlägigen Aussagen, die im Bereich Q der rationalen Zahlen gültig sind. E enthält beispielsweise folgende Aussagen.

(1) $\bigwedge x \bigwedge y\ (x + y = y + x \wedge x \cdot y = y \cdot x)$,
(2) $\bigwedge x\ (x \neq 0 \rightarrow \bigvee y (x \cdot y = 1))$,
(3) $\bigwedge x\ (x^2 < 5 \vee 5 < x^2)$,

wobei wir uns ' 5 ' als Abkürzung für den Term ' (((1 + 1) + 1) + 1) + 1 ' eingeführt denken. Außerdem enthält E natürlich noch weitere (nicht sämtlich explizit angebbare) Aussagen. Z.B bilden die Axiome, mit denen man üblicherweise ausdrückt, daß Q ein Körper ist, ein Teilsystem Δ von E . Die Aussagen (1) und (2) gehören zu Δ , (3) dagegen nicht.

Bekanntlich fragt man sich in der Algebra systematisch nach Bedingungen, unter denen eine bestimmte Gleichung lösbar ist. Insbesondere interessiert hier die Frage nach der Gültigkeit von (0). Offensichtlich gehört (0) nicht dem System E an, mehr noch: es entsteht ein Widerspruch, wenn wir (0) der Menge E hinzufügen (man beachte dazu Aussage (3)). Gleichwohl ist die Lage nicht aussichtslos - wir können ja nach einem Teilsystem von E suchen, das mit (0) logisch verträglich ist. Tatsächlich ist Δ ein solches System, d.h. (0) läßt sich widerspruchslos mit den üblichen Körperaxiomen vereinigen. Man zeigt dies durch sog. formale Adjunktion von $\sqrt{5}$ zu Q : Dazu setzt man $a^2 = 5$ voraus und bestätigt mir Termen der Gestalt $c_1 + c_2 a$ $(c_1, c_2 \in Q)$ formal die Körper-Rechenregeln; die rationalen Zahlen gehen hierbei keineswegs verloren, es ist lediglich $c_2 = 0$ zu wählen. Damit haben wir zufriedenstellend die Aufgabe gelöst, die Norm (0) in einem hinlänglich großen und sinnvoll strukturierten Bereich von E durchzusetzen. Wir erwähnen noch einen weiteren Aspekt, der weniger vom algebraischen Standpunkt als von dem der Analysis oder des praktischen Rechnens aus als bedeutsam erscheint: Die Aussage (0) ist zwar im Bereich Q ungültig, sie ist dort aber in dem Sinn angenähert (approximativ) erfüllt, daß es beliebig gute rationale Näherungen für $\sqrt{5}$ gibt, d.h. : zu jeder natürlichen Zahl n kann man einen Bruch r finden mit $|r^2 - 5| < 1/10^n$.

8.2. Der Begriff der Ideation

Wir fassen nun die am Beispiel durchgeführten Überlegungen allgemein zusammen. Ausgangspunkt sind ein Bereich E einschlägiger Aussagen, der eine bestimte Theorie festlegt, sowie ein Normensystem N , das es in einem möglichst umfassenden Teilbereich von E durchzusetzen gilt. Eventuell ist N in E bereits 'approximativ erfüllt'. Angenommen nun, wir finden eine Teiltheorie Δ von E (d.h. ein System einschlägiger Aussagen, dessen Folgerungen sämtlich auch Folgerungen von E sind) derart, daß das Vereinigungssystem $\Delta \cup N$ wider-

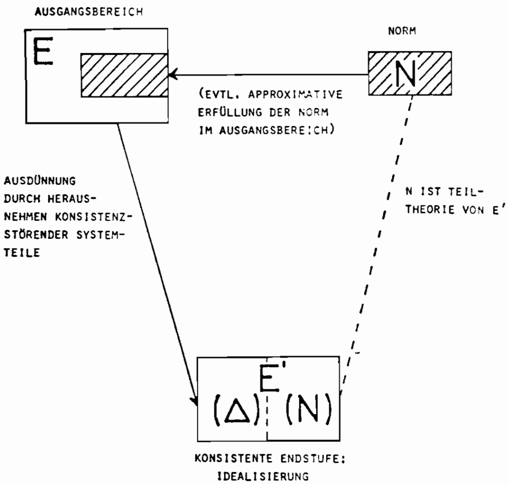


Abb.198 Schema zur Ideation (Idealisierung)

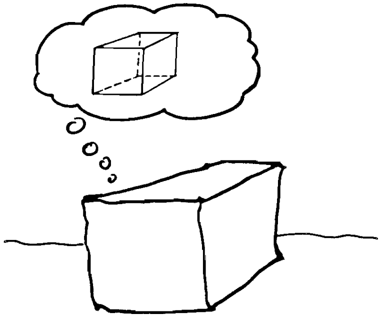
spruchsfrei ist: dann nennen wir $\Delta \cup N$ und jede Theorie E' mit derselben Folgerungsmenge wie $\Delta \cup N$ eine durch N geleistete Idealisierung von E. Auch andere Redeweisen erscheinen uns angemessen, etwa: das Begriffssystem von E' werde bezüglich N ideativ eingeführt - oder : der Übergang von E nach E' sei eine Ideation vermöge der Norm N, und dgl. mehr.

Unsere allgemeine Beschreibung des ideativen Prozesses gibt uns hier die Gelegenheit, die angekratzte Ehre der Abstraktionstheorie zumindest teilweise wiederherzustellen. Dazu müßten allerdings ihre Vertreter den sonst in der Mathematik gebräuchlichen Begriff der Abstraktion aufgeben und statt dessen mit 'Abstraktion' das bezeichnen, was wir in Abb.198 'Ausdünnung durch Herausnehmen konsistenzstörender Systemteile' genannt haben. In der Tat spielt bei der Ideation auch ein 'Absehen von vorhandenen Eigenschaften' eine Rolle; es handelt sich dabei aber um Eigenschaften, welche die Durchsetzung der Idee (des Normensytems) beeinträchtigen. Das Absehen erfolgt also erst durch das Hinsehen auf eine Idee: es bringt diese nicht hervor, sondern wird selbst von jener schon zugrunde liegenden Idee geleitet.

Ein weiterer Bestandteil unserer Explikation verlangt erläutert zu werden: die Redeweise vom 'approximativen Erfülltsein'. Im algebraischen Beispiel war vollkommen klar, wie wir das zu verstehen hatten. Dagegen gibt es bislang noch keine allgemein brauchbare Version dieses Begriffs. Auch Dingler verwendet den Gedanken der approximativen Geltung: nur spricht er stattdessen lieber von Exhaustion oder Exhaurierbarkeit. Wir werden uns im folgenden diesem Wortgebrauch anschließen. Ihn mit Inhalt zu füllen, ist freilich eine so vielfältige Aufgabe, daß wir ihr das ganze Kapitel 9 widmen. Für den Augenblick nur soviel: Zweifellos sind es meist exhaurierbare Ideen, denen auch eine praktische Bedeutung zukommt - das zeigt das algebraische Beispiel, und es wird sich in weit höherem Maße bei der Geometrie bestätigen.

Doch ist das nicht unbedingt der Fall. Ein schönes Beispiel liefert der komplexe Zahlenkörper, der aus dem reellen Zahlenbereich durch Ideation mittels der Norm $\bigvee x\ (x^2 + 1 = 0)$ hervorgeht, und zwar nach demselben Muster wie der Körper der Zahlen $c_1 + c_2\sqrt{5}$ aus dem Bereich der rationalen Zahlen. Es besteht aber ein bemerkenswerter Unterschied: Komplexe Zahlen lassen sich nicht durch reelle Zahlenfolgen approximieren. Die Idee der sog. imaginären Einheit i (mit $i^2 = -1$) ist also nicht in einem vergleichbaren Sinne exhaurierbar wie etwa die Idee der Quadratwurzel aus 5. Dennoch stellt die Lehre von den komplexen Zahlen und die auf ihr beruhende Funktionentheorie keine rein kalkulatorische Idee, kein bloß theoretisches Gebilde dar. Ihre Wirklichkeitsbezogenheit ergibt sich indirekt, dafür aber nicht weniger nachhaltig: in angewandten Aufgaben, die auf bestimmte Differentialgleichungen führen, z.B. aus der Schwingungslehre; in der Elektrotechnik, z.B. bei der Behandlung zeitveränderlicher Größen, oder auch - über konforme Abbildungen - in der Strömungslehre.

8.3. Ideation in der Geometrie



Verfolgen wir nun des näheren den Verlauf der Idealisierung innerhalb der Geometriegenese. Thema sei vorerst nur die ideative Einführung der Grundformen durch H-Schemata, nicht hingegen der Kongruenzbegriff, dessen eigentümliche Schwierigkeiten wir erst zusammen mit den Problemen der Exhaustion angreifen können. - Zunächst ist der Ausgangsbereich E inhaltlich festzulegen. Das geht gewiß nicht so strikt wie man sich eine Menge mathematisch definiert wünscht. Unsere Bemerkungen zum Interpretationsproblem liefern als Anhaltspunkt aber zumindest die Einsicht, daß E so etwas darstellen muß wie ein vorwissenschaftliches Korpus der Geometrie, ein offenes Feld vortheoretischer Erkenntnisse.

Was ist nun aber vortheoretisch? Eine vortheoretische Aussage kann empirisch gewonnen werden, durch Experimente, Beobachtungen, sie bleibt - auch sprachlich - den Phänomenen der Lebenswelt verhaftet. Gleichwohl bedeutet 'vortheoretisch' nicht dasselbe wie 'ohne Gebrauch von Ideen zustande gekommen'. Ideen spielen von Anfang an eine Rolle, sie richten praktisches Operieren auf Ziele hin aus, auch beim Herstellen eines Ziegelsteines, anhand dessen wir zu vortheoretischen Erkenntnissen angeregt werden können. Vortheoretisch ist lediglich der <u>Gebrauch</u> der Ideen, nämlich <u>vor</u> Betreiben einer Theorie, d.h. ohne ihre Rolle als leitende Annahmen für theoretisches Räsonieren. Daran würde sich auch dann nichts ändern, wenn wir statt des vorgeometrischen Vokabulars 'Flache', 'Kante' und 'Ecke' die entsprechenden geometrischen Wörter 'Ebene', 'Gerade' und 'Punkt' wählten. Das bliebe bloße Sprachkosmetik. Nur eines entscheidet darüber, ob eine Aussage theoretisch (geometrisch) oder vortheoretisch ist: die Frage nach ihrer Geltungsquelle. Der Geometrie gehört eine Aussage an, wenn sie den geometrischen Ideen selbst entfließt, unabhängig davon, wie gut diese praktisch verwirklicht wurden. Demgegenüber müssen wir uns in E solches Wissen hineinverlegt denken, das noch in hohem Maße von den Ergebnissen des jeweiligen reellen Ideengebrauchs abhängt. Der Leser sei dazu an das Interpretationsproblem erinnert, wonach wir auf dieser Stufe über Ideen nur in einer vorläufigen Fassung (in lebensweltlicher, handwerklicher oder physikalischer Interpretation) verfügen können. Es ist also nicht auszuschließen, daß, nicht anders als in unserem algebraischen Beispiel, einem gewissen Teil von E die Aufnahme ins Gebiet der Geometrie versagt werden muß.

Betrachten wir als Beispiele einige Sachverhalte, die zwar in geometrischer Sprache formuliert sind, deren Zugehörigkeit zu E wir jedoch durch Konfigurationen zum Ausdruck bringen, in denen sie anhand materieller Formen dargestellt werden.

(1) Wenn von zwei parallelen Ebenen die eine auf einer dritten Ebene senkrecht steht, so auch die andere (Abb.199).

(2) Eine Gerade durchstößt jede Ebene, die zwischen zweien ihrer Punkte verläuft (Abb.200).

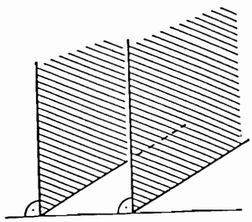


Abb.199

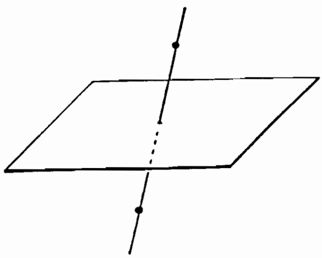


Abb.200

(3) Es kann der Fall eintreten, daß verschiedene Ebenen wenigstens drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte gemeinsam haben (Abb.201).

Nun wird die gesamte Menge E dem Normensystem N gegenübergestellt, das heißt in der Geometrie: den Homogenitätsforderungen für die Ebene (und evtl. auch für die Orthogonalität). Überlegen wir uns zunächst die Wirkung auf die eben genannten Beispielaussagen.

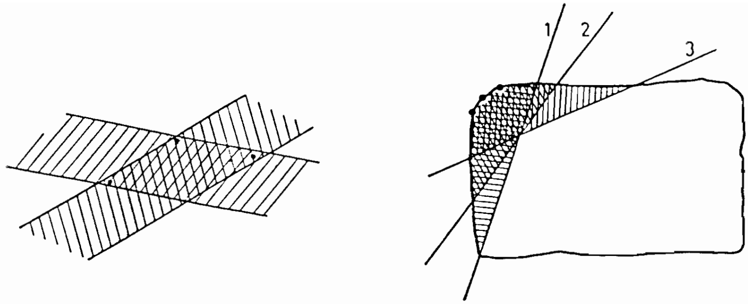


Abb.201 a b

Aussage (1) wird übernommen, und zwar könnten zweierlei Gründe dafür verantwortlich sein: Erstens wäre es denkbar, daß (1) bereits aus einem geeigneten H-Schema für die Orthogonalität sowie weiteren in E verbleibenden Aussagen logisch folgt oder, was weniger wahrscheinlich ist, sich aus anderen Gründen als mit N verträglich herausstellt. Zweitens könnte man (1) zu einer schon rein logisch richtigen Behauptung machen, indem man die Parallelität über die Doppelorthogonalität definiert.

Einfacher liegen die Dinge bei (2), denn es handelt sich hierbei um einen topologischen Sachverhalt, der von einem gewissen Stadium ab unabhängig von der Güte ist, mit der die Homogenitätsforderungen realisiert sind. Dennoch bleibt natürlich die Aufgabe bestehen, am Ende die Widerspruchsfreiheit von N+(2)+... nachzuweisen.

Entgegengesetzt ist der Fall bei (3). Offenbar hängt (3) weitgehend von der Realisierungsgüte der Grundformen ab. Würden z.B. in dem in Abb.201b skizzierten Quaderblock die Seiten besser abgeflacht, so rückten die Punkte, die man auf dem 'Schnitt' zweier Seiten wählen könnte, immer enger zusammen und lägen im Grenzfall auf der diesen Schnitt bildenden scharfen Kante (Geraden). Je besser wir also die skizzierte Grundform realisieren, desto leichter läßt sich die Behauptung (3) als ungültig einsehen. Es ist demnach plausibel, daß N+(3)+... widerspruchsvoll ist und daher (3) bei der Ideation nicht ins System der Geometrie aufgenommen werden kann. Um das zu zeigen, wird man versuchen, aus den Homogenitätsforderungen die Negation von (3) abzuleiten, nämlich den Satz (3'): Durch drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte verläuft höchstens eine Ebene. - Die Aussage (3') ist im übrigen ein gutes Beispiel für eine geometrische Erkenntnis im theoretischen Sinne - jedenfalls sofern wir sie wirklich mit Hilfe der Homogenitätsforderungen gewinnen können. Allgemein haben wir ja nach vollzogener Ideation ein gewisses Teilsystem Δ von E mit den

H-Schemata zu einem Gesamtsystem $N \cup \Delta$ oder einem dazu äquivalenten System E' verbunden. Den Inhalt der Geometrie als theoretische Wissenschaft bildet nun alles, was aus diesem neuen System logisch folgt, oder in sinnfälliger Vereinfachung: was wir im Blick auf die Ideen der Geometrie erkennen.

Nach unserer bisherigen Schilderung könnte man den Eindruck gewinnen, die geometrische Idealisierung sei trotz des Interpretationsproblems eine noch relativ einfache Angelegenheit. Man könnte vielleicht sogar versucht sein, sich den ganzen Vorgang in folgender Weise zu illustrieren: Da wir am Ende in $N \cup \Delta$ ohnehin über nichts anderes verfügen als über eine axiomatische Basis der Geometrie, laufe die Ideation im Grunde nur darauf hinaus, ein gewisses Repertoire einschlägiger Aussagen in zwei Teile aufzuspalten: erstens in ein Gebiet anschaulich zugänglicher Sachverhalte und zweitens in eines von Ideen. Z.B. ließe sich Hilberts Axiomensystem etwa so aufteilen, daß Δ (bzw. E) die Axiome der Verknüpfung sowie der Anordnung und N den Rest umfaßt, also das Parallelenaxiom und die Axiome der Kongruenz und der Stetigkeit. Auch dies wäre doch eine Idealisierung in dem von uns vereinbarten Sinne.

Hierauf ist folgendes zu erwidern: Gewiß erfüllen die angedeuteten Verhältnisse rein formal die Anforderungen einer Ideation. Allerding bleibt unklar, in welchem Sinne N in E approximativ erfüllt sein soll. Unser Begriff von Ideation umfaßt zwar auch solche Prozesse, bei denen keine Approximierbarkeit der Normen gegeben ist, doch läßt sich diese Forderung gerade für die Geometrie als wirklichkeitsbezogene Theorie am wenigsten entbehren. Vom operativen Standpunkt aus ist ferner zu bedenken, daß N nach Möglichkeit nur Aussagen enthalten sollte, in denen wir handlungsleitende Ideen aussprechen, insbesondere also Homogenitätsbedingungen für geometrische Grundformen. Diese Eigenschaft dürfte sich indessen am Parallelenaxiom oder an den Hilbertschen Kongruenzaxiomen nur schwerlich feststellen lassen. Somit liefert die soeben geäußerte Auffassung ein schiefes Bild der Ideation in der Geometrie. Trotz dieser Einschränkungen verweist sie aber auf Schwierigkeiten im Dinglerschen Programm, die man durchaus ernst nehmen sollte, anstatt - wie das gelegentlich geschieht - leichtfüßig über sie hinwegzuspringen. Wenn wir nämlich selbst den günstigsten Fall annehmen, alle geometrischen Ideen könnten durch Homogenitätsforderungen bestimmt und damit in N aufgenommen werden, so benötigen wir zum Aufbau der Geometrie doch immer noch Axiome, deren Zugehörigkeit zu E höchst fragwürdig erscheint. Ein Beispiel ist das sog. Archimedische (oder Eudoxische) Axiom, von Hilbert auch "Axiom des Messens" genannt:

Hat man zwei Strecken AB und CD , so läßt sich eine natürliche Zahl n derart finden, daß n-maliges Abtragen der Strecke CD von A aus auf dem durch B laufenden Halbstrahl über B hinausführt (Abb.202).

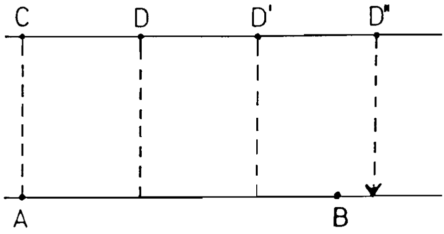


Abb.202

Man könnte sich auf den Standpunkt stellen, dieses Axiom sei evident. Aber worauf könnte seine Evidenz beruhen? An einen Beweis ist nicht zu denken, seit G. Veronese die logische Unabhängigkeit des Archimedischen Axioms von der übrigen Geometrie gezeigt hat (vgl. z.B. Efimow (1953/1970), S. 208ff). Kaum besser dürfte es um die Möglichkeit bestellt sein, empirisches Wissen, d.h. hier: naturwissenschaftliche Erfahrungen auszuwerten. Wie steht es nun andererseits um den Versuch, dieses Axiom in die Klasse N aufzunehmen? Zu einem gewissen Teil reflektiert es sicherlich eine auch operativ verstehbare Idee, nämlich das Abtragen von Strecken mit einem starren Maßstab. Allerdings ist nicht von vornherein klar auszumachen, wie weit sich diesbezügliche Realisierungsvorgänge auf die empirische Geltung des Axioms auswirken können. Lorenzen rechtfertigt es denn auch konventionalistisch (vgl. 1961/1968, S.137). Das Axiom des Messens soll also eine "zweckmäßige Festsetzung" sein, die Annahme seines Gegenteils "für keine Realisierung von irgendwelchem Nutzen" (S.137). Wir wollen dieser für leicht befundenen Sache hier nicht auf den Grund gehen, aber wenigstens die Fragwürdigkeit ihrer konventionalistischen Behandlung vermerken (vgl. dazu auch Schreiber (1975), S.168, sowie Kamlah (1976), S.175). Zum einen wird so getan, als stünde außer Frage, was 'nützlich' und was 'nutzlos' sei. Nutzen ist relativ zu Zwecken, und Zwecke stehen nicht ein für alle Male fest. Zum anderen muß man sich schon ein Wissen über alle möglichen Realisierungen (wovon?) zutrauen, wenn man behauptet, eine nicht-archimedische Geometrie sei für keine von ihnen von 'Nutzen'. Kurzum: Wir müssen auch solche Aussagen in die Geometrie einbeziehen, die weder anschaulich evident noch empirisch begründbar noch ohne weiteres als Idee im operativen Sinne zu rechtfertigen sind, sondern einfach Festsetzungen, und zwar häufig bloß vorläufige und nicht einmal unbedingt zweckmäßige Grundannahmen, darstellen. Das wird unter anderem noch einmal nachdrücklich bestätigt, wenn wir uns in 10.2 mit dem Problem einer axiomatischen Begründung der Geometrie durch Homogenitätsprinzipien beschäftigen werden.

8.4. Das Problem der 'Stellen'

In diesem Zusammenhang stellt sich folgende wichtige Frage: Wie müssen die Homogenitätsforderungen formuliert werden, damit man aus ihnen Sätze ableiten kann? Beispielsweise ist zu klären, ob und wie die frühere Aussage (3') über die Eindeutigkeit der Ebene auf der Basis von H-Schemata beweisbar wird. Wir stehen damit vor einer Aufgabe, ohne deren Lösung das ganze Konzept der geometrischen Ideation mit H-Schemata als Normen fraglich würde. Die Aufgabe entsteht dadurch, daß wir bislang im Ebenen-H-Schema Ununterscheidbarkeit stets von den 'Stellen' einer Fläche verlangt haben, ohne dabei zu präzisieren, was unter solchen 'Stellen' zu verstehen sei: ob Punkte, Linien, Flächenstücke oder sonst etwas anderes. Das Problem trat schon am Anfang von Kap. 7 auf und muß nunmehr gelöst werden; mit der Ideation 'springen' wir ja in die Sprache der Geometrie und übernehmen damit die Aufgabe, den Begriff 'Stelle' mit den Ausdrucksmitteln dieser Sprache zu explizieren.

Werfen wir einen Blick auf bisherige Lösungsvorschläge. P. Lorenzen nimmt einfach 'Punkt' statt 'Stelle' und schreibt das entsprechende H-Schema so:

$$P \mid F \wedge P' \mid F \wedge \mathfrak{A}(F,P) \longrightarrow \mathfrak{A}(F,P') \ .$$

Die Punkt-Version hat nicht nur den Vorzug, einfach zu sein; sie erscheint auch einigermaßen natürlich. Es ist aber bemerkenswert, daß die älteren Erläuterungen der Homogenität davon abweichen. So bezieht sich Dingler (1933, S.10) auf die "Stücke" der betreffenden Fläche, und auch Leibniz hat die Homogenität als Ähnlichkeit von Flächenteilen aufgefaßt. Nach O. Becker (1964b) können wir die Angelegenheit sogar bis zu Sextus Empiricus und Proclus zurückverfolgen, die die Euklidische Definition dahin gedeutet haben, "daß die Teile der Geraden und Ebenen 'gleichförmig' d.h. voneinander ununterscheidbar sind" (S.51). Natürlich beabsichtigen wir nicht, die Frage durch Berufung auf ehrwürdige Autoritäten zu entscheiden. Vielmehr ist es außer der Einfachheit folgende Überlegung, die für die von Lorenzen ursprünglich vorgeschlagene Punkt-Version der Homogenität zu sprechen scheint:

Vorgeometrischem Denken ist zweifellos der vage Begriff der 'Stelle einer Fläche' angemessen. Bislang fehlt uns allerdings ein zureichender Grund dafür, daß bei der Ideation daraus notwendigerweise 'Punkt' wird. Mit wenigstens gleichem Recht ließe sich vermuten, daß 'Stellen' aus ideativer Sicht etwa als 'Punkte samt einer vollen Umgebung' und damit als eine bestimmte Art zweidimensionaler Gebiete aufzufassen sind. Sicherlich gibt es hier nirgendwo zwingende Gründe für eine der beiden Varianten; doch ergeben sich zumindest plausible Anhaltspunkte aus unserer in 7.6 geführten Diskussion des Zusammenhangs zwischen Homogenität und Symmetrie. Dort hatten wir nämlich eben die Vorstellung zugrunde gelegt, wonach Stelle gleichbedeutend ist mit punktierter Umgebung (markiertem 'Stempel'). Entscheidend war dabei nun der Zusatz, daß über die Größe der Umgebung nichts ausgesagt wird. Anstatt (wie in 7.6) sich die Stellen 'hinreichend groß' vorzustellen, kann man sie aber auch einer fortschreitenden Schrumpfung unterwerfen, also einem Vorgang, angesichts dessen eher eine Punkt- als eine Gebiet-Auffassung von 'Stelle' naheliegt. Diese mehr suggestive Überlegung wird dadurch bekräftigt, daß später (nämlich in 10.2) die Punkt-Version tatsächlich zu einer erfolgreichen Präzisierung dessen führt, was zuvor über die intuitive Stempel-Argumentation erreicht wurde.

Was schließlich eine mögliche Formulierung der Homogenität mit inneren Geraden (statt Punkten) angeht, so ist diese wohl für die Ebene sinnvoll, nicht hingegen für krumm berandete Körper. Natürlich kann auch hier niemand davon abgehalten werden, sich anders zu entscheiden und z.B. Homogenität (verschärfend) aufzufassen als Ununterscheidbarkeit aller Geraden bezüglich einer Fläche, deren Tangenten sie sind. Dann wäre allerdings in Kauf zu nehmen, daß zwar der Ebene und einer Kugel, nicht jedoch einem Zylinder Homogenität zukommt; der Zylinder besitzt ja zwei Sorten von Tangenten (die einen, parallel zu seiner Achse, liegen ganz im Zylindermantel; die anderen berühren die Oberfläche in genau einem Punkt).

9. DAS PRINZIP DER EXHAUSTION

> Theorie und Erfahrung ... stehen gegeneinander in beständigem Konflikt. Alle Vereinigung in der Reflexion ist eine Täuschung; nur durch Handeln können sie vereinigt werden.
>
> Goethe: Maximen und Reflexionen

Das Prinzip der Exhaustion verbindet Idee und Wirklichkeit: es fordert einen durch Realisationshandlungen gefestigten Begriffsgebrauch - das war der Kern des in Kapitel 6 geschilderten operativen Standpunktes. Üblicherweise verwendet man den Ausdruck 'Exhaustion' aber auch noch für das bekannte Ausschöpfungsverfahren, das Eudoxos in die Mathematik eingeführt und das Archimedes zur strengen Fassung seiner berühmten Integrationsbeweise eingesetzt hat. Dabei wird z.B. ausgenutzt, daß man einem Kreis ein regelmäßiges Vieleck so einbeschreiben kann, daß die von ihm nicht ausgefüllte Restfläche unterhalb einer beliebig (kleinen) vorgegebenen Größe bleibt. Auch wenn man nicht immer, wie hier, einen Begriff oder eine Form durch annähernde Realisationen ausschöpft, so erscheint es uns dennoch sinnvoll, den Terminus 'Exhaustion' für alle nur erdenklichen Prozeduren der Annäherung zu verwenden. Welche hauptsächlichen Spielarten dann dabei möglich sind, wollen wir zuerst untersuchen. Die Realisation geometrischer Ideen verlangt ferner, daß wir wenigstens grundsätzlich auf einige praktische Verfahren eingehen, insbesondere auch im Zusammenhang mit der Herstellung starrer (deformationsfreier) Körper.

9.1. Formen der Exhaustion

Exhaustion gleich welcher Spielart beruht auf einer zweistelligen Beziehung zwischen Annäherndem und Angenähertem. Beide Komponenten können unterschiedlichen Bereichen entstammen, die wir hier grob einteilen wollen in solche von Dingen gedanklicher Natur (Ideen; I) und solche von Dingen real-gegenständlicher Natur (Realität; R). Rein kombinatorisch ergeben sich hieraus vier mögliche Typen von Exhaustion:

II	IR	RI	RR

Abb.203

Dabei bezieht sich die erste Stelle auf das Annähernde, die zweite Stelle auf das Angenäherte. Die Typen II und IR wollen wir systematisch als ideelle, die Typen RI und RR als reelle Exhaustion bezeichnen. Das Resultat einer ideellen (reellen) Exhaustion heiße Idealisat (Realisat). Beispielsweise ist das Herstellen eines Ziegelsteins eine Exhaustion vom Typ RI und der Ziegelstein ihr Realisat (oder Realisat der Idee des Quaders). Das Eudoxische Verfahren fällt hingegen unter die Rubrik II (Kreis und ausschöpfende Vielecke werden ja als geometrische Begriffe behandelt). Daß dabei die Vielecke als Idealisate des Kreises angesehen werden, mag auf den ersten Blick etwas ungewohnt erscheinen, ist aber angesichts unserer Typeneinteilung eine sinnvolle und konsequente terminologische Konvention. Wie der Leser den folgenden Ausführungen entnehmen kann, entspricht bei einer IR-Exhaustion dieser Wortgebrauch der landläufigen Vorstellung von 'Idealisat'.

Wir wollen nun die Exhaustionstypen in der Reihenfolge RI, RR, II, IR im einzelnen etwas genauer erörtern. Daran anschließend machen wir noch einige Bemerkungen, die den allgemeineren Zusammenhang der Exhaustion mit didaktischen und epistemologischen Fragen betreffen.

RI: Die reelle Exhaustion von Ideen ist ein Verfahren, das die praktische Anwendung mathematischer Begriffssysteme ermöglicht. Wie wir mit Dingler schon mehrfach herausgestellt haben, bedeutet dies für die Geometrie die näherungsweise Durchsetzung ihrer Ideen aufgrund einer praktischen Herstellung von Formen. Auf diese Weise wird zu vorgegebenen Ideen überhaupt erst ein Bereich ihrer Anwendung geschaffen. Daß die Begriffe auf 'die Wirklichkeit' passen, kann dann natürlich nicht mehr verwundern. In genau demselben Sinne ist es ja auch möglich, die Baupläne eines Hauses zu benutzen, um den Heizungskeller zu suchen und, bei entsprechender Realisation, im wirklichen Haus auch zu finden. Das Vorgehen erinnert ein wenig an den Aufbau eines semantischen Modells (evtl. aus 'konkreten' Objekten), in dem gewisse vorgegebene Aussagen erfüllt sein sollen (vgl. Anhang I); andere im Modell gültige Aussagen lassen sich dann durch logisches Schließen aus den ursprünglichen gewinnen.

Allerdings erzielt man durch reelle Exhaustion im allgemeinen nur eine angenäherte Verwirklichung, und zwar auch dann, wenn die Näherungsgüte in sukzessiven Schritten verbessert wird. Die geometrischen Grundformen sind hierfür treffende Beispiele. Bei ihnen, wie in den weitaus meisten Fällen, besteht überdies keine Gewähr dafür, daß man durch fortgesetzte Exhaustion jede beliebige Näherungsgüte erreichen kann.

RR: Ein charakteristisches Beispiel für eine Exhaustion dieses Typs ist das Herstellen einer Landkarte. Hierbei kommt es nicht auf größtmögliche Annäherung an, sondern auf die Erhaltung ganz bestimmter von Verwendungszwecken abhängiger

Gegenstandsmerkmale (z.B. Längen-, Winkel-, Flächentreue), also eine Annäherung unter gewissen einschränkenden Hinsichten. In diesem Fall sprechen wir mit Essler (1971, S.39) von einem strukturellen Modell. Weitere Beispiele für strukturelle Modelle sind Miniaturstädte, Modelleisenbahnen, Drahtgerüste für Moleküle, Diagramme für Regelkreise und dgl. mehr (dagegen sind aber sog. theoretische Modellvorstellungen dem Bereich IR unterzuordnen, auch wenn ihre bildlich-gegenständliche Wiedergabe zu RR gehört).

Angesichts der vielfältigen Verwendung und Bedeutung des Modellkonzepts ergibt sich die naheliegende Aufgabe, eine allgemeine Theorie zu entwickeln, in der alle Modellarten, neben den semantischen insbesondere also auch strukturelle Modelle, von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus systematisch untersucht werden. Deskriptive Vorarbeiten dazu präsentiert H. Stachowiak in seinem Buch "Allgemeine Modelltheorie" (1973). Darin unternimmt er außer einer pragmatischen Philosophie des Erkennens durch Modelle den Versuch, einen allgemeinen Modellbegriff logisch zu präzisieren, indem er von dessen charakteristischen Hauptfunktionen ausgeht, nämlich: 1. etwas abzubilden, wiederzugeben; 2. dabei zu verkürzen, d.h. bestimmte Merkmale des Originals zu unterschlagen; 3. von einem Verwendungskontext, d.h. einem Benutzer, einem Zweck, einem Zeitpunkt, abzuhängen (s. Stachowiak, S.131ff). (Anhand des dort gegebenen ausführlichen Literaturverzeichnisses kann sich der Leser umfassend über den auf diesem Gebiet (bis 1973) erreichten Forschungsstand unterrichten.)

Beim praktischen Anwenden der Geometrie spielt eine spezielle Sorte struktureller Modelle eine herausragende Rolle: die Maßstäbe. Wird die Länge eines Gegenstandes mittels einer Meßlatte (Zollstock, Meterband, und dgl.) bestimmt, so fungiert der entsprechende Abschnitt auf dem Maßstab als ein (im Hinblick auf Längenwiedergabe) adäquates, wenn auch in anderer Hinsicht reduziertes (strukturelles) Modell. Um genau zu messen, muß das Modell geeignete Deformationseigenschaften besitzen (Starrheit) und durch hinreichend feine Strichmarken begrenzt sein. Bis zu welchem Grade die dazu erforderliche reelle Exhaustion durchzuführen ist, hängt vom gemessenen Objekt selbst und vom Verwendungszweck der Meßdaten ab. Es wäre ebenso sinnlos, Länge und Breite eines Baugeländes auf den Millimeter genau ausmessen zu wollen, wie den Durchmesser eines Präzisionsgewindes mit dem Zollstock zu überprüfen.

II: Die ideelle Exhaustion von Ideen ist ein Verfahren, das überall in der Mathematik gebraucht wird und für das wir die Bezeichnung 'Approximation' reservieren wollen. Bei einer Approximation nähert man gedankliche Objekte einer Art (z.B. konvexe Körper) durch gedankliche Objekte einer meist spezielleren, besser bekannten oder leichter zu handhabenden Art an (z.B. konvexe Vielflache). Anerkannt wird ein solches Vorgehen, wenn sich das Annähern als (topologisch präzisierbarer) Konvergenzprozeß auffassen läßt. Typische Beispiele sind die Approximationen geeigneter Funktionen durch Polynome (Taylorentwicklung) oder durch trigonometrische Summen (Fourieranalyse), die Kettenbruchentwicklung irrationaler Zahlen, oder, nach Eudoxischem Vorbild, die Ausschöpfung beliebiger Rechtecke durch Rechtecke mit rationalen Seitenlängen.

Seit jeher wimmelt es in der Mathematik von Approximationssätzen; mindestens ebenso wichtig ist aber das Verfahren, neue mathematische Objekte zu schaffen, indem man sie als Grenzgebilde einer ideellen Exhaustion auffaßt. So gewinnt man etwa arithmetisch das Kontinuum aus Fundamentalfolgen, den Raum der integrierbaren Abbildungen aus sog. einfachen Funktionen, die Schwartzschen Distributionen aus regulären Funktionenfolgen, und dgl. mehr. Weshalb sind diese Beispiele so bemerkenswert? Sie zeigen, daß es durchaus im Sinne der methodischen Ordnung sein kann, wenn eine Idee (ein Begriff), anstatt ihrer Exhaustion vorauszugehen und sie zu leiten, sich exakt überhaupt erst als ihr Grenzresultat einführen läßt. Eine vergleichbare Situation liegt beim reellen Exhaurieren dann vor, wenn die es leitende Idee nicht im wünschenswerten Ausmaß explizierbar und daher bestenfalls erst durch die Exhaustion selbst näher bestimmbar ist. Diesen Fall hatten wir bereits in 6.2 erörtert und dafür einen Begriff von Realisation geringeren operativen (genauer: ideativen) Gehalts vorgeschlagen ("empirisches Realisieren"). Wir werden in den folgenden Abschnitten darauf zurückkommen.

IR: Mit diesem Typ von Exhaustion befinden wir uns auf nicht minder klassischem Boden als bei der Approximation. Hier ist das Feld nur viel weiter und offener und umfaßt alles, was mit der symbolischen (theoretischen) Konstruktion und Nachkonstruktion der Wirklichkeit zusammenhängt. Für unsere Zwecke ist es nicht nötig, auf diesen vieldiskutierten Bereich der Theorie- und Modellbildung allzu genau einzugehen. Für die Genese der Geometrie spielt er eine eher untergeordnete Rolle, es sind ja meist schon fertige geometrische Vorstellungen und Systemteile, die beim ideellen Exhaurieren realer Strukturen verwendet werden. Das Thema ist eines der ältesten und bewährtesten Steckenpferde von Wissenschaftsphilosophen. Wir erwähnen hierzu etwa den Gedanken des Schemas, mit dem F. Gonseth (1936) einen über mathematische Begriffe geleisteten Realitätsbezug zu begründen versucht hat. Die Begriffe 'Theorie', 'Modell' oder 'Schema' werden meist in ähnlichem Sinne verwendet. Man bezeichnet mit ihnen gedankliche Konstrukte, die eine vergröberte Beschreibung der Wirklichkeit liefern, sich schrittweise vervollständigen und verbesseren lassen und eine autonome innere Struktur besitzen, durch die es möglich ist, Ergebnisse von rein schematischen Operationen als Schema-Bilder realer Operationsergebnisse aufzufassen (vgl. Hauser (1946), S.156f, auch Bernays (1970)).

Zur ideellen Exhaustion gehört vor allem der Aspekt der Verbesserbarkeit, allgemeiner des Wandels theoretischer Modellvorstellungen. Seit T.S. Kuhn

(1962/1973) ein verändertes Bild von der Entwicklung naturwissenschaftlicher Theorien aus der Sicht des Wissenschaftshistorikers geschaffen hat, läßt das bislang eher vernachlässigte Thema auch die Wissenschaftstheoretiker nicht mehr los. Einmal geht es darum, eine zutreffende Vorstellung von dem zu entwickeln, was überhaupt unter einer Theorie (einem Schema, Modell) verstanden werden soll. Sodann ist ein adäquates - d.h. unter anderem: an geschichtlichen Daten überprüfbares - Bild von der Dynamik der Theorien zu gewinnen. Anhaltspunkte dazu in knappster Form: Theorien gestatten es zwar, Aussagen über die empirische Realität zu machen, dennoch sind sie nicht mit Satzmengen zu identifizieren, sondern eher als 'Instrumente' mitsamt einem spezifischen Anwendungsbereich anzusehen. Dem entspricht die schon von J.B. Conant (1947, S.36) aus wissenschaftsgeschichtlicher Sicht ausgesprochene Auffassung, daß eine Theorie nur durch eine bessere Theorie verdrängt werde, niemals durch widersprechende Tatsachen allein. Eine systematische Aufarbeitung der Diskussion über diesen Gedankenkreis gibt W. Stegmüller unter dem Titel "Theorienstrukturen und Theoriendynamik" (1973).

Soweit unsere Beschreibung der vier Exhaustionstypen. Wir müssen sie noch um einige zusätzliche Erläuterungen und Anmerkungen ergänzen.

Obwohl wir sie in vier Formen beschrieben haben, die sich hinsichtlich ihres zugehörigen Operationsmusters zum Teil klar unterscheiden, legen wir doch Wert auf den einheitlichen Charakter der Exhaustion selbst. Sie ist ein allgemeiner Leitgedanke des praktischen (alltäglichen und wissenschaftlichen) Lebens und insofern auch eine "fundamentale Idee", wie wir sie nach Whitehead (1929/1962) und Bruner (1960/1970) der pädagogischen Erschließung von Fachwissen (und damit für die konstruktible Wissensgenese) nutzbar machen sollen. Unsere Typeneinteilung kann dann dabei helfen, Konfusionen zu vermeiden, die bisweilen - zumeist aus empiristischer Sicht der Mathematik - angesichts der Frage nach den Anfängen der geometrischen Erkenntnis entstehen. Nicht selten wird ja dem Entstehen geometrischer Vorstellungen eine (nach dem Muster der Abstraktionstheorie gestrickte) IR-Exhaustion unterlegt: Begriffe und Axiome der Geometrie, so heißt es, würden der Wirklichkeit entnommen, nachgebildet oder zumindest angeähnelt und so in einer ideellen Exhaustion zu einem 'Modell' des realen Raumes ausgestaltet. Gewiß, auch diese Form der Exhaustion spielt für die Geometrie eine Rolle, allerdings zumeist erst auf einer höheren Stufe, z.B. bei bestimmten technischen und geodätischen Anwendungen oder ihrer freien Verwendung in physikalischen und kosmologischen Theorien. Auf dem Niveau der Begriffsgenese haben wir es hingegen hauptsächlich mit der inversen Form RI, der reellen Exhaustion von Ideen, zu tun. Hier geht es weniger um die Anpassung unserer Begriffe an die Wirklichkeit, als vielmehr umgekehrt darum, die realen Objekte durch zielgerichtetes Handeln nach vorgefaßten Ideen zu bearbeiten. Wer mit Piaget die biologische Ausdrucksweise liebt, mag Exhaustion mit Adaption, ihren

Typ RI mit Assimilation und den Typ IR mit Akkomodation vergleichen. Dies ist natürlich nur eine Analogie; sie macht aber deutlich, daß es der menschlichen Verstandestätigkeit kaum angemessen sein dürfte, sie einseitig auf Akkomodation, und das hieße weitgehend: widerspiegelndes Modellieren, einzuschränken.

Wir wollen diesen Punkt noch etwas vertiefen und dabei auf einen wichtigen Unterschied gegenüber der Position Dinglers aufmerksam machen. Anknüpfend an das zuletzt Gesagte lassen sich zwei Fehldeutungen unterscheiden, je nachdem welche der beiden Komponenten I oder R in den Exhaustionen IR und RI als unveränderlich angesehen werden. Für einen Empiristen ist R der konstante Bestandteil. Dagegen entsteht bei Dingler gelegentlich der Eindruck, als halte er alles dem Bereich I entstammende für eine absolute, unantastbare Vorgabe (vgl. etwa Dingler (1911), S.81ff). Dingler geht zunächst davon aus, daß Begriffe durch Exhaustion in die Wirklichkeit eingeführt werden. Andererseits gründen sich auf diese Begriffe auch Aussagen, und zwar als logische Folgerungen aus den zugehörigen Realisierungsvorschriften. Sofern also die Begriffe reell durchgesetzt sind, haben auch die betreffenden Aussagen (und damit die auf ihnen aufgebaute Theorie) reale Gültigkeit. Auf diese Art und Weise denkt sich Dingler etwa die euklidische Geometrie begründet.

Allerdings hat die Angelegenheit zwei Haken, einen großen und einen kleineren. Der kleinere Haken ist das Problem, wie man durch logisches Folgern aus Realisierungsvorschriften auch tatsächlich nennenswerte Aussagen gewinnt. Entgegen allem Augenschein glaubte Dingler dieses Problem im Prinzip gelöst zu haben; es ist aber bis heute noch nicht zufriedenstellend bearbeitet worden. Nun zum großen Haken: er liegt in der Frage, wie weit sich bestimmte Begriffe (wie Ebene, Gerade, geometrische Starrheit usw.) überhaupt realisieren lassen; die Gültigkeit der auf sie gegründeten Theorie bemißt sich ja nach der Reichweite der Begriffsexhaustion, und die ist keineswegs von vornherein unbegrenzt (wie z.B. bei Dingler (1938), S.217 angenommen). Es gibt unseres Erachtens keinerlei Anhaltspunkte für eine uneingeschränkte Manipulierbarkeit materieller Körper nach Maßgabe vorgefaßter Ideen, und zwar schon gar nicht, wenn diese Ideen mit Theorien über die Natur verbunden sind. Abwegig ist insbesondere die Vorstellung, Newtons klassische Mechanik oder die euklidische Geometrie ließen sich über geeignete reelle Exhaustionen in der Wirklichkeit durchsetzen. Nicht die Realität ist hier das (durch Willensbeschluß) Anzupassende, sondern unsere Theorien über sie. Dementsprechend haben wir unser Konzept von Exhaustion angelegt: Es gibt in ihm keine absolut konstanten Bestandteile (entweder R oder I); als (relativ) unveränderlich betrachten wir vielmehr immer die jeweils zweite Komponente eines Exhaustionstyps, also das Anzunähernde (oben "das Angenäherte" genannt), und das kann eine Idee (z.B. die Idee einer innerlich homogenen Fläche) oder ein realer Sachverhalt sein (z.B. ein durch eine Folge von Hypothesen immer besser zu beschreibender Naturvorgang). Mit vorsichtigen Einschränkungen mag es auch bisweilen möglich sein, die Geltung einer bestimmten Theorie dadurch aufrechtzuerhalten, daß ihre Abweichungen von der Realität auf 'störende Umstände' zurückgeführt werden. Dieses von Dingler hauptsächlich als Exhaustion verstandene Verfahren erörtert im einzelnen K. Holzkamp (1968, S.92ff).

Schließlich soll unsere Handhabung des Modellbegriffs noch etwas präzisiert werden. Bisher hatten wir Modelle stets entweder als Idealisate oder als Realisate angesehen. Es empfiehlt sich aber eine etwas flexiblere Betrachtungsweise, die besser angepaßt ist an Eigenart und Umfeld des Problems, zu dessen Lösung man ein bestimmtes Modell herstellen möchte. Dabei nehmen Modelle dann eine Mittelstellung zwischen ideellem und reellem Niveau ein; je nach dem Grad ihrer Konkretheit (z.B. algebraisches, zeichnerisches oder Holzmodell eines Würfels) tendieren sie mehr zum einen oder anderen der beiden Pole. Dieser Grad hängt wiederum von den Genauigkeitsanforderungen ab, die sich vom jeweiligen Problem her stellen. Wir erläutern das kurz an Abb.204.

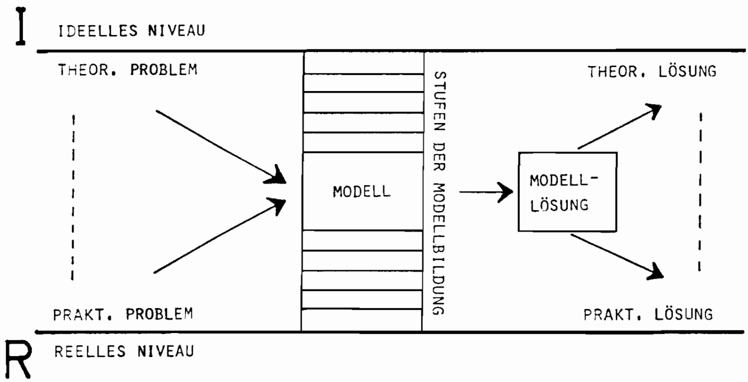


Abb.204

Je nach dem ob das Ausgangsproblem theoretischer oder praktischer Natur ist, gehört das Modell zu einer reellen bzw. ideellen Exhaustion. Nehmen wir als einfachstes Beispiel die praktische Aufgabe, die Diagonale einer rechteckigen Geländefläche mit bekannten Seitenmaßen zu bestimmen. Sucht man eine Lösung, indem man in einer ähnlichen Zeichnung die Diagonale ausmißt und dann das Ergebnis maßstabsgerecht umrechnet, so handelt es sich zweifellos um eine strukturelle Modellierung; gleichwohl hat sie, relativ zum Sachverhalt des Problems, schon theoretischen Charakter. Das dadurch festgelegte Zwischenniveau definiert eine ganz bestimmte <u>Stufe der Modellbildung</u>, die irgendwo zwischen reellem und ideellem Niveau liegt. In unserem Beispiel könnte man die Modellbildung leicht von vornherein auf rein ideeller Stufe vornehmen, etwa durch rechnerische Lösung der Aufgabe mittels pythagoreischem Lehrsatz. Das kann man aber nicht immer erwarten. Bei vielen Problemen ist es bequemer oder sogar unumgänglich, eine Lösung auf mittlerer Modellbildungsstufe anzustreben. Beispielsweise gibt es technische Probleme, die man durch Simulation an strukturellen Modellen (wie dem Windkanal) bearbeitet, weil eine theoretisch-rechnerische Behandlung zu aufwendig, zu unübersichtlich oder noch zu wenig entwickelt ist. Oft genügen dem Praktiker auch die so gewonnenen Ergebnisse.

Von der Stufe der Modellbildung zu unterscheiden ist der Exhaustionsgrad des Modells, den wir bei reellen Exhaustionen von Ideen auch als Realisationsstufe bezeichnen. In der Regel erfolgt Exhaustion durch mehrere (immer besser werdende) Modelle innerhalb derselben Modellbildungsstufe. Z.B. kann man, auf zeichnerischer Stufe, die Diagonale anhand einer groben Geländeskizze bestimmen, erreicht aber einen höheren Grad der Exhaustion mittels einer geeigneten Fotografie. Ein einfaches Beispiel für Exhaustion auf ideeller Stufe ist die Verbesserung der allgemeinen Gasgleichung von Boyle-Mariotte durch van der Waals (vgl. dazu Schreiber (1980)).

9.2. Praktische Verfahren

Zu jeder Form der Exhaustion gehört eine bestimmte Klasse von Verfahren (mathematische, heuristische, technische), auf denen die tatsächliche Herstellung von Idealisaten und Realisaten beruht. Wir erörtern im folgenden nur praktische Verfahren, d.h. die bei Exhaustionen vom Typ RI erforderlichen technischen Manipulationen. Bei diesen handelt es sich nicht um eine bloß erfreuliche, aber überflüssige Ausschmückung des Exhaustionsbegriffs, sondern um "das Grundlegendste und in der Tat Einzige, was wir über die Beziehung zwischen Geometrie und Wirklichkeit wirklich besitzen. Alle Aussagen und philosophischen Theorien über 'das Wesen der Geometrie' sind unverbindlich und vorläufig, solange diese Kluft zwischen Theorie und Technik nicht geschlossen ist" (Dingler 1955/56, S.88).

Natürlich sind nicht alle praktischen Verfahren für die Geometrie gleichermaßen bedeutsam. Nur solche Techniken können uns hier interessieren, die der Realisierung einfacher und fundamentaler geometrischer Grundideen dienen. Wir werden also z.B. fragen, wie man eine Gerade, eine Ebene, einen rechten Winkel, eine Kugel etc. herstellt (die Einführung des starren Körpers behandeln wir gesondert in 9.3). Bei allen Versuchen, diese Frage zu beantworten, zeigen sich zwei grundlegende Schwierigkeiten.

Die erste liegt in der notwendigen Rücksicht auf Materialeigenschaften. Für die jeweils angestrebte Realisierungsgüte spielt es eine erhebliche Rolle, ob wir es mit Holz, Stein, Glas oder Metall zu tun haben. Schon allein aus solchen Randbedingungen ergeben sich materialspezifische und arbeitstechnisch bestimmte Gütegrenzen bei jeder reellen Exhaustion. Dem Praktiker ist es klar, dem von der Theorie herkommenden Laien sollte es aber bewußt werden, wie sehr alle technischen Realisationsvorgänge von Kunstgriffen beherrscht sind, die helfen sollen, die 'Tücke des Objekts', das eigentümliche Mängelverhalten des Materials zu meistern. Einen realistischen Eindruck von der dabei aufzubietenden Raffinesse gewinnt man etwa durch das Blättern in einer Werkkunde für den Feinoptiker, z.B. dem Standardwerk von W. Zschommler (1963). Nicht weniger aufschlußreich ist es, in Luebers Lexikon der Technik Artikel wie "Probeglas", "Ebenenfehler" oder "Krümmungsurstück" nachzuschlagen. Da es uns aber mehr auf die Grundstruktur praktischer Verfahren ankommt, möge es hier bei einer Erwähnung der Kunstgriffe bleiben.

Die zweite Schwierigkeit ist von noch grundsätzlicherer Natur und betrifft das Verständnis der Realisationsvorgänge, die Einsicht in ihr erfolgreiches Funktionieren. Das Problem entsteht durch das Eingebundensein praktischer Verfahren in einen schon vorhandenen technischen Kontext. Hier sind es nun umgekehrt zumeist Praktiker, denen es schwerfällt, darin überhaupt ein Problem zu sehen. Betrachten wir die Angelegenheit zunächst an einfachsten Fällen, nämlich bei offenkundig reproduzierenden Verfahren, wie sie auch im Alltag gang und gäbe sind. So realisieren wir Punkte durch Anspitzen eines Bleistiftes, Geradenstücke mit Hilfe von Bleistift und Lineal, Ebenenteile durch Abschneiden einer Brotscheibe mit dem Küchenmesser, durch Flachwalzen eines Teigs mit dem Wälgerholz, oder technischer: durch Bearbeitung von Holzstücken mittels einer Kreissäge. Bei diesen Vorgängen werden bereits verfügbare Formen reproduziert: ebene Flächen an Messer, Sägeblatt, Arbeitsplatte und Zeichentisch, oder ein als Linealkante realisiertes Geradenstück. Sofort stellt sich die Frage nach der Herkunft dieser Formen. Auch dabei stößt man meist wieder auf weitere Reproduktionen, z.B. wurde die Linealkante durch Schnitt mit einer stählernen Schiene erzeugt. Naturgemäß ergibt sich so das Problem der Primärerzeugung von Formen.

Wir können Punkte und Geraden als Ebenenschnitte erzeugen, wir können uns ferner diese Ebenen mit Hilfe anderer Ebenen hergestellt denken - wir müssen aber irgendwann ohne Benutzung von Richtflächen eine Standardebene realisiert haben, die selbst die Rolle einer Richtfläche spielt. Wegen der bei Reproduktions- oder Prüfvorgängen zwangsläufigen Materialabnutzung ist es sogar erforderlich, die Primärerzeugung von Standardebenen für gehobene Genauigkeitsansprüche immer wieder von neuem vorzunehmen. Entsprechendes gilt für Kugellager, Mikrolinsen und dgl. mehr. Nun werden die (gleich genauer zu besprechenden) Verfahren heutzutage natürlich nicht technikfrei durchgeführt, man bedient sich geeigneter mechanischer Hilfsvorrichtungen oder auch bestimmter Meßapparate. In diesem technischen Kontext sind offenbar schon geometrische Formen (ebene Flächen, Geradführungen, starre Hebel, Meßskalen u.ä.) verwirklicht. Wenngleich es sich nicht um eine Reproduktion jener Formen handelt, so bleibt dennoch die Frage zu klären, inwieweit wir es hierbei tatsächlich mit einer Primärerzeugung zu tun haben.

Die Antwort auf diese Frage ist nicht schwer zu finden, sie ergibt sich aus der Relativierung der praktischen Verfahren auf das jeweils erreichte technische Genauigkeitsniveau. Die Zunahme an Präzision innerhalb der Technik ist eine jedermann geläufige Tatsache. Mit Dingler erklären wir sie nach dem Muster eines Rekursionsprozesses: Den Anfang bilden nur grob realisierte oder sogar bloß natürliche Formen; bei ihnen spielt die Herstellungsart noch keine grundsätzliche Rolle. Das ändert sich aber, wenn (evtl. unter Rückgriff auf bereits verfügbare Realisate) die Genauigkeit verbessert werden soll. Dazu bedarf es dann eines geeigneten Verfahrens zur Primärerzeugung. Dieses wird wiederholt angewandt, wobei nach und nach immer mehr Hilfsmittel zur Verfügung stehen, mit denen sich das ursprüngliche Verfahren verfeinern und modifizieren läßt. Allerdings ist nicht von vornherein auszuschließen, daß man von einem bestimmten Schritt an nicht mehr in eine höhere Genauigkeitsschicht hineingelangt. Weiterer Fortschritt hängt dann von der Erfindung eines andersartigen Verfahrens ab. Gleichzeitig damit muß es möglich sein, bislang nicht registrierbare Abweichungen von der Norm festzustellen (vgl. dazu Dinglers Diskussion des "Multiplikatorprinzips" (1933), S.57, S.61, und (1938), S.111).

Der soweit geschilderte sukzessive Aufbau von Genauigkeitsschichten macht verständlich, wieso der Einsatz eines Herstellverfahrens auf höherer Stufe nicht notwendig die pragmatische Ordnung verletzt. Insbesondere ist Primärerzeugung auf verschiedenen Niveaus möglich, sie liefert dort allenfalls unterschiedlich gute Resultate. Man kann sich das mühelos an den Grundverfahren verdeutlichen, die wir im folgenden kurz behandeln wollen.

Praktische Verfahren zur Herstellung homogener Flächen an Körpern beruhen auf Schleifen. Der bekannteste Schleifvorgang ist das sog. Dreiplattenverfahren, mit dem gleichzeitig drei ebene Flächen erzeugt werden. Dingler erwähnt diese Methode in beinahe allen seinen Schriften (und einer Anekdote zufolge soll er sogar so oft davon gesprochen haben, daß man sich bei seinem Erscheinen in Münchener Hörsälen imitierend die Hände aneinanderrieb). Das Verfahren besteht im wesentlichen darin, drei grob vorgeebnete Platten a, b, c paarweise so aufeinander abzuschleifen, daß sie adhärieren. Durch das Schleifen entstehen Teile von innerlich homogenen Flächen; die Dreizahl gewährleistet ihre äußere Homogenität (man schleift a auf b , b auf c , und a auf c). Würden bloß zwei Platten genommen, so könnten kleine Verschiedenheiten in Material, Druck oder Schleifbewegung durchaus auch eine Kugelkalotte zustandekommen lassen. Wie Dingler gelegentlich betont, ist "der Vorgang selbst ... natürlich ein recht umständlicher in der Praxis. Er dient tatsächlich lediglich zur Urzeugung der Ebene. Erst von diesen so entstehenden Ebenen werden die Richtflächen, welche die exakten Arbeiter in der Fabrik benutzen, als erste Generation hergestellt. Und zwar geschieht diese Herstellung (wie auch bei den folgenden Generationen, und den nachher zu behandelnden Eisenlinealen) auf diese Weise, daß die grob vorgeebnete Fläche, die zu einer Ebene werden soll, mit Schmirgel bestrichen auf die Richtfläche gelegt, einmal vorsichtig hin und her geschoben wird, worauf sie abgehoben und an denjenigen Stellen, welche jetzt schmirgelfrei erscheinen (die erhöhten Partien), noch weiter bearbeitet wird. Bei den Linealen (welche bis zu 11 m Länge hergestellt werden) geschieht diese Bearbeitung mit einem Spatel mit geschärfter Schneide. Schließlich wird natürlich die Fläche poliert" (1911, S.21f). Weitere Details des Verfahrens, mit denen es jeweils von einzelnen feinmechanischen und optischen Werkstätten gehandhabt wird, fallen nicht selten unter das Firmengeheimnis. Einige Hinweise zu seiner Geschichte geben wir weiter unten in diesem Abschnitt.

Dem Dreiplattenverfahren nachempfunden ist ein sog. Dreikeileverfahren, mit dem es möglich sein soll, gleichzeitig drei rechtwinklige Keile herzustellen. Das Verfahren wird bereits von J. Hjelmslev (1916) als Herstellung von "Normalkeilen" erwähnt (vgl. auch O. Becker (1964b), S.52f, und Janich (1976a), S.107ff). Es besteht darin, drei an der Unterseite geebnete Keile an ihren Seiten paarweise aufeinander abzuschleifen, wobei die Schleifbewegung auf einer festen (gleitfähig geschmierten) Unterlageebene geführt wird. Am Ende müssen je zwei Keile beim Zusammenschieben an den Schleifflächen zueinander passen (Abb.205).

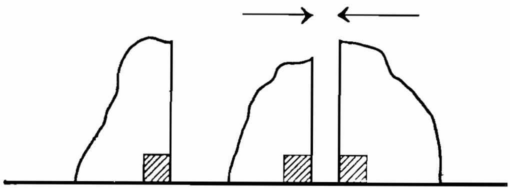


Abb.205

Es ist uns nicht bekannt, wieweit dieses Verfahren auch wirklich in der präzisionstechnischen Praxis verwendet wird oder überhaupt den dort üblichen Ansprüchen genügen kann. Gleichwohl dürfte es unter geeigneten Bedingungen eine Primärerzeugung von Orthogonalität gewährleisten. Allerdings hat das Schleifen hierbei eine andere Funktion als beim Dreiplattenverfahren. Der Spanabhub beim

Planschleifen dient der Ununterscheidbarkeit von Flächenstellen; dagegen dient er beim Keileschleifen der Herstellung kongruenter Stücke, die Ebenheit der Schleifflächen ist dabei gleichsam nur ein Nebeneffekt (der im übrigen unter anderem wegen eines fehlenden Freiheitsgrades bei der Schleifbewegung keineswegs so ohne weiteres gesichert ist). Natürlich ist man nicht auf das Dreikeileverfahren angewiesen, wenn man rechte Winkel realisieren will. Universeller (weil auch zur Herstellung beliebiger anderer Winkel brauchbar) sind solche Verfahren, die starre Körper voraussetzen und auf diesen beruhende Winkelmesser verwenden. Das Halbieren des gestreckten Winkels mit Zirkel und Lineal ist hiervon ein Sonderfall. Schleifprozesse steigern dabei (allerdings weniger unmittelbar) die Genauigkeit auch von mit solchen Verfahren hervorgebrachten Realisaten.

Praktisch höchst bedeutsam ist ferner das Verfahrensprinzip zur Vollkugelherstellung. Hierbei geht es darum, in möglichst gleichmäßiger Weise nach und nach alle Ecken und Kanten eines konvex vorgeformten Körpers abzutragen. Dieses Verfahren der Primärerzeugung von Kugeln spielt z.B. bei der feinoptischen Fertigung von Mikro-Frontlinsen eine große Rolle. Wir schildern es in Grundzügen und verweisen den an Einzelheiten (wie z.B. Durchmesserkontrolle) interessierten Leser auf das Standardwerk von Zschommler (1963), nach dem auch wir im folgenden zitieren.

Die Vollkugelherstellung gilt als ein sehr schwieriges Verfahren "und stellt auch an einen guten Optiker hohe Anforderungen" (s. Zschommler, S.118). Man kann es in vier Arbeitsgänge einteilen:

(1) Zunächst wird aus Glaswürfeln eine kugelähnliche Vorform hergestellt; dies geschieht in einer schnell rotierenden Trommel, in der sich die Würfelecken abstumpfen.

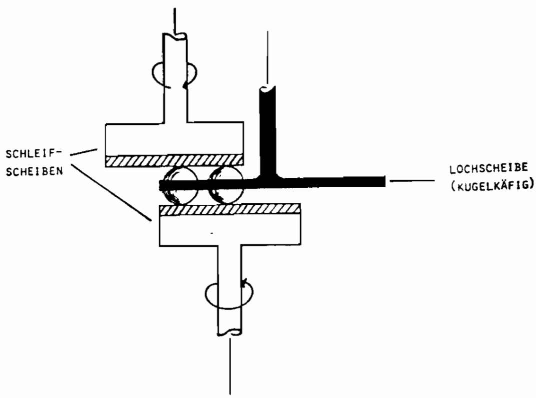


Abb.206 Kugelvorschliff (Seitenansicht)

(2) Dann kommt der Vorschliff. Dabei laufen die Glasstücke in einer als Kugelkäfig ausgebildeten Lochscheibe langsam zwischen zwei sich rasch drehenden Schleifscheiben hindurch (Abb.206).

Nach jedem Umlauf verlassen die Kugeln die Lochscheibe, um anschließend wieder einen neuen Umlauf zwischen den Schleifscheiben zu fahren. Auf diese Weise sind alle Oberflächenstellen einer (statistisch) gleichen Behandlung unterworfen.

(3) Das Feinschleifen erfolgt durch eine Planschliffbewegung. Die Schleifplatte besteht aus einer Planschale, in die Senkungen mit einem Winkel von 60° zur Schalenebene eingelassen sind (Abb.207). In diesen Näpfchen liegen die Kugeln und werden durch eine sich hin- und herbewegende Planplatte gedreht. Die Planplatte ist mit Gummi belegt, um so die Kugeln tangential 'mitnehmen' zu können.

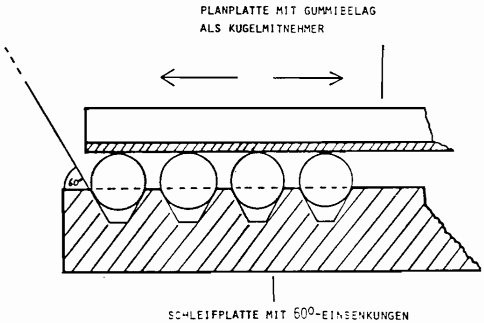
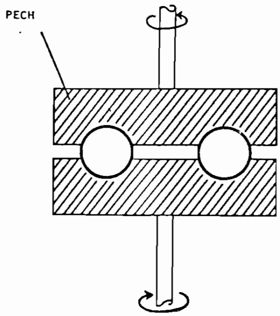


Abb.207 Kugelfeinschliff (Seitenansicht)



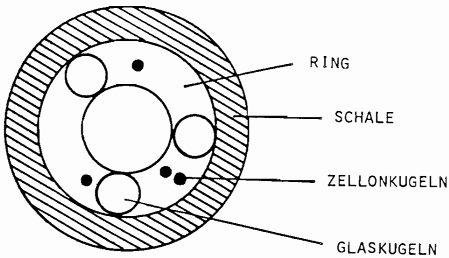


Abb.208 Polieren der Kugeln in Ringpechschalen (Seitenansicht)

Abb.209 Ringpechschale (Grundriß)

(4) Schließlich werden die Kugeln poliert, und zwar mittels einer geeigneten Poliermasse zwischen zwei gegenläufigen Schalen. Die Schalen enthalten ein spezielles hartes Teerpech mit einer kreisringförmig vorgepreßten Hohlrinne, in der die Kugeln laufen; "der Poliereffekt ergibt sich durch den Unterschied der Umfangsgeschwindigkeiten, die die Kugel selbstätig wälzen" (Zschommler, S.121; vgl. Abb.208 und 209).

Soweit unsere Beispiele für praktische Verfahren. Es ist nicht zu übersehen, daß es zu ihrer Durchführung immer schon mehr oder weniger gut realisierter Planflächen bedarf. Aus dieser Sicht erscheint die Primärerzeugung von Ebenen (neben der im nächsten Abschnitt behandelten Realisierung von Starrheit) als das wohl grundlegende Problem aller geometrischen Formenexhaustion. Man kann also verstehen, weshalb Dingler sich zeitlebens so brennend für dieses Problem und seine Lösung mittels Dreiplattenverfahren interessiert hat, insbesondere auch für die Frage nach den historischen Ursprüngen des Verfahrens. Eine von Dingler (1952, S.8f) zitierte briefliche Auskunft des Technikhistorikers O. Mahr ergibt dazu kurz folgendes Bild:

Das Dreiplattenverfahren scheint eine alte Handwerkerregel zu sein, über deren Erfindung man bis jetzt noch nichts sicheres aussagen kann. Wahrscheinlich ist sie englischen Ursprungs. Als mögliche Erfinder kommen J. Dollond (1706-1761) oder dessen Schwiegersohn J. Ramsden (1735-1800) in Frage. Dollond war ein bedeutender Optiker, der unter anderem Objektive aus zwei aufeinander verschiebbaren plan-konvexen Linsen herzustellen verstand. Ramsden galt als hervorragender Konstrukteur von mechanischen und optischen Instrumenten. Mit ihm in Verbindung stand der Franzose J.D. Cassini (1748-1845), von dem berichtet wird, er habe für Zwecke der Pariser Sternwarte drei große Stahlschienen mehrere Monate lang gegeneinander geschliffen. Ebenfalls ein berühmter Anwender des Dreiplattenverfahrens war H. Maudslay (1771-1831), der die im Präzisionsinstrumentebau entwickelte Methode in den allgemeinen Maschinenbau übernommen haben soll. Sein Schüler J. Nasmyth (1808-1890), der schottische Erfinder des Dampfhammers, berichtet in seinen Lebenserinnerungen eindrucksvoll von ihrer geschickten Handhabung durch seinen Lehrer (zitiert bei Klemm (1954), S.291f). Später baute dann J. Whiteworth (1803-1887), ein englischer Mechaniker, jahrzehntelang mit Maudslayscher Technik die besten Werkzeugmaschinen der Welt. Inhetveen (1983) erwähnt als die nach augenblicklichem Wissen erste lehrbuchmäßige Darstellung dieser Technik das "Handbuch der mechanischen Technologie" von K. Karmarsch in der 6. Auflage von 1888 (auf Seite 675f).

Als einen wichtigen Aspekt des Verfahrens stellt Dingler (1952, S.13) den Umstand heraus, daß man nun, anstatt - wie in früheren Zeiten - auf die besondere Kunstfertigkeit einzelner Handwerker oder gar auf glückliche Zufälle bei der Produktion angewiesen zu sein, die gewünschten Grundformen in Serie herstellen konnte. Dies gründet sich auf der Eindeutigkeit des Verfahrens: Wo und wann und mit welchem Plattentripel auch immer ebene Flächen hergestellt werden, stets lassen sich zwei solche Ebenen (auch aus verschiedenen Tripeln) verschiebbar passend aufeinanderlegen. Während E. Bopp (1958a, S.64f) hierin eine nicht weiter erklärbare Erfahrungsgegebenheit erblickt, glauben P. Lorenzen und seine Mitarbeiter in Erlangen, daß sich die Verfahrenseindeutigkeit irgendwie aus den Handlungsvorschriften ableiten läßt (vgl. etwa Janich (1973), S.136). Wir kommen auf diese von uns als Eindeutigkeitsproblem apostrophierte systematische Begründungsaufgabe der 'Protophysik' in Kapitel 10 genauer zurück.

9.3. Starrer Körper und Kongruenz

Zunächst soll kurz erklärt werden, weshalb wir hier den starren (oder deformationsfreien) Körper sowie seine Beziehung zum Kongruenzbegriff gesondert behandeln. Erster Grund ist die Kompliziertheit des Themas, die auch Dingler (1933, S.42) erkannt hat: "Ein Problem von unvergleichlich viel größerer Schwierigkeit und Komplikation als die Herstellung der Ebene ist die 'Herstellung' des deformationsfreien Körpers." (Am Ende dieses Abschnittes wird dem Leser klar geworden sein, weshalb Dingler hier von Herstellung in Anführungszeichen spricht.) Unser zweiter Grund liegt in der Tatsache, daß sich - anders als bei den übrigen geometrischen Formen - Idee und Realisation des starren Körpers weit weniger deutlich voneinander trennen lassen. Die Idee der Ebene als einer Fläche mit innerer und äußerer Homogenität ist unabhängig von der besonderen Art und Weise ihrer Verwirklichung, etwa durch das Dreiplattenverfahren, zu fassen. Hingegen kann man die Idee des geometrisch starren Körpers (bzw. der Kongruenz) inhaltlich nicht von ihrer Realisation ablösen und verstehen, ohne in einen pragmatischen Zirkel zu geraten.

Bevor wir auf Einzelfragen der Begriffsbestimmung eingehen, wollen wir noch einmal kurz an die Bedeutung des starren Körpers erinnern. Ein erster Hinweis ergab sich bereits aus unserer Erörterung des Dreikeileverfahrens, mit dem rechte Winkel hergestellt werden sollen. Auch das praktische Herstellen von Parallelität an Kanten oder Ebenen legt bei zweckmäßigem Vorgehen die Verwendung starrer Körper nahe. Will z.B. ein Schreiner zwei Regale parallel in einen Bücherschrank einpassen, so wird er dazu kaum überprüfen wollen, ob sich die gedachten Fortsetzungen der Regale irgendwo außerhalb des Schrankes treffen. Nicht Kontrolle der Schnittpunktfreiheit (nach Euklid), sondern der Äquidistanz ist das in der Praxis übliche und brauchbare Verfahren. Natürlich bedarf es dazu eines starren Maßstabes, mit dem man die Abstände überprüfen kann. Dieses Beispiel steht für zahllose andere, an denen ebenfalls die Hauptfunktion starrer Körper ersichtlich wird: Als frei bewegliche, d.h. von Ort zu Ort transportierbare Maßstäbe ermöglichen sie das Messen von Längen; sie sind damit eine notwendige Bedingung für jede angewandte Geometrie.

Wie läßt sich nun aber die Idee des starren Körpers einführen, und wie sehen die praktischen Verfahren aus, mit denen sie zu realisieren ist? Nach landläufiger Definition heißt ein Körper starr, wenn je zwei seiner Punkte bei allen Bewegungen des Körpers gleichen Abstand behalten. - Allerdings liefert diese Definition nur eine intensionale Begriffsbestimmung (im Sinne von 6.2); lediglich der interne Gebrauch von 'starr' relativ zum Begriff 'gleichabständig' (oder 'kongruent') wird durch sie geregelt. Schon früher einmal war uns aufgefallen, daß es für den Aufbau der Geometrie gleichgültig ist, von welchem der beiden Begriffe 'starr' oder 'kongruent' wir ausgehen (vgl. 7.4). Bei der praktischen Anwendung der Geometrie genügt es aber keineswegs, die gerade erwähnte Definition des starren Körpers zugrunde zu legen. Wir müssen darüberhinaus auch wissen, wie wir zu prüfen haben, ob zwei Punkte hier und zwei Punkte dort den gleichen Abstand besitzen (oder: zueinander kongruente Strecken markieren). Praktisch bleibt dazu nichts anderes übrig, als die erste Strecke auf einem geeigneten Maßstab abzutragen und nach Transport zur zweiten Strecke mit dieser zu vergleichen. Natürlich ist das nur sinnvoll, wenn man dabei einen starren Maßstab verwendet, und damit beginnt das Problem von neuem - wir geraten in einen ernstzunehmenden pragmatischen Zirkel. Gewiß, man entrinnt diesem circulus vitiosus, wenn Kongruenz nicht wiederum durch den starren Körper, sondern z.B. über Orthogonalität und Parallelität definiert wird. Wir haben dies in 7.4 erläutert, dort aber bereits zurückgewiesen zugunsten einer simultanen Einführung von starrem Körper und Kongruenzbegriff. Diese Einführung soll im folgenden so exakt wie (bei einer extensionalen Begriffsbestimmung) möglich geschildert und als zirkelfrei nachgewiesen werden.

Den besten Zugang dazu vermittelt eine kritische Diskussion der Beiträge, die Dingler zum Problem des starren Körpers geliefert hat. Wir unterscheiden dabei zweierlei Vorgehensweisen: (1) Dinglers Versuch einer Einführung 'von oben', die einer expliziten Definition des starren Körpers gleichkommen soll; (2) die von Dingler so genannte "empirische Definition des starren Körpers", in der ein externer Begriffsgebrauch durch Beschreibung der Realisierungsvorgänge gesichert wird; man könnte sie als eine Einführung 'von unten' bezeichnen. Um das Ergebnis gleich vorwegzunehmen: Wir werden (1) als unhaltbar fallen lassen, hingegen (2) zum Ausgangspunkt für unsere geplante Simultan-Einführung nehmen.

Zu (1): Dingler beschreibt die Idee der geometrischen Starrheit bündig wie folgt: "Ein Ding der Wirklichkeit heißt ein starrer Körper, wenn seine Veränderungen gemäß den Gesetzen der Euklidischen Geometrie vor sich gehen" (1911, S.133). Dementsprechend behauptet er später über die Realisierung dieser Idee: "In den Fabriken wird der starre Körper nicht rein empirisch, sondern durch

Exhaustion der euklidischen Geometrie hergestellt" (1920, S.492). Gegen diese Auffassung lassen sich folgende (unseres Erachtens triftige) Einwände erheben:

Wie Helmholtz in einer berühmten Abhandlung (1868/1968) nachgewiesen hat, führt die Annahme eines starren, d.h. hier: frei beweglichen, endlich ausgedehnten Körpers lediglich zur absoluten Geometrie (d.i. alles, was man in Euklids Geometrie ohne das Parallelenaxiom beweisen kann). Genauer besagt die freie Beweglichkeit: Jedes Tetraeder läßt sich in ein beliebiges Tetraeder mit gleichlangen Kanten durch eine abstandstreue Abbildung des ganzen Raumes überführen. Kurzum: Haben wir einen starren Körper, so können wir Abstände messen und damit höchstens eine Geometrie gewinnen, die noch nicht die euklidische ist. Wir erhalten sogar noch erheblich weniger als das (nämlich die Geometrie eines Riemannschen Raumes nicht notwendig konstanter Krümmung), wenn wir bloß eindimensional-starre Körper (lineare Maßstäbe) voraussetzen (vgl. dazu etwa Freudenthal (1956)).

Dingler würde diese Kritik mit dem Argument zurückweisen, seine Definition von Starrheit sei eben eine andere als die Helmholtz': durch Aufnahme der euklidischen Geometrie in die definierenden Bedingungen werde per se für ihre reale Gültigkeit gesorgt. Das setzt aber voraus, daß wir praktisch auftretende Abweichungen von euklidischen Verhältnissen beseitigen können, indem wir die Realisation der starren Körper in geeigneter Weise verändern (verbessern). Genau das glaubt denn auch Dingler, und weiterhin dies, daß dazu "die meisten Konstrukteure sich glatt ... bekennen werden" (1920, S.490). Mit Recht hat E. Bopp (1956) dagegen eingewendet, eine derartige Kontrolle von Körpern sei unmittelbar gar nicht durch die Gesetze einer Theorie möglich, "solange diese nicht durch Körper, Meßgeräte u. dgl. schon verwirklicht ist" (S.385). Das deckt sich mit dem, was wir in 9.1 im Anschluß an die Beschreibung der Exhaustionsformen über die 'Durchsetzbarkeit' von Theorien gesagt haben.

Wir wollen dies noch kurz an einem Beispiel illustrieren, mit dem Dingler (1933, S.43) glaubt, die 'Exhaustion der euklidischen Gesetze' vom "unmittelbaren Erleben" ausgehend plausibel machen zu können. Angenommen, ein Konstrukteur habe eine Konfiguration auf dem Reißbrett verfertigt, bei der eine Gerade nicht durch einen anderweitig entstandenen Schnittpukt geht, durch den sie jedoch nach euklidischen Theoremen verlaufen sollte. Wo steckt hier der 'Fehler'? Zunächst wird man ausschließen, daß die Konstruktion selbst unkorrekt durchgeführt wurde; dann wäre eine Überprüfung der Zeichengeräte angebracht: Ist das Reißbrett eben, sind die Lineale gerade, die verwendeten Zeichenstifte spitz genug? Besitzen ferner die Geräte, insbesondere der Zirkel, hinreichende Starrheitseigenschaften? - Könnte man bei sämtlichen genannten Instrumenten Fehler in dem Sinne ausschließen, daß auch eine verbesserte Realisierung dasselbe Abweichphänomen hervorruft, dann wäre dies nur so zu deuten, daß die euklidische Geometrie die praktische Geometrie unserer Formen und Meßgeräte nicht adäquat wiedergibt; oder anders ausgedrückt: die Ideen, nach denen wir diese Formen verwirklicht haben, stellen sich als nicht-euklidisch heraus. Dingler hingegen betrachtet die Situation genau umgekehrt: Für ihn ist jedes Abweichphänomen Zeichen einer mangelhaften Realisierung, deren Verbesserung "für alle Zeiten weiter gelingen wird", zumindest in dem Sinne, "daß es dem Konstrukteur für unbeschränkte Zeit freisteht, zu sagen: die Entfernung der Abweichung sei noch nicht gelungen" (1920, S.491).

Wie ist dieses unnachgiebige Verhalten zu beurteilen? Zunächst erklärt es sich aus Dinglers Ansicht, es genüge für Maßnahmen praktischer Realisierung, die euklidische Theorie in der Wirklichkeit gelten lassen zu <u>wollen</u> (!) und diesen Willen nicht aufzugeben. Hier können wir nicht mehr tun, als uns von solchen Ratschlägen zu distanzieren, die das Festhalten an einer Theorie bei jeder Eventualität und um jeden Preis empfehlen. Überdies beinhaltet unser Konzept von Realisation lediglich die Aufgabe, <u>Begriffe</u> (und <u>nicht</u> <u>Theorien</u>!) so gut wie praktisch möglich durch reale Formen zu exhaurieren (vgl. 9.1). Daß sich dabei in Reißbrettdimensionen nachträglich die euklidische Theorie als Geometrie dieser Formen herausstellt, ist ein erfreulicher Umstand (aber auch ein Nachteil unserer fiktiven Geschichte: Dingler scheint so im Recht zu sein, weil die Prämissen zu seiner Widerlegung nicht mit Aussicht auf Erfolg zu erwarten sind). Wie wir schon früher einmal herausgestellt hatten, ist überhaupt die Alternative sinnlos, entweder die euklidische oder eine nicht-euklidische Geometrie als real gültig nachweisen zu wollen. Welche Geometrie 'physikalisch richtig' ist, hängt nämlich u.a. erstens von dem Verfahren ab, mit dem man die Kongruenz von Strecken überprüft, und zweitens von gewissen allgemeineren Prinzipien der Theorienbildung (z.B. Einfachheitsüberlegungen).

<u>Zu</u> <u>(2)</u>: Dinglers zweiter Beitrag betrifft die Realisation des starren Körpers und ist bereits in seinen früheren Schriften dargestellt (1907, S.34ff, und 1911, S.24ff). Danach erfolgt die Realisation im Rahmen des allgemeinen (als Rekursion oder Iteration darzustellenden) Aufbauprozesses praktischer Verfahren: Zunächst entnehmen wir der Natur einen beliebigen Körper als 'starren Körper erster Stufe' (zweckmäßigerweise natürlich einen solchen, der sich für unser unmittelbares Erleben möglichst wenig verändert). "Mit dessen Hilfe können wir in allen Messungen einen gewissen 'Genauigkeitsgrad' erreichen. Dieser Genauigkeitsgrad erlaubt uns, den starren Körper wieder zu verbessern und mittels dieses neuen starren Körpers wieder einen höheren Genauigkeitsgrad zu erreichen etc." (1907, S.36). Hiermit ist unseres Erachtens eine brauchbare Grundlage zur Entwicklung angewandter Geometrie geschaffen. Natürlich glaubt Dingler, das von ihm beschriebene Realisationsverfahren werde geleitet durch die davon unabhängige 'Idee des euklidisch starren Körpers' (gemäß (1)). Demgegenüber erblicken wir in der Idee der Starrheit nichts anderes als das Realisa-

tionsverfahren selbst. (Darin liegt keineswegs eine Ungereimtheit: auch die Quadratwurzel aus 2 läßt sich durch eine approximierende Folge definieren, deren einzelne Glieder rekursiv auseinander berechnet werden.) Die Idee des starren Körpers zu besitzen bedeutet dann einfach dies: Auf jeder Realisationsstufe steht im Prinzip fest, wie die nächsthöhere Stufe zu erreichen ist.

Dementsprechend besteht im folgenden unsere Aufgabe darin, den Realisationsprozeß des starren Körpers hinreichend präzise zu beschreiben. Dieser Prozeß ist in mancher Hinsicht komplizierter als die früher behandelten praktischen Verfahren: Er läßt sich viel weniger auf charakteristische Handlungsvorschriften einschränken als dies bei der reellen Exhaustion von Formen möglich war (etwa beim Dreiplattenverfahren). Dafür haben wir es mit mehreren (für sich genommen selbst wieder vielschichtigen) Teilvorgängen zu tun, die wir als Selektion, Melioration und Korrektion bezeichnen. Zum Teil sind diese Vorgänge ein empirisches Realisieren (im Sinne von 6.2), teilweise haben sie aber auch (besonders die Korrektion) stärker exhaustiven Charakter. Bei unserer Darstellung verwenden wir R. Carnaps Definition einer zweistelligen Starrheitsrelation sowie eine von A. Grünbaum beschriebene Verwendung der Metrisierung der Temperatur bei der Korrektion des Längenbegriffs.

Besondere Aufmerksamkeit verdient sogleich der Anfang des Realisationsprozesses. Dingler hat ihn beschrieben als Wahl eines im Prinzip beliebigen, aus praktischen Gründen aber schon mit geeigneten Festigkeitseigenschaften ausgestatteten Naturkörpers. Was dabei 'geeignet' bedeutet, wollen wir einmal anhand einer genaueren Analyse verdeutlichen. Zunächst wird erklärt, wann zwei materielle Körper $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ relativ zueinander starr heißen sollen. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß sich an beiden eine gerade Kante befindet. Auf der Kante von $\mathfrak{K}$ wird eine Strecke a durch ihre Endpunkte A, B

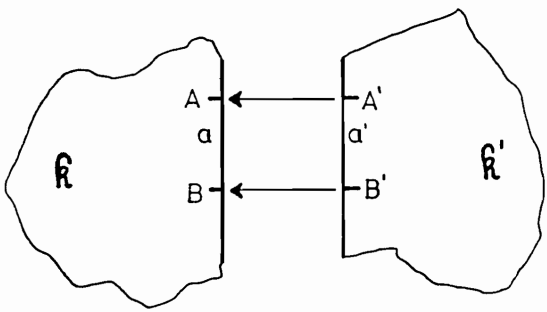


Abb.210 Relative Starrheit zweier Körper

markiert, entsprechend auf der Kante von $\mathfrak{K}'$ eine Strecke a' mit den Endpunkten A', B'. Ein operationales Verfahren zur Überprüfung der Kongruenz von a und a' besteht in folgendem: Die Kanten werden so aneinandergelegt, daß A mit A' zur Deckung kommt und die Pfeile $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{A'B'}$ in die gleiche Richtung zeigen. Fällt dann dabei auch B mit B' zusammen (s. Abb.210), so behaupten wir die Kongruenz von a und a'.

Man beachte, daß diese Behauptung eine empirische Hypothese darstellt, die durch Wiederholung des Prüfvorgangs zu erhärten ist. Das gleiche Verfahren wenden wir nun auch auf andere Körpersegmente an. Sind und bleiben dann wiederum entsprechende Strecken kongruent, so sagen wir, daß $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ relativ zueinander starr sind. Diese von Carnap zuerst in (1926, S.25), später in (1966/1974, S.98) erwähnte Definition enthält keinerlei methodischen Zirkel mehr; die verwendete Kongruenzbeziehung ist empirisch abgeschwächt und beruht selbst nicht wieder auf einem Begriff von (absoluter) Starrheit. (Dingler (1928, S.80f) bestreitet allerdings zurecht, daß diese Definition zur Festlegung von Starrheit ausreiche.)

Wählen wir nun $\mathfrak{K}$ als Maßstab, so bleiben auf (relativ zu $\mathfrak{K}$ starrem) $\mathfrak{K}'$ ausgezeichnete Strecken konstant. Unsere Starrheitsrelation ist also offenbar eine Äquivalenzbeziehung, mit der wir prinzipiell alle Körper in Klassen einteilen können. Z.B. gehören ein Eisenstab und ein Wachsblock sicherlich nicht derselben Klasse an, sie verändern ja ihre Form unter gleichen Einwirkungen (von Wärme, Druck, usw.) in recht unterschiedlicher Weise. Hingegen sind etwa Körper aus Eisen und Kupfer äquivalent, selbst wenn sich durch auf späterer (!) Genauigkeitsstufe mögliche Längenmessung voneinander abweichendes Formänderungsverhalten feststellen läßt.

Unsere Einteilung in Klassen relativ zueinander starrer Körper stellt uns vor die Aufgabe, eine dieser Klassen auszuwählen, aus deren Körpern der erste Grundstock von Maßstäben und Meßgeräten verfertigt werden soll. Wir fragen also: Welche Prinzipien der Selektion bieten sich an? - Zwei Möglichkeiten wollen wir hier betrachten, die sich im übrigen nicht gegenseitig ausschließen:

a) Man vergleicht die Äquivalenzklassen ihrer Größe nach. Dabei stellt sich heraus: Es gibt nur eine sehr umfassende Klasse von Körpern, die angenähert relativ zueinander starr sind. Dazu gehören die meisten Metalle, Stein, Glas, trockenes Holz und viele weitere ähnlich feste Stoffe. Die Existenz dieser großen Klasse ist natürlich keine theoretische Einsicht, sondern ein günstiger Umstand der Erfahrung, genauer: eine empirisch sehr gut bestätigte Hypothese. Man kann sich durchaus eine Welt vorstellen, in der es mehrere große Klassen relativ zueinander starrer Körper gibt. In jener Welt müßten wir die Wahl einer Standardklasse aufgrund anderer Überlegungen treffen als die, gemäß denen sich

Physiker für Standardobjekte aus der einen großen Klasse entscheiden (siehe b)). Nach Carnap handelt es sich dabei im wesentlichen um eine zweckmäßige Übereinkunft. Denn: Nehmen wir unsere Maßstäbe aus der umfassenden Klasse, so stellt sich eine größere Anzahl von Naturgegenständen als unveränderlich heraus, es ergeben sich also auch viel einfachere Gesetzmäßigkeiten bei der theoretischen Beschreibung der Natur (vgl. Carnap, S.99).

Dieser Standpunkt, wenngleich wenig zufriedenstellend, ist doch überaus konsequent. Zunächst hat es den Anschein, als stelle er die kausale Ordnung auf den Kopf: Wir sind ja gezwungen, einen den Maßstab verändernden Effekt als Ursache einer Formveränderung in der gesamten übrigen Welt anzusehen. Andererseits können wir legitimerweise einen derartigen Effekt gar nicht feststellen, ohne wiederum einen weiteren Maßstab zu benutzen. Ist der zweite Maßstab aber relativ zum ersten starr, so wird man an diesem auch dann keine Änderung feststellen können. Bleibt die Frage: Wodurch entsteht die Schwierigkeit mit der kausalen Ordnung? Die Antwort lautet: Sie beruht auf der stillschweigend eingeschleusten Vorstellung von verschiedenen Graden der Starrheit; wir denken uns nämlich den zweiten Maßstab als einen 'starreren', der von dem betreffenden Effekt nicht verändert wird und sich somit dazu eignet, ihn als Kriterium für eine Längenänderung des ersten Maßstabes zu qualifizieren. Wie läßt sich diese Vorstellung durch geeignete Prüfkriterien (und Herstellverfahren) mit praktischem Inhalt füllen? Damit befassen wir uns in b) sowie den darauf folgenden Bemerkungen über Melioration und Korrektion.

b) Um festzustellen, welcher von zwei vorgegebenen Körpern der 'starrere' ist, bedarf es einer geeigneten Methode des Vergleichs. Eine solche Methode würde zwei Dinge leisten: Erstens wäre sie Grundlage für eine operationale Einführung des komparativen Starrheitsbegriffs, d.h. des Prädikates ' x ist starrer als y '. Zweitens besäßen wir in ihr ein praktikables Prinzip zur Selektion einer der Klassen von relativ zueinander starren Körpern. Man hätte ja lediglich Körper aus verschiedenen Äquivalenzklassen miteinander zu vergleichen. - Dazu taugliche praktische Verfahren wollen wir mit einem von E. Bopp (1956) verwendeten Ausdruck als Vergleichsverfahren bezeichnen. Es ist wichtig zu erkennen, daß ein Vergleichsverfahren nur mit Bezug auf die beim Vergleichen verfügbaren Mittel der Unterschiedswahrnehmung definiert werden kann. Verfügen wir etwa schon über Meßgeräte, so ergibt sich natürlich eine größere Trennschärfe als ohne jeglichen Maßstab. Wir stehen hier also vor derselben rekursiven pragmatischen Ordnung, von der bereits früher bei den praktischen Verfahren im allgemeinen die Rede war. An ihren Anfang, also bei der Selektion eines ersten starren Standardobjektes, müssen wir uns daher auf Unterschiede im unmittelbaren Erleben (von Festigkeit gegenüber Druck, von räumlicher Ausdehnung etc.) beschränken. Allein das Prinzip bleibt auf jeder Stufe das gleiche: Die beiden zu vergleichenden Körper werden bestimmten 'belastenden Bedingungen' ausgesetzt wie Druck, Zerreißproben, Wärmezufuhr und dgl. mehr. Sodann wird mit den auf der jeweiligen Stufe verfügbaren Mitteln geprüft, welcher Körper stärker seine Form verändert (vgl. Dingler (1911), S.24ff, und Bopp (1956), S.387). Natürlich kann es dabei vorkommen, daß sich ein Körper, der weniger hart ist als ein anderer, dennoch bei Erwärmung nicht in dem Maße ausdehnt wie dieser. Welches Vergleichskriterium den Vorrang verdient, hängt weitgehend von dem Zweck ab, für den die Starrheit eines Objektes benötigt wird.

Soviel zur Erörterung der Selektionsprinzipien. Der hier (unter b)) zuletzt genannte Punkt verweist uns aber noch auf ein weiteres Erfordernis bei der Realisation des starren Körpers. Das bisherige selektive Vorgehen läßt die natürlichen Körper in gewissem Sinne unangetastet. Wir sahen aber: Ein Vergleichsverfahren kann unterschiedliche Starrheitsordnungen derselben Körper bei verschiedenen Vergleichskriterien liefern. Daraus entspringt die naheliegende Aufgabe, einen weiteren Fortschritt dadurch herbeizuführen, daß man Körper durch praktisches Bearbeiten zu starreren macht. Dieser (von uns Melioration, d.h. Verbesserung, genannte) Vorgang soll, wie schon die Selektion, auf einen Körper führen, der bezüglich endlich vieler Vergleichskriterien $V_1, \ldots, V_n$ starrer ist als sämtliche Körper eines vorgegebenen Systems S. Auch in den einfachsten Fällen (in denen z.B. $n = 1$ und S einelementig ist) kann die Melioration den Praktiker vor überaus schwierige Aufgaben stellen. Seit alters her gibt es zu deren Bewältigung bekannte Techniken wie z.B. das Trocknen von Holz, das Herstellen geeigneter Legierungen oder das Härten von Metallen, vornehmlich Eisen, durch starkes Erhitzen und anschließendes Abschrecken in Wasser oder (aufgeheiztem) Öl. Für die Melioration lassen sich keine Apriori-Rezepte angeben. Wann immer man hier Erfolge erzielt, so hat man dies glücklichen Umständen in der Beschaffenheit der Natur zu verdanken.

Selektion und Melioration reichen noch keineswegs aus, um hochgradige Starrheit an Körpern zu realisieren. Der Grund dafür ist einfach: Alle so ausgewählten und bearbeiteten Körper verändern sich nach wie vor unter verschiedenen äußeren Einflüssen. Die Beherrschung dieser Einflüsse ist Aufgabe der Korrektion. Dabei wird der betreffende Körper weder bearbeitet noch gegen einen anderen ausgetauscht; vielmehr wird sein Formänderungsverhalten unter einer vorgegebenen Einflußgröße beschrieben. Das entscheidende Problem liegt in der Messung dieser Einflußgröße. Üblicherweise bedarf es dazu nämlich einer metrischen Skala, d.h. wir brauchen wiederum in irgendeiner Form den starren Körper. Das bekannteste Beispiel einer solchen Einflußkorrektur ist das Verfahren, das man bei der Erwärmung des betreffenden Körpers anwendet. Dazu muß man natürlich zunächst einmal Temperaturen messen können. Eine genauere Analyse der Regeln, aufgrund deren der Temperaturbegriff eingeführt wird, zeigt dann aber das Ergebnis: Notwendige Bedingung jeder Temperaturmessung ist die Existenz einer Längenmessung.

Praktisch kennt dies jedermann als die Skaleneinteilung an den handelsüblichen Thermometern. Zunächst scheint es also, als gerieten wir damit erneut in die Gefahr, uns einen pragmatischen Zirkel einzuhandeln. Doch ist diese Gefahr gebannt durch den rekursiv-stufenweisen Aufbau, der auch den Vorgang der Korrektion kennzeichnet (Abb.211).

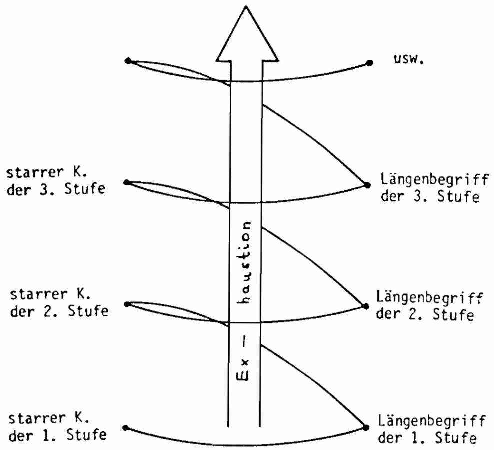


Abb.211 Realisation von Starrheit über Korrektion des Längenbegriffs

Den Effekt, den wir hierbei durch die Korrektion erzielen, könnte man bildhaft beschreiben als das Auseinanderziehen des pragmatischen Zirkels zu einer nach oben hin unbegrenzten 'Exhaustionsschraube'. Dies geschieht im einzelnen (am Beispiel von Wärmezufuhr als äußerem Einfluß) wie folgt: Mit einem aus Selektion und Melioration hervorgegangenen starren Körper der 1. Stufe begründen wir einen zugehörigen Längenbegriff (Kongruenzbegriff) der 1. Stufe. Dies gestattet weiterhin die Einführung einer Temperaturskala und damit eines Temperaturbegriffs der 1. Stufe. Sodann definieren wir l_0 als die Länge unseres Maßstabkörpers bei einer (im Prinzip willkürlich festgesetzten) Normaltemperatur T_0. Hat nun der Körper die Temperatur T, so berechnen wir seine Länge l nach der Korrekturformel:

$$l = l_0 \cdot \left[1 + \beta(T - T_0)\right].$$

Dabei ist β eine für das Material des Maßstabes spezifische Konstante, der sog. Wärmeausdehnungskoeffizient. Durch diese Korrektur erhalten wir, auf einer 2. Stufe, verbesserte Begriffe von Starrheit und Länge. Der 'neue' starre Körper ist indessen kein anderer Körper, sondern der Maßstab der 1. Stufe unter konstant gehaltener Temperatur. Der Körper zusammen mit den physikalischen Bedingungen, von denen er beeinflußt wird, bildet also streng genommen das jeweilige Realisat des Starrheitsbegriffs. Es läßt sich verbessern, indem der ganze Korrekturvorgang wiederholt wird. Wir nehmen dazu das Realisat der 2. Stufe, erhalten mit seiner Hilfe einen verbesserten Temperaturbegriff der 2. Stufe und gelangen dann über erneute Längenkorrektur (nach obiger Formel und mit diesem Temperaturbegriff) zu einem Realisat der 3. Stufe usw.

Die soweit geschilderte Korrektion kann (oder muß) prinzipiell auch bezüglich anderer relevanter Einflußgrößen durchgeführt werden, solange sich deren Metrisierung auf den Längenbegriff stützt. In jedem Falle bewirkt sie dadurch eine sich wechselseitig aufschaukelnde Exhaustion von Starrheit und Länge (bzw. Kongruenz) und in diesem Sinne eine simultane Einführung beider Begriffe durch stufenweise Realisation. Wann dieser Vorgang in der Praxis abbricht, richtet sich nach dem, was technisch möglich und was an Genauigkeit nötig ist. Ein solches Stufenverfahren zur Festlegung einer Geometrie hat schon Grünbaum (1959, S.219f) beschrieben. Man findet es auch in Stegmüller (1970, S.83ff) und mit erhellender Präzisierung in Düsberg (1980, S.91ff).

Wir haben die drei Teilvorgänge bei der Realisierung von Starrheit jeweils für sich genommen studiert. Sie hängen aber auch untereinander zusammen, denn Realisate, die aus einem Teilvorgang hervorgehen, können in den anderen Teilvorgängen eine höherstufige Realisation bewirken; z.B. lassen sich Ergebnisse der Korrektion vorzüglich zur Verbesserung von Vergleichsverfahren einsetzen. Diese Rückwirkung vom Realisat auf die Realisation haben wir in einem Diagramm (Abb.212) durch unterbrochene Pfeile dargestellt.

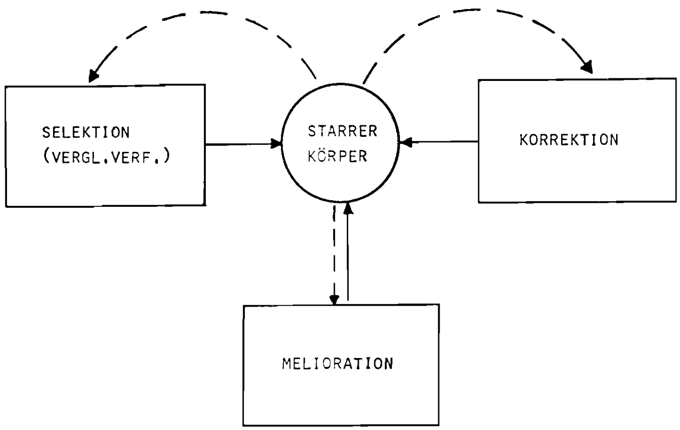


Abb.212

Eingangs hatten wir darauf aufmerksam gemacht, daß Dingler von der 'Herstellung' des starren Körpers (in Anführungszeichen) spricht. Ein Herstellen im engeren Sinne ist nämlich nur die Melioration. Insbesondere ist deutlich geworden, daß wir durch Korrektion keinen Körper herstellen, sondern lediglich ein Feld von Bedingungen, und auch dies oft nur im Sinne einer theoretischen Maßnahme.

10. ZUR DISKUSSION ÜBER DIE OPERATIVE GRUNDLEGUNG DER GEOMETRIE

> Wir stehen in diesen Dingen nicht am Ende, sondern am Anfang, und es ist hier noch ungeheuer viel zu tun.
>
> Hugo Dingler: Das Experiment. 1928

> Man soll aus Definitionen nicht folgern: das heisst entweder, man soll daraus, dass man sich ohne Widerspruch in die Beschreibung eines Dinges, welches ganz unabhängig von unserer Beschreibung existiert, ein gewisses Merkmal hat denken können, nicht ohne weiteren Grund schliessen, dass dasselbe darum im wirklichen Dinge anzutreffen seyn müsse; oder man soll dabei einem Dinge, das selbst erst durch uns, nach einem davon gebildeten Begriffe, der den Zweck desselben ausdrückt, hervorgebracht werden soll, aus der Denkbarkeit dieses Zwecks noch nicht auf die Ausführbarkeit desselben in der Wirklichkeit schliessen.
>
> Johann G. Fichte: Über den Begriff der Wissenschaftslehre oder der sogenannten Philosophie. 1794

In den früheren Kapiteln haben wir ausführlich die operative Interpretation der Geometrie behandelt. Nun beschäftigen wir uns, wesentlich knapper, mit einigen wichtigen Problemen ihrer operativen Grundlegung. Diese Probleme betreffen den systematischen Aufbau über einer operativ interpretierbaren Basis sowie einige zugehörige methodologische Kriterien. Im Unterschied zur operativen Interpretation steht bei den Grundlegungsfragen kein genetisches oder didaktisches Konzept im Vordergrund; formale Systematik und Metatheorie bilden den engeren Rahmen. Es führt im Augenblick wohl kein Weg an der Feststellung vorbei, daß ein operativer Aufbau eines größeren Stückes Geometrie noch nicht gelungen ist - jedenfalls ist das unser Eindruck von der gegenwärtigen Lage der Dinge. Dabei bleibt uns im folgenden kaum etwas anderes übrig, als dem Leser einige uns wichtig erscheinende, wenngleich fragmentarische Themenbereiche vorzustellen: Zunächst den Grundgedanken der 'Protophysik' einschließlich der Stellungnahmen einiger ihrer Kritiker (10.1), dann die Fragen des axiomatischen Aufbaus (10.2) sowie die Probleme im Umkreis des Eindeutigkeitspostulates, zu denen insbesondere der seit 1977 unternommene Versuch P. Lorenzens gehört, die (euklidische) Geometrie als eine 'konstruktive Theorie' der Formen räumlicher Figuren zu begründen (10.3).

10.1. Bemerkungen über Aufgabe und Möglichkeit einer 'Protophysik'

Der Begriff 'Protophysik' wird zum ersten Mal in einem Aufsatz von P. Lorenzen (1961/1968) gebraucht und erläutert. Seitdem gibt es ein 'protophysikalisches Programm', über das Diplomarbeiten und Dissertationen geschrieben werden und (teilweise etwas aufgeregte) wissenschaftliche Auseinandersetzungen stattfinden. Reichhaltiges Material enthalten z.B. die Sammelbände Kambartel/Mittelstraß (1973), Böhme (1976), die von Kuno Lorenz (1978) herausgegebene Festschrift für Lorenzen, sowie Pfarr (1981).

Die ideengeschichtlichen Wurzeln der 'Protophysik' reichen über Dingler zurück bis hin zu Kant. In seinen "Metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft" von 1786 untersucht Kant die philosophischen Grundlagen der seit Galilei und Newton entstandenen klassischen Physik. Obwohl die physikalische Erkenntnis auf die Erfahrung angewiesen ist, besitzt sie nach Kant nicht bloß hypothetische Allgemeinheit, d.h. sie liefert unter anderem auch solche Aussagen über die Wirklichkeit, die nicht nur wahrscheinlich sind, sondern die immer und überall gelten ('vor' aller Erfahrung, apriori). Wie soll das aber möglich sein? Kant erblickt den Grund dafür darin, daß keine Erkenntnis ohne Begriffe vonstatten geht und daß sich weiterhin einige Erkenntnisse schon aus den Prinzipien ergeben, nach denen die benutzten Begriffe gebildet (konstruiert) wurden. Das durch diese Prinzipien fundierte Gebiet einer Naturwissenschaft nennt Kant ihren "reinen Teil". Was Kant für den "reinen Teil" der Physik hielt, ist damit eine Art Vorläufer der 'Protophysik'.

Daß eine Wissenschaft überhaupt einen "reinen Teil" besitzt, ist keineswegs absonderlich. So ist etwa die Mathematik mit ihrem "reinen Teil" identisch, d.h. alle ihre Sätze beruhen auf den Prinzipien (Definitionen, Axiomen), mit denen mathematische Begriffe festgelegt werden. Welches sind nun aber die Prinzipien, die in einer empirischen Disziplin wie der Physik ein apriorisches Kernstück begründen könnten? Dingler hat klar erkannt, daß dazu die Prinzipien in Betracht kommen, welche die physikalischen Meßvorgänge (insbesondere die Herstellung von Meßapparaten) ermöglichen. Eine erste Aufgabe besteht dann im Aufsuchen dieser Prinzipien; eine zweite Aufgabe im Ermitteln dessen, was aus ihnen allein mit logischen Mitteln gefolgert werden kann. Angenommen, $\mathfrak{A}$ sei eine derartige Folgerung. In einem gewissen Sinne ist dann $\mathfrak{A}$ apriorisch. Sicherlich gilt $\mathfrak{A}$ nicht vor oder unabhängig von jeder Erfahrung (z.B. einer vortheoretischen und qualitativen Alltagserfahrung). Wohl erscheint es aber unmöglich, $\mathfrak{A}$ aufgrund von Erfahrungen zu widerlegen, die wesentlich auf Messungen (mit $\mathfrak{A}$ implizierenden Verfahrensprinzipien) beruhen. Eine solche 'Widerlegung' stünde nicht mit dem Prinzip der pragmatischen Ordnung im Einklang. So ist es nicht von vornherein aussichtslos, der Physik durch Analyse von Meßvorgängen ein apriorisches Vorfeld - eine 'Protophysik' - abzuringen und methodisch vorzuordnen.

Die einschlägigen Arbeiten Dinglers, und erst recht die Kants, werden allerdings von heutigen Kennern der Physik ignoriert, abgelehnt oder - bestenfalls - in der bisher von uns geschilderten allgemeinen Grundabsicht gewürdigt. Das hängt zweifellos zusammen mit der (zeitbedingt) nicht immer klaren Terminologie, einer teilweise erheblichen Unsicherheit in Details sowie einem philosophischen Rahmenwerk, das die Neigung begünstigt, ein zu großes Terrain der Physik ohne wirklich stringenten Nachweis für apriorisch zu erklären. Mit der 'Protophysik' sollen nun diese Mängel überwunden werden. Von der Naturphilosophie Kants beläßt sie allein noch den allgemeinen Gedanken eines "reinen Teils" der Physik als eine sie ermöglichende Grundlage; von Dingler übernimmt sie die Intention, "Messen als zweckgerichtetes Handeln zu begreifen" (Janich (1976b), S.347) und dazu die methodischen Prinzipien physikalischer Meßvorgänge anzugeben.

Für die Physik grundlegend ist das Messen von Längen, Zeitdauern und (trägen) Massen. Dementsprechend umfaßt das 'protophysikalische Programm' die Disziplinen Geometrie, Chronometrie und Hylometrie.

Die Hylometrie ist zugegebenermaßen "bisher nur Programm. Im Gegensatz zur Geometrie gibt es hier noch nicht einmal traditionelle Theorien, sondern nur 'philosophische' Spekulationen über die Erhaltung der Substanz oder in die empirische Physik eingebettete Lehrstücke der allgemeinen Mechanik, z.B. Erhaltungssätze des Impulses und der Energie" (Lorenzen/Schwemmer (1973), S.169). "Die Hylometrie liefert auf der Basis von Geometrie und Chronometrie die klassische Mechanik bei Ausschluß der Gravitationslehre" (S.170). Eine kritische Studie zur "Protophysik der klassischen Mechanik" liefert P. Mittelstaedt (1976), einen Vorschlag zum "Mass der Masse" Janich (1978).

Der umfassendste Beitrag zur Chronometrie ist die Erlanger Dissertation Janichs (1969: "Die Protophysik der Zeit", 2., überarb. Aufl. 1980). Kritische Stellungnahmen dazu sind zahlreich, etwa bei Büchel (1970), Böhme (1973), Grieder (1976), Ascheberg/Herrgott/Krauser (1978), A. Kamlah (1978) und Düsberg (1980). Janich hat in der 2. Auflage seiner Untersuchung auf einige der Kritiken aus jüngerer Zeit reagiert, findet allerdings "insgesamt ... nichts Neues gegenüber den älteren Kritiken" (S.121). Ein Hauptproblem der 'protophysikalischen' Chronometrie ist die Klärung ihres Verhältnisses zur Speziellen Relativitätstheorie (vgl. dazu Pfarr (1981)).

Als zu ihrer Zeit jeweils richtungweisende Beiträge der 'Erlanger Schule' zur 'Protogeometrie' nennen wir Lorenzen (1961/1968), W. Kamlah/Lorenzen (1967, S.225-231), Lorenzen/Schwemmer (1973, S.162-168), und Janich (1976a). Mit Lorenzen (1977) beginnt eine Umorientierung der 'Protogeometrie', nämlich weg von der operativen Interpretation auf der Basis des Homogenitätsgedankens hin zur Konzeption einer formentheoretisch zu begründenden 'konstruktiven Geometrie'. Vollständig vollzogen ist diese Wendung in der Habilitationsschrift von Inhetveen (1983), in der auf Homogenitätsprinzipien ausdrücklich verzichtet wird.

Wenn wir diese Entwicklung der Geometriebegründung betrachten, so bietet sich ein irritierendes Bild dar. Wir stehen einer Reihe von Ansätzen gegenüber, die zum Teil erheblich voneinander abweichen, ohne daß die Unterschiede immer mit der nötigen Ausführlichkeit erläutert werden, und die ferner praktisch nicht über das bloße Nennen von Prinzipien und einige Andeutungen zum tatsächlichen Aufbau hinausgehen. (Inhetveen (1983) bildet davon eine gewisse Ausnahme, allerdings ist hier (s.u.) zu fragen, inwieweit seine "formentheoretische Begründung" überhaupt noch dem Bereich des operativ Interpretierbaren zugehört.) Hinzu kommen die vielen allgemeinen (oft polemischen) Ausführungen, in denen 'Protophysiker' die bestehende Wissenschaft kritisieren und für revisionsbedürftig erklären. Das kann natürlich solange nicht überzeugen, als die in ihrem eigenen Programm anvisierten Alternativen in den Anfängen stecken zu bleiben drohen (Feyerabend (1973) spricht sogar von der "Erlanger Protozoenphysik") oder inhaltlich nur sehr unzureichend eingelöst werden.

Wir geben nun einen kurzen Einblick in einige kritische Stellungnahmen zur 'Protophysik' (des Raumes); er soll dem Leser lediglich eine eigene Beurteilung erleichtern, der sachliche Gehalt der Diskussion ist dabei nicht ausführlich zu behandeln. Für eine andere Darstellung möglicher Einwände und Schwierigkeiten sei auf Schreiber (1978c, S.10ff) verwiesen. Eine ausführliche Verteidigung der 'Protophysik' gegen die in Böhme (1976) zu Wort gekommenen Kritiker liefert Janich (1976b).

Die Anknüpfung an Gedanken und methodische Prinzipien Dinglers scheint auf Außenstehende gelegentlich provozierend zu wirken, erst recht wenn sie mit vergleichsweise hochgeschraubten Begründungsansprüchen verbunden wird. Ein solcher Verdacht auf "Dinglerismus" und "Forderung nach Absolutbegründung", wie ihn z.B. Stegmüller (1973, S.26) äußert, trifft eher ältere Konzeptionen (z.B. von B. Thüring). Zumindest liegt eine Aufrechterhaltung dogmatischer und spekulativer Reste nicht in der erklärten Absicht der 'Protophysiker'. Lorenz/Mittelstraß (1969) klären dazu eingehend und kritisch das Verhältnis zu Dingler, und Mittelstraß opponiert nachdrücklich "wider den Dingler-Komplex" (1974). Aber auch außerhalb der 'Erlanger Schule' setzt man sich kritisch sondierend mit Dinglers Auffassungen auseinander; wir nennen hier nur Hölling (1971), Willer (1973) (Gesamtdarstellung mit ausführlicher Bibliographie) und

Torretti (1978). Torretti analysiert sehr gründlich Dinglers Beiträge zur Geometriebegründung (u.a. auch die Schwierigkeiten in der Theorie des starren Körpers); die 'Protogeometrie' betrachtet er dabei von einem mehr mathematischen Standpunkt und glaubt, sie werfe ein geeignetes Licht auf die wirklichen Verdienste Dinglers. Wenn man hier auch in einer Reihe von Punkten zustimmen kann, so dürfte zumindest eine (von Dingler durch die 'Erlanger Schule' übernommene) Position Zweifel auf sich ziehen: die beanspruchte Auszeichnung der euklidischen Geometrie durch den 'protophysikalischen' Aufbau. Beinahe alle Kritiker äußern sich zu diesem Thema ablehnend (z.B. Büchel, Kanitscheider) oder wenigstens einschränkend (z.B. Mittelstaedt, Lenk). Wir halten die Frage der Euklidizität für interessant, jedoch keineswegs für das wichtigste Problem der 'Protophysik', obwohl gerade das - leider - immer wieder so hingestellt wird (vgl. Janich (1976a), S.83). Da wir in 10.3 auf diesen Streitpunkt noch einmal zurückkommen, wird er für das nächste weitgehend ausgespart.

In externer Kritik der 'protophysikalischen' Geometrie begegnen wir zumeist einer deutlichen Zurückweisung, z.B. bei Meschkowski (1964, 1976), Büchel (1970), Kanitscheider (1971). Diese Autoren halten anscheinend nicht einmal den Ansatz für sinnvoll. Sie räumen Dingler und Lorenzen wohl die Begründung einer 'technischen' Geometrie ein, z.B. für Steinmetze (Meschkowski (1964), S.59) oder für Maschinenbauer (Kanitscheider (1971), S.192, unter Berufung auf das in Kyburg (1968), S.218ff, als "Stahl-Block-Interpretation" geschilderte Dreiplattenschleifverfahren); sie betrachten aber diese Begründung als hinfällig angesichts der erfolgreichen Verwendung nicht-euklidischer Theorien in der Physik (Meschkowski (1976), S.48f, Kanitscheider, S.192, Büchel (1970/1976), S.237, S.255). Kanitscheider stimmt mit Meschkowski darin überein, daß die nach Homogenitätsvorschriften praktisch realisierten Formen, z.B. Geraden, nicht notwendig "auch die Geraden der wirklichen Geometrie sind" (S.194).

Natürlich fragt man sich, was hier 'wirkliche Geometrie' überhaupt bedeuten kann. Manche Äußerungen erwecken den Anschein, daß eine solche Kritik auf ontologischen Vorstellungen von einer der Wirklichkeit von sich aus inhärenten Geometrie beruht. Doch spricht z.B. Kanitscheiders Rede vom "optischen Standardmodell der wirklichen Geometrie" (S.194) eher dafür, daß man sich an die Aussagen der relativistischen Physik hält, um aus ihnen unmittelbares Tatsachenwissen und damit die 'Geometrie der Wirklichkeit' zu gewinnen. Zweifellos bringt dies Unklarheiten in die pragmatische Ordnung, doch wird man eingestehen müssen, daß die 'Protophysik' diese wirklich vorhandenen Schwierigkeiten in den operationalen Grundlagen bislang mehr programmatisch denn tatsächlich gemeistert hat. Kanitscheider äußert noch weitergehende, allerdings kaum verständliche Bedenken, wonach "der Umweg der Klärung des begrifflichen Status der geometrischen Grundbegriffe über Theoreme der traditionellen Metaphysik dazu angetan ist, die Situation zu verdunkeln" (S.200). "Metaphysik" zielt dabei auf die (vorausgesetzt geglaubte) Platonische Ideenlehre sowie den in der Tradition der Transzendentalphilosophie stehenden Versuch, apriorische Vorbedingungen wissenschaftlicher Erkenntnis aufzuzeigen.

Auch Büchel kritisiert das 'protophysikalische' Programm auf der Basis von empirischen Gegebenheiten, auf die sich z.B. die Relativitätstheorie berufe. Immerhin sucht er aber gerade im Hinblick auf letztere, "mit dem Grenzbegriff, mit der 'Idee' des unendlich starren und zugleich unendlich kleinen Körpers" eine Möglichkeit darzulegen, "mit rein protophysikalischen Mitteln, durch bloßes Aneinanderlegen, Vergleichen und Abzählen, ohne Heranziehung einer Messung oder physikalischen Theorie, zu einer eindeutigen Festlegung der Längenmessung zu gelangen" (1970/1976, S.261).

Grundsätzliche Kritik an den Ansprüchen der 'protophysikalischen' Theorie, insbesondere an ihrer behaupteten Apriorität, übt Düsberg (1976). Er bestreitet den apriorischen Charakter 'protophysikalischer' Aussagen aufgrund der Feststellung, daß ideative Normen eben nur Zielvorstellungen, keinesfalls jedoch die Garantie exhaustiver Realisierungsmöglichkeiten enthalten (vgl. S.271, S.273 sowie Düsberg (1980); teilweise ähnliche negative Kritik äußert Fertig (1978), S.41ff und S.48f).

Als nächstes wollen wir eine Reihe von Autoren anführen, die dem 'protophysikalischen' Ansatz wenigstens im Prinzip zustimmen, wenn auch teilweise aus verschiedenen Gründen. O. Becker (1964b) gesteht ihm "eine transzendentale Bedeutung im Sinne Kants" zu, "nämlich als Bedingung der Möglichkeit der physikalischen Erfahrung, besonders der physikalischen Messung" (S.63). Überdies würdigt Becker die Idee der Homogenität als grundlegend und ordnet sie in die Geschichte der geometrischen Grundlagenprobleme ein. Allerdings glaubt er, daß (damit) die euklidische Parallelenfrage nicht ohne Hinzunahme anderweitiger Forderungen zu entscheiden sei (vgl. S.54f, S.59). Auch Lenk (1975) hält trotz einer Reihe von Abstrichen zumindest an der methodologischen Bedeutung des Programms fest, denn es "zeigt deutlich die methodische und historische Einbettung der Geometrie als mathematischer Disziplin in die zum großen Teil kulturell geformte Herstellungspraxis" (S.287), es handele sich daher "um eine sinnvolle, einfache, praxisnahe - aber nicht die einzig mögliche rationale Rekonstruktion" (S.291). Laugwitz (1978) folgt Lorenzen aber immerhin darin, "daß Homogenitätsprinzipien der einzige bisher bekannte Vorschlag sind, die Geometrie zu begründen" (S.249). Außer an der Euklidizität der so zu begründenden Geometrie zweifelt Laugwitz an dem Bemühen, Orthogonalität und Parallelität anstelle von Kongruenz als operative Grundbegriffe zu wählen. Ferner stellt er neben die Längenmessung ein "Ähnlichkeitsprinzip" als Begründungsmittel der Geometrie (vgl. dazu auch Becker (1964b), S.60f).

Um eine zumindest teilweise immanente Beurteilung des 'protophysikalischen' Programms als eines mit Einschränkung sinnvollen Vorhabens bemühen sich ferner G. Böhme, P. Mittelstaedt, A. Kamlah und P. Hucklenbroich.

Böhme (1976a) zweifelt daran, daß eine den Meßgeräten vorgeschriebene geometrische Struktur ohne weiteres auch die Struktur der zu messenden Gegenstände festlegt. Für ihn ist "das Apriori der Protophysik ... sicherlich nur in einem limitativen Sinne konstitutiv für die Gegenstände der Naturwissenschaft" (S.231). Dementsprechend gilt es auch "die 'Wahrheit' der Protophysik" etwas anders zu formulieren, nämlich (in Anlehnung an C.F. von Weizsäcker) als Grundsatz der semantischen Konsistenz. Danach "soll der Meßapparat durch eben dieselbe Theorie beschreibbar sein, die für die Gegenstände gilt, die mit diesem Meßapparat gemessen werden sollen" (S.229). Somit entfällt z.B. eine Auszeichnung der euklidischen Geometrie durch ihre (vermeintlich) erfahrungsbegründende Funktion, da es für die semantische Konsistenz der jeweiligen Theorie genügt, wenn die benutzte Geometrie lokal (d.h.: in der Umgebung der Meßgeräte) euklidisch ist, und im übrigen das auch nur, sofern die Realisierungsvorschriften für Meßgeräte ihrerseits überhaupt (lokale) Euklidizität nach sich ziehen.

Einen ähnlichen Standpunkt vertritt Mittelstaedt mit seiner Forderung der "Selbstkonsistenz" (1976, S.142, und 1965/1968, S.87). Auch Mittelstaedt denkt nicht daran, die bereits vorliegende Physik mittels 'protophysikalischer' Vorstellungen inhaltlich zu revidieren. Vielmehr kritisiert er umgekehrt die Voraussetzungen der 'Protophysik', sofern in ihnen mögliche Einschränkungen bei der materiellen Realisation der Meßgeräte (z.B. verursacht durch ein inhomogenes Führungsfeld) nicht berücksichtigt sind (1965/1968, S.90f). Das Wissen über solche Einschränkungen ist physikalischen Theorien zu entnehmen, die "über weite Bereiche des Naturgeschehens verläßliche Auskunft geben" (1976, S.137). Immerhin soll aber der 'Protophysik' wenigstens dort teilweise Rechnung getragen werden, wo sich Theorien "ihrem Gegenstandsbereich nach auf die unmittelbare menschliche Umwelt beziehen" (S.142). Ausgangspunkt ist dabei ein vorwissenschaftliches Erfahrungswissen, mit dessen Hilfe die Realisierung von Meßvorgängen zu gewährleisten ist. Im Unterschied zur 'Protophysik' rechnet Mittelstaedt hier mit Lücken und daher nur unvollständig definierten Begriffen. Im günstigsten Fall lassen sich diese Lücken in geeigneter Weise ergänzen, indem man mit den bis dahin nur unvollständig definierten Begriffen erste wissenschaftliche Erfahrungen formuliert. Eventuell notwendige Wiederholungen dieses Verfahrens führen dann zu einem stufenweisen Präzisieren von Begriffen und Theorie (vgl. S.149ff). Es läßt sich allerdings "hier keine Protophysik formulieren ..., deren Sätze sich allein aus den Bedingungen der Möglichkeit operativen Konstruierens herleiten lassen, d.h. die a-priori gelten" (1976, S.167).

Was an der bisher skizzierten Diskussion keineswegs überraschen kann, ist das Mißverhältnis zwischen Physik und 'Protophysik' (vgl. Kanitscheider, Büchel, Mittelstaedt). Wenn ein Physiker sich überhaupt für die 'Protophysik' interessiert, so geht es ihm bestenfalls darum, die schon tatsächlich existierende und weitentwickelte Physik 'protophysikalisch' zu rekonstruieren, d.h. er betreibt 'Protophysik' im Rahmen der Physik (vgl. dazu auch Mittelstaedt (1978)). Gerade das ist aber nicht die ursprüngliche Intention der 'Erlanger Schule': Sie mutet umgekehrt dem Physiker zu, seine Grundbegriffe unter dem Gesichtspunkt der pragmatischen Ordnung neu zu überdenken und dabei die Aussagen bestehender Theorien (methodisch) auszuklammern. Angesichts der tatsächlich vorhandenen Lücken in den operationalen Grundlagen der Physik ist diese Forderung durchaus begreiflich und bis zu einem gewissen Grade wohl auch berechtigt. Kaum nachvollziehbar ist dagegen der immer wieder erhobene Anspruch, daß eine 'protophysikalische' Auszeichnung der klassischen Mechanik (einschließlich der euklidischen Geometrie) im Prinzip geleistet sei. Wie A. Kamlah (1978) treffend bemerkt, hat es schon allein deshalb wenig Sinn, derartige Ansprüche mit dem Hinweis auf die heutige Physik zu widerlegen, weil dies die 'Protophysiker' in die Rolle des Opponenten drängt, in der sie sich durch (teilweise berechtigte) Gegenangriffe verteidigen können und damit gar "nicht ernsthaft auf die Probe gestellt sind" (S.311). Stattdessen schlägt Kamlah vor, die von 'Protophysikern' immer wieder verwandten Leitbegriffe und Redeweisen (wie z.B. 'apriori', 'Norm', 'zirkelhaft' oder 'gerechtfertigter Zweck') genauer zu untersuchen und zu präzisieren. Außer Beiträgen dazu findet man bei Kamlah auch das Problem einer normativen Wissenschaftstheorie behandelt, d.h. die Frage, wieweit ein Wissenschaftstheoretiker sich überhaupt mit methodologischen Vorschriften in die Arbeit des Wissenschaftlers einschalten könne. Insgesamt gelangt er so zu einer (hier nicht wiederzugebenden) differenzierten Beurteilung des 'protophysikalischen' Programms.

In eine ähnliche Richtung geht der umfassende Beitrag von P. Hucklenbroich (1978, S.354-424). Das 'protophysikalische' Programm stellt ihm zufolge "die bislang am weitesten explizierte Rekonstruktion eines klassischen ... Ansatzes (Anfangs einer empirischen Entwicklung) dar" (S.424). Einschränkungen sieht Hucklenbroich vor allem darin, daß diese Rekonstruktion zu schematisch betrieben wird und häufig nicht klar vom allgemeinen methodologischen Rahmenwerk zu unterscheiden ist.

10.2. Probleme bei der Systematisierung der Geometrie unter operativen Gesichtspunkten

10.2.1. Allgemeine Fragen

Unter Systematisierung einer inhaltlichen Theorie verstehen wir im folgenden ihre formale Axiomatisierung, d.h. die Angabe von Axiomen (nach Möglichkeit in einer Sprache 1. Stufe), aus denen sich mittels der (elementaren) Prädikatenlogik genau die in der inhaltlichen Theorie gültigen Aussagen ableiten lassen.
Für die Gestaltung geometrischer Axiomensyteme gibt es verschiedene methodische Gesichtspunkte, für deren Erörterung wir auf Bernays (1959) verweisen. Axiomatisierungen sind methodologisch stets mit Rücksicht auf ihre jeweiligen Zielsetzungen zu beurteilen, und so kann man von vorneherein kaum erwarten, daß hier ein "eindeutiges Optimum" zu erzielen sei (vgl. S.6). Bernays (1978) nennt zwar ganz allgemein die "Art der Axiomatisierung der Geometrie, mit Hilfe von Bedingungen der Homogenität, ... gewiß sehr gewinnend und ihre Verfolgung sehr lohnend", glaubt aber nicht, daß damit "schon eine bestimmte Axiomatisierung der Geometrie festgelegt" sei: "weder in bezug auf die Wahl der Grundobjekte noch auf die der Grundbeziehungen und der Axiome" (S.9 und S.11). Wie bereits in 5.5 erwähnt, erhoffte sich Dingler über die operative Interpretation der geometrischen Begriffe gleichwohl eine "epistemologisch optimale" Systematisierung. Die Direktiven einer solchen operativen Grundlegung der Geometrie wollen wir unter dem Namen '<u>Dinglersches Programm</u>' wie folgt formulieren:

(D1) Das Axiomensystem A ist widerspruchsfrei.

(D2) Jeder Satz der euklidischen Geometrie ist aus A ableitbar.

(D3) A ist in hinreichendem Umfang 'operativ interpretierbar', genauer: A zerfällt in zwei disjunkte Teilklassen E und N , für die gilt:

a) die Axiome von N sind Wiedergabe geometrischer Ideen (Ebene, Gerade, ...) in Form von Handlungsvorschriften (ideativen Normen) zur Realisierung dieser Ideen;

b) die ideativen Normen sind exhaurierbar, d.h. sie lassen sich beliebig oder doch hinreichend genau durch Bearbeitung realer Körper annähern;

c) die Axiome aus E gründen sich auf 'Evidenzen' (plausible Konventionen, evtl. Erfahrungen), und zwar ist ihre Akzeptanz von einer gewissen Stufe an unabhängig von der Güte der dabei erreichten Realisierung.

Ein Unterschied - nicht unbedingt ein Gegensatz - zur Hilbertschen Axiomatik besteht offenbar in **(D3)**, und zwar vor allem in den Teilen a) und b). (Zur Erläuterung von a), b) und c) verweisen wir beziehungsweise auf 8.3, Kapitel 9 und 7.4.) In ihnen ist ein Kriterium der operativen Interpretierbarkeit enthalten, das über die Zugehörigkeit einer Aussage (Norm, Axiom) zur Klasse N entscheidet.

Kriterium: Eine Norm gilt als operativ (interpretierbar), wenn man ihr Erfülltsein durch eine beschreibbare Folge von Operationen an und mit räumlichen Objekten wenigstens in hinlänglicher Annäherung erreichen kann.

Dieses Kriterium erscheint uns noch einigermaßen vage, und wir bedienen uns seiner nur provisorisch in Ermangelung einer präziseren Methode. Im Sinne des Dinglerschen Programms wird man danach streben müssen, die Geometrie A auf einer gegenüber E möglichst großen Klasse N aufzubauen. Ein Teil der Geometrie kann dann in dem Maße als operativ begründet gelten, in dem bei seiner deduktiven Gewinnung die Normen aus N beteiligt sind.

Im weiteren gehen wir nun folgendermaßen vor: Mit Hilfe einiger Beispiele streifen wir kurz die Anwendungsproblematik des Operativitätskriteriums und formulieren dann eine Reihe metatheoretischer Fragen zum Dinglerschen Programm. In 10.2.2 folgt dann eine etwas detailliertere Untersuchung einzelner Normen, vor allem im Hinblick auf ihre mögliche Rolle innerhalb einer operativen Grundlegung der Geometrie.

Betrachten wir zunächst das Axiom: Durch zwei Punkte geht mindestens eine Gerade. - Immerhin ist es innerhalb eines hinlänglich beschränkten Raumstückes möglich, mit einem Lineal die gesuchte Gerade durch die vorgegebenen Punkte konstruktiv zu realisieren. Zur operativen Interpretation des Axioms gehört aber weiter noch die Realisation der dabei benutzten Konstruktionsmittel (Bleistift, Lineal, Zeichenebene). Weniger offensichtlich ist der Zusammenhang zwischen der Eindeutigkeit der Geraden und der Güte, mit der an den Konstruktionsmitteln Homogenitätsforderungen verwirklicht (oder besser: zu verwirklichen) sind. Ähnliches dürfte auch für die Stetigkeitsaxiome gelten, wenngleich hier die Anwendbarkeit des Operativitätskriteriums keineswegs auf der Hand liegt. Selbst das Archimedische Axiom des Messens läßt sich nicht eindeutig einer der Klassen E oder N zuordnen und wird daher meist unter Rückgriff auf Empirie oder durch Konventionen gerechtfertigt (vgl. dazu 8.3).

Als weiteres Beispiel nehmen wir die Axiome der Kongruenz. Ihr operativer Charakter liegt keineswegs auf der Hand, vielmehr kann er sich erst aus dem Operieren mit geeignet starren Körpern ergeben und gründet damit letztlich in der reellen Exhaustion geometrischer Starrheit (vgl. 9.3). Lorenzen will dieses

Vorgehen vermeiden und hat stattdessen vorgeschlagen, Kongruenz mittels Parallelität und Orthogonalität zu definieren und für diese Begriffe geeignete Homogenitätsschemata aufzustellen (vgl. 7.4). Die Operativität der dazu formulierten Schemata ist jedoch höchst fraglich. Überhaupt ist eine Norm keineswegs schon allein deshalb operativ interpretierbar, weil sie als H-Schema geschrieben werden kann. Hinzu kommt, daß damit ein akzeptabler deduktiver Aufbau bisher nicht gelungen ist, trotz ernsthafter Versuche etwa von F. Steiner (1969) und M. Jäger (1976). Entweder hat man sich mit völlig unzureichenden Bruchstücken zu begnügen (wie Steiner) oder das Erfülltsein von (D2) mit einer Vielzahl von H-Schemata zu erzwingen (wie Jäger), die überdies zum Teil ganz offenkundig nicht operativ interpretierbar sind. Zur Zeit läßt sich keine endgültige Aussage darüber machen, wann und ob überhaupt solche Mängel überwunden werden können.

Wir skizzieren nun im Überblick die unseres Erachtens wichtigsten metatheoretischen Probleme des Dinglerschen Programms. Dabei lösen wir uns vorübergehend von der im Begriff der Ideation fixierten Vorstellung eines unveränderlichen Normensystems N, das zusammen mit einem festen Bestand E von 'Evidenzen' oder Erfahrungen den Aufbau der Geometrie ermöglicht. Stattdessen gehen wir von irgendeinem Axiomensystem T aus (z.B. der 2-dimensionalen euklidischen Geometrie) und formulieren unsere Fragen über Vereinigungen der Art $T_0 \cup N_0$, wobei T_0 und N_0 Teilklassen von T bzw. N sind.

(P1) Für welche $T_0 \subseteq T$, $N_0 \subseteq N$ ist $T_0 \cup N_0$ widerspruchsfrei (insbesondere im Fall $N_0 = N$)?

(P2) Was folgt aus $T_0 \cup N$ für $T_0 \subseteq T$?

(P3) Läßt sich ein 'möglichst kleines' $T_0 \subseteq T$ finden, so daß $T_0 \cup N$ und T äquivalent sind (d.h. dieselben Folgerungen besitzen)?

(P4) Gibt es ein endliches $N_0 \subseteq N$, so daß $T_0 \cup N_0$ und $T_0 \cup N$ äquivalent sind?

(P4) ist das Problem der endlichen Axiomatisierbarkeit des Normensystems; es verdient Interesse, wenn wenigstens eine Norm als Formelschema 1. Stufe gegeben ist. In **(P3)** spiegeln sich formal **(D2)** und das in **(D3)** gesteckte Rahmenziel wieder. **(P2)** ist für eine ganze Reihe von Teiltheorien T_0 von T interessant; z.B. für eine Lösung T_0 aus **(P3)**, für $T_0 = T$ oder für $T_0 =$ (absolute Geometrie) usw. Eine plausible Einschränkung erfahren die angedeuteten Fragen durch **(P1)**, entsprechend der Direktive **(D1)**. (Für die Bedeutung der Widerspruchsfreiheit bei operativer Grundlegung der Geometrie sei auf 7.3 verwiesen.)

Im Zusammenhang mit **(P1)** liegt es nahe, für bestimmte Teiltheorien T_0 (die etwa anderweitig gerechtfertigt sein mögen) mit T_0 logisch unverträgliche Normen(mengen) auszuschließen. Genauer wollen wir eine Menge N mit T_0 verträglich nennen, wenn mit T_0 auch $T_0 \cup N$ widerspruchsfrei ist. – Für den Fall, daß N aus den Spezialfällen eines Formelschemas besteht, benötigen wir folgenden einfachen

Hilfssatz: Sei T_0 widerspruchsfrei und deduktiv-vollständig. Dann ist jede beliebige Vereinigung mit T_0 verträglicher Systeme wieder mit T_0 verträglich.

Zum Beweis sei **V** eine Klasse mit T_0 verträglicher Systeme und, indirekt angenommen, $\bigcup$**V** nicht mit T_0 verträglich, d.h. $T_0 \cup \bigcup \mathbf{V}$ widerspruchsvoll; dann kann ein Modell **M** von T_0 niemals Modell von $\bigcup$**V** sein. Daher gibt es ein in **M** ungültiges $\mathfrak{A} \in \bigcup \mathbf{V}$; also gilt $\neg \mathfrak{A}$ in **M** mit $\mathfrak{A} \in N$ für ein $N \in \mathbf{V}$. Andererseits ist $T_0 \cup N$ widerspruchsfrei und besitzt somit ein Modell $\mathbf{M}^*$, in dem folglich $\mathfrak{A}$ gilt. Da **M** und $\mathbf{M}^*$ Modelle des deduktiv-vollständigen Systems T_0 sind, gelten in ihnen dieselben Formeln (Widerspruch!).

Der geschilderte Beweis benutzt zwei einfache Konsequenzen aus dem Gödelschen Vollständigkeitssatz: 1) Ein widerspruchsfreies System besitzt ein Modell; 2) In allen Modellen eines deduktiv-vollständigen Systems gelten dieselben Formeln. (Vgl. dazu etwa Shoenfield (1967), S.43 und S.82.) – Zusatzbemerkung: Ist T_0 vollständig, so ist $T_0 \cup N$, falls widerspruchsfrei, zu T_0 äquivalent. Daher sind mit vollständigen Theorien verträgliche Normen überflüssig, insofern sie in diesen ableitbar sind.

Die Normen beim operativen Geometrieaufbau haben die Form von Homogenitätsschemata. Es liegt somit auf der Hand, eine Formel dann als zulässig zu erklären, wenn das mit ihr spezialisierte H-Schema mit T_0 verträglich ist. Allerdings hat man diese Prüfung auf einen vorab festgelegten Bereich von Objekten u (repräsentiert durch eine Formel $\mathfrak{B}(u)$) zu relativieren. Wir nennen dementsprechend eine Formel $\mathfrak{A}(u,x)$ in T_0 zulässig bzgl. des Bereichs $\mathfrak{B}$, wenn

$$(*) \qquad \bigwedge u \; (\mathfrak{B}(u) \rightarrow \mathrm{Hmg}(\varrho \, ; \{\mathfrak{A}\}))$$

mit T_0 verträglich ist. Offenbar werden umso mehr (weniger) Formeln zulässig, je kleiner (größer) der Bereich $\mathfrak{B}$ gewählt wird. – Natürlich möchte man erreichen, daß das ganze (auf $\mathfrak{B}$ relativierte) Schema Hmg $(\varrho \, ; \Omega)$ mit T_0 verträglich ist, wenn nur Ω lauter in T_0 bzgl. $\mathfrak{B}$ zulässige Formeln enthält. Das ist auf jeden Fall dann möglich, wenn die Formeln aus Ω auch in einer widerspruchsfreien und deduktiv-vollständigen Obertheorie $\mathfrak{T}$ von $\mathfrak{T}_0$ zulässig sind. Dazu braucht man bloß den gerade bewiesenen Hilfssatz auf die Vereinigung aller (*), $\mathfrak{A} \in \Omega$, anzuwenden. Daraus ergibt sich insbesondere eine Rechtfertigung für geometrische H-Schemata (bzgl. $\mathfrak{F}$), sofern die Formeln aus Ω in der (deduktiv-vollständigen und widerspruchsfreien) 3-dimensionalen euklidischen Geometrie (bzgl. $\mathfrak{F}$) zulässig sind. Dabei kommt es darauf an, den Bereich $\mathfrak{F}$ in geeigneter Weise zu wählen.

Bei unseren früheren Überlegungen zur Widerspruchsfreiheit (in 7.3) hatten wir gesehen, daß bereits sehr einfache Formeln, z.B. $\varrho(u,x) \wedge x = c$, Widersprüche im H-Schema erzeugen können. Relativieren wir diese Betrachtungen auf einen Bereich $\mathfrak{F}$, so bedeutet es, daß die genannte Formel schon in dem Minimalsystem

$$\mathfrak{T}_0 = \left\{ \bigwedge x \bigvee u \bigvee x' \left(\mathfrak{F}(u) \wedge \varrho(u,x) \wedge \varrho(u,x') \wedge x' \neq x \right) \right\}$$

bzgl. $\mathfrak{F}$ unzulässig ist. Dies führte zu einer vorläufigen Beschränkung auf parameterfreie Formeln $\mathfrak{A}(u,x)$, die außer u und x keinen weiteren Parameter (freie Variable, Individuenkonstante) enthalten. Parameterfreiheit und Zulässigkeit sind allerdings nicht dasselbe. Z.B. ist $\varrho(u,x) \wedge \varrho(u,y)$ in allen (einschlägigen) Theorien zulässig (bei beliebigem $\mathfrak{F}$). Es gibt demnach nicht-parameterfreie Formeln, die gleichwohl zulässig sind. Umgekehrt hängt die Zulässigkeit parameterfreier Formeln wesentlich von dem jeweils zugrunde liegenden Bereich $\mathfrak{F}$ ab. Nehmen wir zum Beispiel in der Geometrie (mit ϱ als Inzidenz) einen (zu großen) Bereich $\mathfrak{F}$ von Flächen an, der etwa Ellipsoide enthält, so gibt es offenbar parameterfreie Formeln, die bzgl. $\mathfrak{F}$ dennoch nicht zulässig sind, etwa: Im Punkt x hat die Fläche u maximale Krümmung. - Der Bereich muß demnach sinnvollerweise so gewählt werden, daß er genau die Flächen umfaßt, die wir intuitiv als homogene Gebilde erkennen. Wir formulieren dies in folgender

Metahypothese: Ist $\mathfrak{T}$ die dreidimensionale euklidische Geometrie, $\mathfrak{F}$ der Bereich der Flächen vom Typ Ebene, Kreiszylinder, Kugel und ϱ die gewöhnliche Inzidenzrelation, so ist jede parameterfreie (einschlägige) Formel in $\mathfrak{T}$ bzgl. $\mathfrak{F}$ zulässig.

Eine hiermit zusammenhängende Vermutung wurde bereits an früherer Stelle ausgesprochen (Arbeitshypothese in 7.6). Will man den Aufbau der Geometrie mit Hilfe von H-Schemata bewerkstelligen, so ist die Metahypothese deshalb wichtig, weil sie einen Zusammenhang herstellt zwischen der effektiv entscheidbaren Parameterfreiheit und der nur abstrakt beschriebenen Zulässigkeit einer Formel. Um nachzuweisen, daß eine Formel zulässig ist, muß die (relative) Widerspruchsfreiheit einer Formelmenge gezeigt werden. Dies geschieht gewöhnlich durch Konstruktion eines geeigneten Modells. Auf diese Weise könnte man sich im Prinzip auch einen Beweis der Metahypothese durchgeführt denken. Die entscheidende (bereits in Anm. b) von 7.6 erwähnte) Schwierigkeit liegt aber darin, daß dabei alle parameterfreien Formeln zu berücksichtigen sind, üblicherweise mit Hilfe eines den Aufbau dieser Formeln nachvollziehenden Induktionsverfahrens. Ein solches Verfahren mag wohl möglich sein, naheliegend ist es allerdings nicht. Dabei spielt es keine Rolle, ob wir in Ω parameterfreie oder zulässige Formeln aufnehmen. In beiden Fällen können während des Formelaufbaus nicht-parameterfreie bzw. unzulässige Teilformeln auftreten, wodurch die jeweilige Induktionsvoraussetzung unanwendbar wird. Die Metahypothese ist also für **(P1)** kaum von Nutzen. Anders bei **(P2)**. Denn wenn wir nach Konsequenzen von H-Schemata suchen, so ist es möglicherweise bequemer, von der größeren Klasse der zulässigen Formeln auszugehen.

10.2.2. Folgerungen aus H-Schemata

Im folgenden bieten wir einige Fragmente zu **(P2)**. Dabei beschränken wir uns auf H-Schemata mit parameterfreien Formeln und legen die Metahypothese zugrunde. Der Reihe nach behandeln wir: Voraussetzungen für die Ebenen-Eindeutigkeit, Verallgemeinerungsschemata, Parallelität, äußere Homogenität, Schnitte von homogenen Flächen, innere Homogenität.

Ebenen-Eindeutigkeit

Unter einem Eindeutigkeitssatz für die Ebene verstehen wir eine (in T_0) beweisbare Aussage der Form

(0) $\bigwedge \varepsilon,\eta\,(\mathfrak{L}(\varepsilon,\eta) \rightarrow \varepsilon=\eta)$

Die parameterfreie Formel $\mathfrak{L}(\varepsilon,\eta)$ drückt dabei gewöhnlich aus, daß die Ebenen ε und η drei nicht-kollineare Punkte gemeinsam haben. Wir setzen $\mathfrak{L}^*(\varepsilon,P) :=\bigvee\eta\,(P|\eta \wedge \mathfrak{L}(\varepsilon,\eta))$ und erhalten einen einfachen Beweis von (0) in T_0 , falls dort folgende Voraussetzungen erfüllt (d.h. ableitbar) sind:

(1) $\bigwedge\varepsilon\bigwedge P\,(P\not|\,\varepsilon \rightarrow \neg\,\mathfrak{L}^*(\varepsilon,P))$,

(2) $\bigwedge\varepsilon,\eta\,(\mathfrak{L}(\varepsilon,\eta) \rightarrow \mathfrak{L}(\eta,\varepsilon))$.

Offenbar genügt es, $\varepsilon\subseteq\eta$ zu zeigen. Sei also $\mathfrak{L}(\varepsilon,\eta)$ und P ein beliebiger Punkt mit $P|\varepsilon$. Nach (2) gilt $\mathfrak{L}(\eta,\varepsilon)$ und daher $\mathfrak{L}^*(\eta,P)$. Also folgt nach (1) sofort $P|\eta$. -

In (1) dürfen wir offenbar '$\rightarrow$' durch '$\leftrightarrow$' ersetzen, wenn wir zusätzlich noch

(3) $\bigwedge_\varepsilon \mathfrak{L}(\varepsilon, \varepsilon)$

annehmen. A. Kamlah (1976, S.177) hat darauf aufmerksam gemacht, daß sich (1) unter Verwendung der äußeren Homogenität Hmg(χ) abschwächen läßt zu

(1') $\bigwedge_\varepsilon \bigvee_P \neg \mathfrak{L}^*(\varepsilon, P)$.

Damit ergibt sich (1) wie folgt: Ist ε beliebig und P_0 ein Punkt nach (1') mit $\neg \mathfrak{L}^*(\varepsilon, P_0)$. Dann ist $P_0 \chi \varepsilon$. Also gilt für beliebiges $P \chi \varepsilon$ aufgrund von Hmg(χ) : $\neg \mathfrak{L}^*(\varepsilon, P)$. -

Man kann (1') durch ein noch schwächeres Axiom ersetzen:

(1") $\bigvee_\varepsilon \bigvee_P \neg \mathfrak{L}^*(\varepsilon, P)$,

benötigt dazu aber weitere Voraussetzungen:

(4) $\bigwedge_{\varepsilon, \varepsilon'} \bigvee_Q (Q \chi \varepsilon \wedge Q \chi \varepsilon')$,
(5) $P \chi \varepsilon \wedge P \chi \varepsilon' \wedge \mathfrak{A}(\varepsilon, P) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon', P)$.

Vom operativen Standpunkt aus muß besonders (5) suspekt erscheinen, denn die darin ausgedrückte 'Raumhomogenität' verlangt entsprechend eine (praktisch unmögliche) Manipulation der Beziehung sämtlicher Ebenen im Raum zu einem jeweils fest vorgegebenen äußeren Punkt.

Beweis von (1): Seien ε_0, P_0 nach (1") mit $\neg \mathfrak{L}^*(\varepsilon_0, P_0)$. Dann folgt wieder $P_0 \chi \varepsilon_0$ und, wie eben, aufgrund von Hmg(χ): $\bigwedge_P (P \chi \varepsilon_0 \rightarrow \neg \mathfrak{L}^*(\varepsilon_0, P))$. Wir geben ε beliebig vor und wählen nach (4) einen Punkt Q_0 mit $Q_0 \chi \varepsilon$ und $Q_0 \chi \varepsilon_0$. Also gilt insbesondere $\neg \mathfrak{L}^*(\varepsilon_0, Q_0)$, und (5) liefert $\neg \mathfrak{L}^*(\varepsilon, Q_0)$. Wegen $Q_0 \chi \varepsilon$ ergibt Anwendung der äußeren Homogenität von ε sofort $P \chi \varepsilon \rightarrow \neg \mathfrak{L}^*(\varepsilon, P)$ für alle P. -

Die Voraussetzungen (1), (1') und (1") sind aufgrund ihres ad-hoc-Charakters kaum als ein befriedigendes Fundament für einen Beweis der Ebenen-Eindeutigkeit anzusehen. Wenig überzeugend erscheint ferner auch der Rückgriff auf Prinzipien wie (5), mit deren Verwendung der operative Rahmen drastisch überschritten wird.

Verallgemeinerungsschemata

Trotzdem wollen wir die verallgemeinernde Wirkung von (5) sowie des analogen Schemas für inzidente Ebenen

(6) $\quad P|\varepsilon \wedge P|\varepsilon' \wedge \mathfrak{A}(\varepsilon,P) \longrightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon',P)$

kurz darlegen. Sei $\mathfrak{F}(\varepsilon,P)$ irgendeine Formel. Nach den Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts kann man auf der Basis von Hmg($\not|$), (4) und (5) von $\bigvee\varepsilon \bigvee P\ (P\not|\varepsilon \wedge \mathfrak{F}(\varepsilon,P))$ auf $\bigwedge\varepsilon \bigwedge P\ (P\not|\varepsilon \longrightarrow \mathfrak{F}(\varepsilon,P))$ schließen. Ein entsprechender Übergang von $\bigvee\varepsilon \bigvee P\ (P|\varepsilon \wedge \mathfrak{F}(\varepsilon,P))$ zu $\bigwedge\varepsilon \bigwedge P\ (P|\varepsilon \rightarrow \mathfrak{F}(\varepsilon,P))$ ist möglich mit Hilfe von Hmg($|$), (6) sowie

(7) $\quad \bigwedge\varepsilon \bigvee\eta \quad \varepsilon \# \eta,$

(8) $\quad \varepsilon \| \varepsilon' \wedge \eta \# \varepsilon \longrightarrow \eta \# \varepsilon',$

wobei wir hier $\varepsilon\|\varepsilon'$ als Abkürzung für $\varepsilon = \varepsilon' \vee \neg\bigvee Q\ (Q|\varepsilon \wedge Q|\varepsilon')$ verwenden. Der Beweis bleibt dem Leser überlassen. - Anmerkung: Prinzip (2) und (6) benutzt auch Jäger, vgl. dort H7 bzw. H12.

Bei Kamlah (1976, S.187-190) wird ferner das sehr allgemeine Schema

(9) $\quad P|g \wedge g \subset \varepsilon \wedge P'|g' \wedge g' \subset \varepsilon' \wedge \mathfrak{L}(\varepsilon,g,P) \longrightarrow \mathfrak{L}(\varepsilon',g',P')$

abgeleitet, aus dem sich (6) folgendermaßen ergibt: Wir setzen $\mathfrak{L}(\varepsilon,g,P) := P|g \wedge g \subset \varepsilon \wedge \mathfrak{A}(\varepsilon,P)$ und erhalten mit (9)

$$P|g \wedge g \subset \varepsilon \wedge \mathfrak{A}(\varepsilon,P) \longrightarrow (P'|g' \wedge g' \subset \varepsilon \longrightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon',P')),$$

$$(P|g \wedge g \subset \varepsilon \wedge P'|g' \wedge g' \subset \varepsilon) \longrightarrow (\mathfrak{A}(\varepsilon,P) \longrightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon',P')),$$

$$\bigvee g,g'\ (P|g \wedge g \subset \varepsilon \wedge P|g' \wedge g' \subset \varepsilon) \longrightarrow (\mathfrak{A}(\varepsilon,P) \longrightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon',P)).$$

Das Vorderglied dieser Implikation läßt sich durch zweifache Anwendung von

(10) $\quad P|\varepsilon \longrightarrow \bigvee g\ (P|g \wedge g \subset \varepsilon)$

beseitigen, so daß

$$P|\varepsilon \wedge P|\varepsilon' \longrightarrow (\mathfrak{A}(\varepsilon,P) \longrightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon',P))$$

und damit (6) entsteht. - Der Beweis von (9) stützt sich auf ein H-Schema für 'senkrecht' und - unter anderem - auf die eindeutige Bestimmtheit einer Ebene durch ein in ihr liegendes orthogonales Geradenkreuz sowie die umkehrbar eindeutige Zuordbarkeit von Orthogonalen auf einer Ebene und ihren Fußpunkten.

Parallelität

Die Behandlung dieses Begriffs im Rahmen der 'Protophysik' ist ziemlich verworren. Einerseits will man das Parallelsein von Ebenen so definieren, daß das Parallelenaxiom ein beweisbarer Satz wird. Andererseits glaubt man auf die Kongruenz als Grundbegriff verzichten zu müssen und begibt sich damit der vom operativen Standpunkt aus naheliegenden Möglichkeit, Parallelität unter Verwendung eines starren Körpers als Gleichabständigkeit einzuführen. So ist es zu erklären, daß Lorenzen (1961/1968, S.136) ursprünglich ein Schema vorgeschlagen hat, das mit einer Herstellvorschrift etwa für planparallele Platten gar nichts zu tun hat:

(11) $P|g \wedge g \subset \varepsilon \wedge P'|g' \wedge g' \subset \varepsilon' \wedge \varepsilon \| \eta \wedge \mathfrak{A}(\varepsilon, \eta, P, g) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon, \eta, P', g')$

Dem H-Schema (11) fällt bei Lorenzen die Aufgabe zu, einen Beweis des Doppelorthogonalensatzes ($g \perp \varepsilon \wedge \varepsilon \| \eta \rightarrow g \perp \eta$) zu ermöglichen. Hieraus ergibt sich dann die Existenz von Rechtecken und damit das Parallelenaxiom; allerdings ist dabei (nach einem Resultat von M. Dehn (1900)) die Verwendung des Archimedischen Axioms unvermeidbar. Der von Lorenzen (S.138) angedeutete (und von Torretti (1978) weiter präzisierte) Beweis des Doppelorthogonalensatzes aus (11) stützt sich stillschweigend wesentlich auf die Eindeutigkeit der Orthogonalen zu einer Ebene durch einen Punkt und schließt daher - ohne Mitwirkung von Homogenität - die hyperbolische Geometrie von vornherein aus. Auch der Versuch, diese Eindeutigkeit ihrerseits aus einem H-Schema für 'orthogonal' abzuleiten, dürfte keinesfalls ohne weiteres gelingen.

Die 'Protophysiker' haben sich in ihren Veröffentlichungen zu dieser Sachlage nicht direkt geäußert. Wohl wird die inzidenztheoretische Definition für $\|$ in Kamlah/Lorenzen (1967, S.228) zurückgewiesen, hingegen in Lorenzen/Schwemmer (1973, S.167) neben der Definition über Doppelorthogonalität wieder in Betracht gezogen. Außerhalb der 'Erlanger Schule' hat Jäger (1976) ein positives Resultat mit Hilfe der Schemata

(12) $g, h \subset \varepsilon \wedge \varepsilon \| \eta \wedge \mathfrak{A}(g, \varepsilon, \eta) \rightarrow \mathfrak{A}(h, \varepsilon, \eta),$

(13) $\neg g \subset \varepsilon \wedge \neg g \subset \eta \wedge \varepsilon \| \eta \wedge \mathfrak{A}(g, \varepsilon) \rightarrow \mathfrak{A}(g, \eta)$

erzielt (vgl. dort H20 und H21). Danach sind die euklidische Definition für 'parallel' und das Parallelenaxiom in der um (12), (13) und das Axiom $\bigwedge_\varepsilon \bigwedge_P \bigvee_\eta (P|\eta \wedge \eta \| \varepsilon)$ erweiterten Inzidenzgeometrie ableitbar. (Schema (12) ist eine einfache Folge von (11).) Offenbar lassen sich aber auch (12) und (13) nicht in plausibler Weise operativ interpretieren.

Äußere Homogenität

Mit dieser Forderung soll die Ebene unter den innerlich homogenen Formen ausgezeichnet werden. Da sie sich auf alle Raumpunkte außerhalb der Fläche bezieht, erscheint ihre operative Interpretierbarkeit von vornherein nicht so ohne weiteres denkbar. Dennoch wird diese durch die Verwendung dreier Platten beim Ebenenschleifen (zumindest indirekt) erreicht.

In einer Überlegung, die wir hier nicht genauer logisch analysieren wollen, hat A. Kamlah (1976, S.174) gezeigt, daß Hmg($\mathcal{X}$) im Rahmen der absoluten Geometrie die Existenz zueinander ähnlicher Figuren und damit das Parallelenaxiom nach sich zieht. Allerdings erscheint Kamlah das Prinzip "für die Anwendung der Geometrie ungeeignet" (S.175, vgl. auch S.208), eine Ansicht, die sich auf die vom Verfasser behandelte "physikalische Interpretation" der ideativen Normen gründet.

Unter bestimmten Voraussetzungen impliziert die äußere Homogenität die innere. Dazu benötigen wir ein System T_0 und eine (feste einschlägige) Formel $\mathfrak{F}_0(\varepsilon,P,P')$ derart, daß in T_0 die Aussagen

(i) $\bigwedge \varepsilon \bigwedge P \bigvee P' (P | \varepsilon \rightarrow P' \nmid \varepsilon \wedge \mathfrak{F}_0(\varepsilon, P, P'))$,
(ii) $\bigwedge \varepsilon \bigwedge P, P', Q \,(P, Q | \varepsilon \wedge \mathfrak{F}_0(\varepsilon, P, P') \wedge \mathfrak{F}_0(\varepsilon, Q, P') \rightarrow P = Q)$

ableitbar sind. (Aufgrund von (i), (ii) beschreibt $\mathfrak{F}_0$ eine injektive, evtl. mehrdeutige Zuordnung von inneren zu äußeren Punkten einer Ebene.) Dann ist für jede (parameterfreie) Formel $\mathfrak{A}(\varepsilon,P)$ in $T_0 \cup$ Hmg($\mathcal{X}$) beweisbar:

$$\bigwedge \varepsilon \bigwedge P, P' \,(P, P' | \varepsilon \wedge \mathfrak{A}(\varepsilon, P) \rightarrow \mathfrak{A}(\varepsilon, P')).$$

Der Beweis verwendet das Skolemsche Verfahren der Auswahlerweiterung einer Theorie und die dazugehörige Konservativitätsaussage (vgl. etwa Shoenfield (1967), S.55f). Wir erweitern die zugrunde liegende Sprache um ein (neues) 2-stelliges Funktionszeichen f und T_0 zu T_0^* durch Hinzunahme des aus (i) entstandenen Axioms

$$(*) \quad \bigwedge \varepsilon \bigwedge P (P | \varepsilon \rightarrow f(\varepsilon, P) \nmid \varepsilon \wedge \mathfrak{F}_0(\varepsilon, P, f(\varepsilon, P))).$$

Als nächstes assoziieren wir zu jeder Formel $\mathfrak{A}(\varepsilon,R)$ der alten Sprache eine Formel

$$\hat{\mathfrak{A}}(\varepsilon, R) := \bigvee P (P | \varepsilon \wedge \mathfrak{A}(\varepsilon, P) \wedge \mathfrak{F}_0(\varepsilon, P, R)).$$

Hierüber beweisen wir nun in T_0^*

$$(**) \quad \bigwedge \varepsilon \bigwedge P [P | \varepsilon \rightarrow (\mathfrak{A}(\varepsilon, P) \leftrightarrow \hat{\mathfrak{A}}(\varepsilon, f(\varepsilon, P)))].$$

Sei $P|\varepsilon$ und gelte zunächst $\mathfrak{A}(\varepsilon,P)$. Wegen (*) gilt dann auch $\mathfrak{F}_0(\varepsilon,P,f(\varepsilon,P))$. Partikularisierung bzgl. P vor der Konjunktion dieser drei Formeln liefert $\hat{\mathfrak{A}}(\varepsilon,f(\varepsilon,P))$. – Umgekehrt folgt aus $\hat{\mathfrak{A}}(\varepsilon,f(\varepsilon,P))$: $Q|\varepsilon$, $\mathfrak{A}(\varepsilon,Q)$ und $\mathfrak{F}_0(\varepsilon,Q,f(\varepsilon,P))$ für ein Q. Wegen $P|\varepsilon$ impliziert (*) auch $\mathfrak{F}_0(\varepsilon,P,f(\varepsilon,P))$, was insgesamt mit (ii) $Q = P$ und somit $\mathfrak{A}(\varepsilon,P)$ ergibt.

Wir zeigen nun die Gültigkeit von $\mathrm{Hmg}(|)$. Seien dazu ε und $P,P'|\varepsilon$ sowie eine Formel $\mathfrak{A}(\varepsilon,P)$ beliebig vorgegeben. Aus (*) und (**) folgt $f(\varepsilon,P)\not\perp\varepsilon$, $f(\varepsilon,P')\not\perp\varepsilon$ bzw. $\hat{\mathfrak{A}}(\varepsilon,f(\varepsilon,P))$. Wir verwenden das äußere H-Schema nun für $\hat{\mathfrak{A}}$, also eine Formel der alten Sprache:

$$Q,Q'\not\perp\varepsilon \wedge \hat{\mathfrak{A}}(\varepsilon,Q) \rightarrow \hat{\mathfrak{A}}(\varepsilon,Q').$$

Hieraus ergibt sich durch Substitution von $f(\varepsilon,P)$ für Q und $f(\varepsilon,P')$ für Q' (bei gebundener Umbenennung evtl. störender Variablen in $\hat{\mathfrak{A}}$)

$$f(\varepsilon,P),\ f(\varepsilon,P')\not\perp\varepsilon \wedge \hat{\mathfrak{A}}(\varepsilon,f(\varepsilon,P)) \rightarrow \hat{\mathfrak{A}}(\varepsilon,f(\varepsilon,P')).$$

Abtrennung des Vordergliedes sowie Anwendung von (**) auf $\hat{\mathfrak{A}}(\varepsilon,f(\varepsilon,P'))$ und $P'|\varepsilon$ liefert schließlich $\mathfrak{A}(\varepsilon,P')$. – Formalisiert man diesen Beweis, so erhält man eine Ableitung von $\mathrm{Hmg}(|)$ aus $T_0^* \cup \mathrm{Hmg}(\not\perp)$. Da T_0^* eine konservative Erweiterung von T_0 ist, ist auch $T_0^* \cup \mathrm{Hmg}(\not\perp)$ eine konservative Erweiterung von $T_0 \cup \mathrm{Hmg}(\not\perp)$, d.h. alle Formeln der alten Sprache, die aus $T_0^* \cup \mathrm{Hmg}(\not\perp)$ ableitbar sind, können auch aus $T_0 \cup \mathrm{Hmg}(\not\perp)$ bewiesen werden. Insbesondere gilt dies für das innere H-Schema. –

Unsere Überlegungen haben natürlich nur dann Sinn, wenn sich T_0 konkretisieren und eine (i) und (ii) erfüllende Formel $\mathfrak{F}_0$ angeben läßt. Eine solche Formel ist

$$\mathfrak{F}_0(\varepsilon,P,P') :\Leftrightarrow \bigvee g(g\perp\varepsilon \wedge P\neq P' \wedge P,P'|g).$$

Zur Verifikation von (i), (ii) müssen in T_0 folgende Tatsachen zur Verfügung stehen: Eine Senkrechte auf einer Ebene schneidet diese in höchstens einem Punkt, enthält darüberhinaus aber noch mindestens einen weiteren; und: Durch einen Punkt gibt es zu einer Ebene genau eine Senkrechte. – Es bleibe dem Leser überlassen, diese Aussagen zu formalisieren und aus ihnen (i) und (ii) für obiges $\mathfrak{F}_0$ abzuleiten.

Schnitte

Schnitte von homogenen Flächen miteinander sind i.a. nicht homogene Kurven. Zwar entstehen Geraden bzw. Kreise durch Schnitte von Ebenen bzw. Kugeln mit Ebenen bzw. Kugeln. Aber bei Schnitten mit Zylindern entstehen i.a. inhomogene Figuren, und zwar schon bei ebenen Schnitten, nämlich nicht-kreisförmige Ellipsen.

Während bei einem Schnitt einer Ebene ε mit einer Ebene oder einer Kugel η der Winkel von ε zu der Normalen von η für alle Schnittpunkte gleich ist, variiert er bei einem (nicht senkrechten) Schnitt durch einen Kreiszylinder zwischen einem Maximum $\neq 0°$ und $0°$, und die Schnittlinie erhält an verschiedenen Stellen verschiedene Krümmungen.

Dies liegt letzten Endes daran, daß die räumlichen Bewegungsgruppen von Ebene und Kugel so groß sind, daß für zwei beliebige solcher Flächen η_1 und η_2 der Durchschnitt **B** ihrer beiden Bewegungsgruppen $\mathbf{B}_1$ und $\mathbf{B}_2$ eine nichttriviale, kontinuierliche Gruppe ist, unter der $\eta_1 \cup \eta_2$ symmetrisch ist. Da die Symmetriegruppe einer Figur η zugleich auch die Symmetriegruppe ihres Komplements $\bar{\eta}$ im Raum ist, ist $\mathbf{B}_i$ auch die Symmetriegruppe von $\bar{\eta}_i$, $i=1,2$, $\bar{\eta}_1 \cup \bar{\eta}_2$ symmetrisch unter **B**, und auch $\overline{\bar{\eta}_1 \cup \bar{\eta}_2} = \eta_1 \cap \eta_2$ symmetrisch unter **B**. Ist dagegen die eine Fläche ein Zylinder, so muß, damit **B** nichttrivial wird, die andere schon eine besondere Lage haben (Zylinderachse durch den Kugelmittelpunkt, in der Ebene oder senkrecht zur Ebene; und die zweite Fläche kann schon gar kein Zylinder sein, wenn die Schnittmenge nicht leer und von den Ausgangsflächen verschieden sein soll).

Das (schräge) ebene Schneiden eines Zylinders ist keine 'homogene' Operation, da der Winkel der Ebene und damit der Schnittkurvennormalen gegenüber der Zylindernormalen schwankt. Läßt man dagegen den Zylinder schräg über eine gerade Kante abrollen, so entsteht die 'bekanntlich' homogene Schraubenlinie (im orthogonalen Fall der Kreis), deren Normale überall mit der der Zylinderfläche übereinstimmt.

Innere Homogenität

Daß Ebene, Kugel und Kreiszylinder homogen sind, können wir zwar in der Sprache der elementaren Geometrie nicht beweisen. Es läßt sich aber zeigen, daß alle anderen Flächen jedenfalls nicht homogen sind.

Diese Behauptung gilt natürlich nicht in einer beliebigen Klasse von Flächen: Z.B. sind eine Ebene, bei der ein Punkt fehlt, eine Ebene, bei der eine Gerade fehlt, ein Kreiszylinder, bei dem ein Kreis fehlt, oder eine offene Halbebene 'homogen' (in dem Sinn, daß wir keine Inhomogenitäten nachweisen können). Dagegen sind eine abgeschlossene Halbebene, eine Ebene, bei der zwei Punkte fehlen, eine Kugel, bei der ein Punkt fehlt, ein Zylinder, bei dem eine gerade Mantellinie oder eine Schraubenlinie fehlt, oder eine offene Kreisscheibe nicht homogen, da man auf diesen Flächen mit dem Randbegriff und dem euklidischen

Abstandsbegriff Punkte voneinander unterscheiden kann: innere und Randpunkte, und unter den inneren: solche mit maximalem Abstand (minimaler Abstandssumme o.ä.) zum Rand.

Möglicherweise ist eine Systematisierung dieser Fälle gar nicht so schwierig. Uns geht es aber mehr um realisierbare Flächen, also solche, die die Oberfläche von Körpern sein können; und diese können keinen Rand haben. Wir machen weiterhin die Einschränkung, daß die Fläche zusammenhängend sein soll, und schließen damit z.B. den Fall aus, daß sie aus zwei parallelen Ebenen (als Rand einer unendlichen Scheibe) besteht.

Wir beschreiben Oberflächen mathematisch als zweidimensionale Mannigfaltigkeiten (ohne Rand), die in den dreidimensionalen euklidischen Raum eingebettet sind und die (in der induzierten Metrik) vollständig sind, d.h. bei denen jede Cauchy-Folge in der Fläche auch einen Grenzwert in der Fläche hat.

Der Begriff der Mannigfaltigkeit wird nicht benötigt, wenn das Objekt der Betrachtung Rand einer beschränkten offenen Menge ist: in diesem Fall genügt bereits die Abgeschlossenheit im topologischen Sinn, um aus der Homogenität die Kugeleigenschaft folgern zu können. Auch wenn man weiß, daß das Objekt eine konvexe Fläche ist, d.h. Rand einer nichtleeren, echten konvexen Teilmenge des euklidischen Raumes, so folgt aus seiner Homogenität (zunächst Randlosigkeit und dann), daß es, falls es zusammenhängend ist, nur Ebene, Kugel oder Kreiszylinder sein kann. Auch hier wird der Begriff der Mannigfaltigkeit nicht benötigt; allerdings sind solche Flächen automatisch Mannigfaltigkeiten.

Gehört das betrachtete Objekt zu keinem der beiden Flächentypen, dann fordern wir, daß es eine orientierte Mannigfaltigkeit ist und darüber hinaus wenigstens einen Punkt hat, für den eine offene Umgebung existiert, in dem es eine Mannigfaltigkeit vom Typ C^2 ist (einen solchen Punkt nennen wir regulär). Diese Bedingung stellt in unserem Kontext keine wesentliche Einschränkung dar, da realisierbare Oberflächen automatisch orientierbar sind und es bei ihnen i.a. zwar auch nichtreguläre Punkte (z.B. Spitzen, Kantenpunkte usw.) gibt, aber eben auch reguläre (für kompakte konvexe Flächen, sog. Eiflächen, ist z.B. wohlbekannt, daß ihre nichtregulären Punkte eine Menge vom Maß 0 bilden).

Es gilt dann der folgende **Satz:** Unter allen nichtleeren, zusammenhängenden Mengen im euklidischen Raum, die

(a) eine zweidimensionale vollständige Mannigfaltigkeit und

  (aa) beschränkt

  (ab) oder zusammenhängend und

    (aba) eine konvexe Fläche sind (hierbei könnte die Mannigfaltigkeitsforderung entfallen, weil sie automatisch erfüllt ist)

(abb) oder orientierbar sind und einen regulären Punkt haben
(b) oder der Rand einer nichtleeren beschränkten offenen Menge sind,
sind höchstens Ebene, Kugel und Kreiszylinder homogen.

Als ein entscheidendes, besonders starkes Beweismittel wirkt sich an vielen Stellen naturgemäß die Homogenitätsforderung aus: Sobald nämlich eine Eigenschaft einem Punkt einer homogenen Fläche zukommt, kommt sie jedem zu. Insbesondere ergibt sich im Fall (a) sofort, daß eine homogene Fläche keinen Rand hat, da etwaige Randpunkte wegen der vorausgesetzten Vollständigkeit in der Fläche liegen müßten, diese aber nicht nur aus Randpunkten besteht.

Möge also zunächst eine Menge F die Voraussetzungen des Satzes mit (aa) oder (b) erfüllen: Für jeden Punkt x des Raumes gibt es unter den Kugeln, deren Mittelpunkt x ist und deren Vollkugel F enthält (Umkugel für F um x), wegen der Abgeschlossenheit von F genau eine mit minimalem Radius, auf der dann auch mindestens ein Punkt von F liegt. Die Abbildung r_F, die jedem Punkt x diesen minimalen Radius $r_F(x)$ zuordnet, ist stetig, ihre Werte gehen für $|x|$ gegen unendlich auch gegen unendlich, und sie nimmt, da sie durch 0 nach unten beschränkt ist, ihr Minimum an. Es kann keine zwei Umkugeln für F mit diesem minimalen Radius geben, da sonst F sogar im Schnitt der beiden zugehörigen Vollkugeln liegen würde und eine noch kleinere Umkugel hätte. Für F gibt es also eine eindeutig definierte minimale Umkugel, und mindestens ein Punkt von F liegt auf dieser. Ist F homogen, dann liegt jeder Punkt von F auf der Umkugel. Im Fall (aa) heißt das, daß F, da randlos und nichtleer, mit der Umkugel übereinstimmt. Im Fall (b) folgt, daß jeder Punkt aus dem Innern I der Vollkugel der Umkugel zugleich in der offenen Menge O, deren Rand F ist, liegen muß; andernfalls enthielte I nämlich doch Randpunkte von O; F wäre also nicht komplett in der Umkugel enthalten. Es ist also $I = O$, und damit ist F auch in diesem Fall identisch mit seiner eigenen Umkugel.

Sei nun F eine Fläche vom Typ (aba). Der Fall, daß F beschränkt ist, ist bereits mit Fall (b) erledigt. Im unbeschränkten Fall kommen Zylinder und weiter unten zu beschreibende 'sonstige' Flächen in Frage.

Ein Zylinder kann als das Produkt $C \times G$ einer ebenen Kurve C mit einer Geraden G aufgefaßt werden. Nach der Voraussetzung ist C konvex, d.h. Rand einer konvexen ebenen Fläche, also eine Eilinie, eine Gerade, ein Geradenpaar oder eine sonstige unbeschränkte konvexe Kurve. Aus der Homogenität von F folgt direkt die von C, und im Fall der Eilinie ergibt sich mit entsprechenden Überlegungen wie bei (b), daß diese ein Kreis sein muß. Im homogenen Fall haben wir also folgende Zylindertypen: Kreiszylinder, Ebene, Ebenenpaar (oben bereits ausgeschlossen) und eventuell Zylinder mit unbeschränktem, krummem, konvexem C als Querschnitt.

Um diesen letzten Typ behandeln zu können, betrachten wir das sphärische Bild $n(C) \subseteq S^1$ einer ebenen, konvexen Kurve C, d.i. die Menge sämtlicher nach außen gerichteter Einheitsnormalen von C, die als Vektoren im $\mathbf{R}^2$ aufgefaßt werden. Der Begriff des sphärischen Bildes läßt sich verallgemeinern auf nicht-konvexe Kurven, sowie auf Raumkurven und -flächen, deren sphärische Bilder dann auf der Kugel S^2 liegen - wenn nur jeweils eine eindeutige Vorschrift existiert, welche Normalen zu nehmen sind (z.B. bei orientierbaren Mannigfaltigkeiten). Hat jeder Punkt x von C (bzw. F) genau eine Normale $n(x)$ (z.B. im regulären Fall), dann kann das sphärische Bild als Normalenabbildung $n:C \to S^1$ (und analog für F und S^2) aufgefaßt werden; und n ist stetig.

Ist nun C eine unbeschränkte, krumme, konvexe (ebene) Kurve, so ist ihr sphärisches Bild eine (sphärisch) konvexe Teilmenge eines Halbkreises von S^1 mit mehr als einem Punkt, die also ihren eindeutig bestimmten Mittelpunkt enthält. Also hat C einen ausgezeichneten Punkt, nämlich den Fußpunkt dieser 'mittleren' Normalen; und C, und damit auch F, ist nicht homogen.

Für eine unbeschränkte, konvexe 'sonstige' Fläche F ist nach Stoker (1940) das sphärische Bild eine (sphärisch) konvexe Teilmenge einer Halbkugel von S^2, die eine in S^2 offene Teilmenge hat. Diese Menge enthält den eindeutig bestimmten Mittelpunkt ihres (minimalen, sphärischen) Umkreises. Aufgrund zu obigem Vorgehen analoger Überlegungen kann F nicht homogen sein.

Möge nun eine Fläche F die Voraussetzungen des Satzes mit (abb) erfüllen und homogen sein. Dann folgt als erstes, daß jeder Punkt regulär ist. In jedem Punkt existiert die Gaußsche Krümmung K, und diese ist eine stetige Funktion von F. Ist in <u>einem</u> Punkt $K = 0$ (bzw. $K \neq 0$), dann in <u>jedem</u>. (Bei dieser Schlußweise hat man nicht etwa eine unzulässige, weil parameterhaltige, Formel benutzt, vielmehr werden mit $K = 0$ bestimmte lokale Flächentypen beschrieben, nämlich: parabolisch oder planar bzw. elliptisch oder hyperbolisch.) Die sphärische Abbildung $n:F \to S^2$ ist differenzierbar, und ihre Funktionaldeterminante ist genau dann $\neq 0$, wenn $K \neq 0$.

Im Fall $K \neq 0$ ist n für jedes $x \in F$ ein lokaler Homöomorphismus und $n(F)$ eine offene Teilmenge in S^2. - Ist n surjektiv, dann ist es eine Überlagerung, und, da S^2 einfach zusammenhängend ist, ist F (nach einem Satz der Topologie) sogar insgesamt homöomorph zu S^2, erfüllt also Voraussetzung (aa) und ist selbst eine Kugel. - Ist n nicht surjektiv, so gibt es in $n(F)$ Punkte, deren Abstand zum (nichtleeren) Rand von $n(F)$ in S^2 maximal ist, und Punkte, deren Abstand zu diesem Rand nicht maximal ist. Dies führt wieder zu einer Einteilung der Punkte von F in zwei nichtleere Klassen, und F kann nicht homogen sein.

Falls nun $K = 0$, dann ist F, da insbesondere vollständig und randlos, (nach einem Satz der Differentialgeometrie) ein Zylinder, dessen ebene Schnittkurve C allerdings nicht notwendig konvex ist. Aus den Eigenschaften von F folgt für C: Es ist zusammenhängend, hat keine Doppelpunkte, keine Endpunkte und hat in jedem Punkt eine wohlbestimmte Krümmung k, die sich auf C stetig ändert.

Ist k in <u>einem</u> Punkt 0, dann in <u>jedem</u> Punkt, und F ist eine Ebene. Sei also $k > 0$. Gibt es zwei verschiedene Punkte auf C mit gleicher Krümmung k, dann gibt es für k auf C ein lokales Minimum (Maximum) zwischen diesen. Wegen der Homogenität von C ist <u>jeder</u> Punkt lokale Minimal- (Maximal)-stelle; zwischen zwei beliebigen gibt es wiederum eine lokale Maximal- (Minimal)stelle; und wegen der Homogenität ist dann <u>jeder</u> Punkt zugleich auch lokale Maximal- (Minimal)stelle. Insgesamt ist k überall auf C lokal konstant und als stetige Funktion überhaupt konstant; und C ist ein Kreis mit Radius $1/k$.

Also sei k beim Durchlaufen von C in einer Richtung streng monoton wachsend. Dann gilt für jeden Kurvenpunkt x: Der Rest der Kurve ist in einer Kreisscheibe vom Radius $1/k(x)$ enthalten, und die Kurve hat einen Endpunkt im Endlichen, im Widerspruch zur Voraussetzung.

10.3. Die Forderung der eindeutigen Realisierbarkeit räumlicher Formen

Die Fragen der 'eindeutigen Realisierbarkeit' gehören zu den schwierigsten Problemen der 'protophysikalischen' Methodologie. Vereinzelte Aspekte haben wir bereits früher erwähnt (z.B. das Interpretationsproblem, das Eindeutigkeitsproblem des Ebenen-Herstellverfahrens und die Ebenen-Eindeutigkeit). Nunmehr behandeln wir alle diese Fragen (einschließlich der Frage der Euklidizität) im Zusammenhang. Dieser Zusammenhang ergibt sich aus der exhaustiven Realisierung geometrischer Ideen. Die Ideen werden aufgefaßt als Handlungsvorschriften, die den Realisationsvorgang leiten. Das können sie natürlich nur, wenn das angesteuerte Ziel hinreichend klar fixiert ist und die Person, die gerade dabei ist, eine bestimmte Idee zu realisieren, stets ein deutliches Bild vom Fortgang der Operationen besitzt. Für unsere Zwecke einer operativen Geometrie-Didaktik genügte das vollauf. Für die operative Grundlegung der Geometrie im Sinne der 'protophysikalischen' Methodologie ist es jedoch notwendig, den Begriff der Realisierbarkeit durch ein <u>Eindeutigkeitspostulat</u> zu verschärfen.

Nach Janich (1969a) ist die Eindeutigkeit Eigenschaft einer Handlungsvorschrift, "logisch gewisse Beziehungen zu implizieren, welche zwischen Realisaten aus unabhängigen Realisierungsverfahren gelten" (S.42). Vom Dreiplattenschleifverfahren z.B. wird man erwarten, "daß zwei aus verschiedenen Plattentripeln genommene Platten aufeinander passen und gegeneinander verschiebbar sind" (S.43). Entsprechend sollten zwei realisierte starre Körper auch relativ zueinander starr sein, um nicht voneinander abweichende Längenmessungen zu ergeben. In der Praxis treten wohl immer wieder Abweichungen zwischen Verfahrensresultaten auf, sie lassen sich aber hinreichend klein halten. Dabei wollen nun die 'Protophysiker' keinesfalls stehen bleiben: Eindeutige Realisierbarkeit ist für sie nicht empirisch (oder gar eine unerklärte Naturgegebenheit, wie z.B. für Bopp (1958a, S.64f)); vielmehr verlangen sie, die Eindeutigkeit eines Verfahrens aus den Normen (Handlungsvorschriften) nachzuweisen, die das Verfahren leiten (Eindeutigkeitspostulat). Denn "erst wo einsichtige Gründe bestehen, die Gültigkeit von Relationen zwischen Realisaten aus unabhängigen Herstellungsverfahren zu erwarten, dürfen Abweichungen von diesen Relationen als Realisierungs<u>fehler</u> bewertet werden" (Janich, S.42). Mit der Erfüllung dieses Postulates "steht und fällt das protophysikalische Programm" (Janich (1973), S.136; vgl. vom selben Autor (1969b, S.302), (1976a, S.116)). Die für die Praxis wichtigste Konsequenz apriori nachgewiesener Eindeutigkeit ist die <u>situationsinvariante</u> <u>Reproduzierbarkeit</u>. Eine eindeutig realisierbare Form läßt sich immer und überall von neuem herstellen, ohne daß es dazu eines ganz bestimmten (in der Norm als Parameter gar nicht nennbaren) singulären Objektes, etwa eines schon anderweitig verfügbaren Realisates bedürfte (vgl. Janich (1969a), S.41). Natürlich wird man sich fragen müssen, in welchen Fällen das Eindeutigkeitspostulat überhaupt zu erfüllen sei und ob es daher immer sinnvoll ist, die Eindeutigkeit an die Realisierbarkeit von vornherein anzubinden (vgl. A. Kamlah (1978), S.336).

In den Beiträgen zur operativen Geometriebegründung wird der Begriff 'eindeutig' keineswegs immer mit der wünschenswerten Eindeutigkeit gehandhabt. Für Dingler selbst ist der Begriff zentral, er verwendet ihn durchgehend und fixiert ihn in einem eigenen "Prinzip der Eindeutigkeit", zu dessen Erläuterung er bis in die Geschichte der frühen Menschheit mit ihrer "Tendenz" zum eindeutigen Gestalten zurückgreift (vgl. Dingler (1956), S.80ff, (1964), S.40, S.275f, und Inhetveen (1981)). Nach Dingler (1964) sind "Wahrheit, Richtigkeit ... formal gesehen nur andere Worte für diese Eindeutigkeit" (S.275). Andererseits findet sich bei ihm durchaus die Eindeutigkeitsauffassung, die wir oben nach Janich dargestellt haben und die Janich (1969a, S.21) zu unrecht bei Dingler vermißt (s. etwa Dingler (1956), S.81 und S.82). Es mutet daher seltsam an, wenn Dingler an anderer Stelle (1928, S.91) diesen Eindeutigkeitsbegriff in unklarer Weise mit der Ebenen-Eindeutigkeit (im Sinne von 10.2.2) vermengt. Ganz ausdrücklich geschieht dies sogar bei Lorenzen und Schwemmer (1973), denen zufolge ein Beweis jener Ebenen-Eindeutigkeit garantieren soll, "daß Meßgeräte, die die Homogenitätsprinzipien realisieren, zu eindeutigen Meßergebnissen führen" (S.168; s. auch Mainzer (1976a), S.1018). Abgesehen davon, daß Beweise dafür aus den Homogenitätsprinzipien entweder fehlen oder – wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt – keineswegs zufriedenstellen können, neigen wir zu der Ansicht Janichs, ein solcher Beweis zeige "schon aus methodischen Gründen nicht die Eindeutigkeit der Definition von 'Ebene', weil diese Eindeutigkeit zur Definition der Geraden als Schnittlinie zweier Ebenen schon vorausgesetzt ist" (1969a, S.21, Fußnote 2; auch eine Formulierung der Nicht-Kollinearität ohne den Geradenbegriff ist hier wenig erfolgversprechend). Im übrigen ist vor 1976 kein 'protogeometrischer' Eindeutigkeitsbeweis (in welchem Sinne auch immer) publiziert worden.

Ein erstes Problem, das eng mit dem Postulat der Eindeutigkeit verknüpft ist, ist die schon mehrfach genannte Frage, ob eine operativ begründete Geometrie notwendig euklidisch sei. Dingler glaubt diese Frage bejahen zu müssen, weil er die euklidische Geometrie als "Ausdruck für den Willen zur Eindeutigkeit" ansieht ((1928), S.95; s. auch S.65 und S.74). Natürlich müßte sich in einem systematischen Aufbau dieser "Wille" in der Weise zeigen, daß operative Normen (H-Schemata) eine Entscheidung der Parallelenfrage erlauben. Wie wir aber für die Lorenzenschen Ansätze dargelegt haben, kann von einer solchen Entscheidung bisher noch keine Rede sein. Dingler selbst möchte die Euklidizität über eine entsprechende Einführung des starren Körpers erzwingen. Allerdings zeigen auch hier unsere früheren Überlegungen, daß die Frage der eindeutigen Realisierbarkeit (nicht der Realisierbarkeit überhaupt) noch eher als bei anderen räumlichen Formen offen bleiben muß, weil Idee (Norm) und Herstellverfahren der geometrischen Starrheit weitaus weniger zu trennen und daher auch nicht – wie für einen Eindeutigkeitsbeweis vonnöten – getrennt zu analysieren sind. Der früher geschilderte Versuch Dinglers einer unmittelbaren definitorischen Koppelung von Euklidizität und Starrheit läßt sich ebenfalls nicht halten. Somit liegen auf dieser Basis keine stichhaltigen Gründe für die Annahme vor, gerade die euklidische Geometrie sei vom operativen Standpunkt aus irgendwie ausgezeichnet.

Ein zweites hierher gehörendes Problem ist das der Interpretation der Formelklasse Ω , d.h. die Frage: welche Eigenschaften $\mathfrak{A}(F,P)$ sind zur Unterscheidung von Stellen (Punkten) einer Fläche zugelassen? Bisher haben wir nur formallogische Kriterien angewandt. Bei der (möglichst eindeutigen) Realisierung einer räumlichen Form F kommt es aber darauf an, über reelle Kriterien zur Unterscheidung von Flächenstellen zu verfügen. Dingler (1933, S.44ff) denkt dazu an bestimmte (vortheoretische) qualitative Verfahren, die sich auf "phänomenologische Abhängigkeitserlebnisse" gründen, z.B. das messungsfreie Prüfen der Oberfläche F eines Spiegels durch Vergleich der Spiegelbilder eines an verschiedenen Stellen P aufgesetzten Gegenstandes. A. Kamlah (1976) spricht dabei von einer "handwerklichen Interpretation" : Ω "besteht aus Aussagen, die aus den qualitativ bescheibbaren Gesetzmäßigkeiten, die den Handwerkern (etwa den Linsenschleifern) bekannt sind, abgeleitet werden können" (S.212). Eine zumindest ähnliche Interpretation scheint Janich (1976a) mit seiner Einführung eines "vorgeometrischen Vokabulars" vorzuschweben.

Kamlah hat am Beispiel der Herstellung von rechten Keilen aus zwei verschiedenen (affin gegeneinander transformierten) Materialien gezeigt, daß die handwerkliche Interpretation eine eindeutige Realisierung im allgemeinen nicht garantieren kann (S.210f). Gegenüber einer solchen Argumentation macht Janich (1973) den kaum überzeugenden ad-hoc-Vorschlag, "im Interesse einer eindeutigen Verwendung von Geräten eine zusätzliche Norm" aufzustellen, "die deren Verwendungszweck so genau vorschreibt, daß eine Materialsorte bzw. die Sorte der daraus gefertigten Geräte dieser Norm nicht mehr genügen" (S.141). Stattdessen liegt es näher zu versuchen, die Eindeutigkeit der herzustellenden Form durch Erweitern der Eigenschaftsklasse Ω zu erzwingen. Dieses Vorgehen lehnt Janich (1976b, S.347) als "unangemessen" ab, sofern es den 'protophysikalischen' Rahmen überschreitet. Vom Standpunkt der pragmatischen Ordnung ist Janich zweifellos im Recht, doch geht es an dieser Stelle nicht um den methodischen Aufbau selbst, sondern um die methodologische Beurteilung des Eindeutigkeitspostulates. Wenn sich nämlich herausstellt, daß dieses Postulat bei maximaler Klasse Ω nicht zu erfüllen ist, so ist es dies erst recht nicht für eine Teilklasse. Ein 'Protophysiker' kann sich die von ihm gewünschte Teilklasse sogar selbst vorgeben.

Die genannte Erweiterung der Eigenschaftsklasse führt Kamlah zu seiner "physikalischen Interpretation" der Homogenität (S.183). In dieser besteht Ω aus genau denjenigen Aussagen über (F,P) , die aufgrund physikalischer Gesetze gelten. Damit gewinnt Kamlah das folgende (auch unabhängig von der 'protophysikalischen' Diskussion bedeutsame) Resultat: Die euklidische Geometrie T mit den ("physikalisch" interpretierten) Homogenitätsprinzipien Hmg ist äquivalent zur Invarianz aller Naturgesetze gegenüber der euklidischen Bewegungsgruppe (S.184; Beweis auf S.185-202). - Wie Kamlah gezeigt hat, ist es damit in der Tat möglich, gewisse Einwände gegen die Eindeutigkeit der ideativen Normen zu widerlegen (z.B. die Auffassung im sog. Wellsteinschen Hohlweltmodell, S.204f). Dennoch "läßt sich die Eindeutigkeit der Homogenitätsprinzipien auch in der physikalischen Interpretation nicht garantieren, wenn Störungen auftreten, die man nicht ausschalten kann, und die sich nicht wie elektrische Felder durch einen Faraday-Käfig auf irgendeine Weise abschirmen lassen" (S.215; ein Gegenbeispiel wird dazu auf S.214f diskutiert).

Die neueren Darstellungen der 'Protogeometrie' (ab 1977) suchen das Problem der Eindeutigkeit durch einen formentheoretischen Ansatz zu lösen. Dieser Ansatz orientiert sich von vornherein möglichst eng an der empirischen Formungspraxis, insbesondere am Dreiplattenschleifverfahren. Die Grundkonzeption hat ursprünglich Dingler in Anhang I seiner frühen Geometrietheorie (1911) mit dem Ziel entwickelt, "die bei der empirischen Herstellung der Ebene gebrauchten Operationen der Wirklichkeit direkt in die logischen Zeichensprache umzusetzen, und von diesen so entstehenden 'Axiomen' auf rein logischem Wege nachzuweisen, daß sie die bekannten Axiome des Euklid ... zur Folge haben" (S.155). Dingler hat seine Überlegungen (unseres Wissens) später nicht wieder aufgegriffen, einzig Bopp verwendet in seinen Arbeiten (1956, S.387ff), (1958a, S.60ff), (1969, S.35ff) einen daran erinnernden Formbegriff. Die Idee ist höchst einfach und besteht in folgender 'Auslegung' des Ebenenschleifverfahrens: Sind A, B, C die Schleifflächen, so können wir B als einen 'Abdruck' (ein Paßstück) von A und weiter C als 'Abdruck' von B und damit als 'Kopie' von A auffassen. Am Ende des Schleifvorgangs passen dann alle Flächen (beliebig verschiebbar) auf Kopien von sich selbst. - Die Vermutung liegt nahe, daß wir es hier mit einer "charakteristischen Eigenschaft der Ebenheit" (Dingler, S.158) zu tun haben, welche die Ebene als Form (eindeutig) bestimmt.

Die erste 'protogeometrische' Auswertung dieses Gedankens präsentierte Lorenzen (1977) als "konstruktive Theorie der Formen räumlicher Figuren". Dort wird (S.96) eine Schnittfläche eines Körpers K eben genannt, wenn K zu einem Abdruck K' von K passungsgleich ist (d.h. K und K' besitzen einen gemeinsamen Abdruck). Offenbar ist diese Definition so nicht brauchbar, denn sie umfaßt außer ebenen auch wellblechförmige oder einfach gestufte Flächen. Um diese Fälle auszuschließen, betrachtet Lorenzen in einer späteren Arbeit (1978) nur solche Körper, an denen "ein Oberflächenstück ausgezeichnet ist, so daß in diesem Oberflächenstück noch ein Berührungselement markiert ist" (S.81). Daraufhin wird die Ebenheit "dadurch definiert, daß Schablone und Abdruck für alle Berührungselemente passungsgleich sind" (S.83). Auf dieser Basis wird ein Eindeutigkeitssatz formuliert, wonach zwei ebene Flächenstücke stets (frei verschiebbar) aufeinander passen. Der Beweis hierzu, obwohl als "leicht" bezeichnet, beschränkt sich zunächst nur auf (unterschiedliche) Andeutungen (1977, S.96 und 1978, S.83). Ungeachtet solcher Provisorien stellt Lorenzen wenig später (S.84) fest, daß die neuen Normen eine Geometrie begründen und daß dies nur die euklidische sein könne. Den Grund für die zweite Behauptung erblickt er in der (als gültig behaupteten und als 2-Punkte-Homogenität formulierten) Formgleichheit aller Strecken:

$$P_1 \neq P_2 \wedge Q_1 \neq Q_2 \wedge \mathfrak{A}(P_1, P_2) \rightarrow \mathfrak{A}(Q_1, Q_2).$$

Zum Nachweis dieses Schemas (dem übrigens von vornherein die in 10.2 genannten allgemeinen Schwierigkeiten solcher Beweise im Wege stehen) bemerkt Lorenzen lediglich, durch seine Definition von Ebene und Orthogonalität sei "keine Streckengröße ausgezeichnet" (S.84).

Von den zu diskutierenden Detailfragen einmal abgesehen muß man sich an dieser Stelle allgemeiner fragen, in welchem Verhältnis der Begründungsversuch mittels Homogenität zu dem formentheoretischen Ansatz steht. Handelt es sich beim zweiten um eine Neuerung, die den ersten ablösen soll? Zu dieser Frage liegen inzwischen klare Stellungnahmen vor. Sowohl Lorenzen (in der Diskussion zu seinem Vortrag (1979)) als auch Inhetveen (1979a) behaupten, die Formentheorie ermögliche eine Ableitung der früheren Homogenitätsschemata. Der von Inhetveen dazu angedeutete Beweis mittels Teilformelinduktion (S.52ff) ist allerdings insofern fehlerhaft, als er gerade den Quantorschritt im Unklaren läßt, bei dem ja parameterhaltige und i.a. auch unzulässige Teilformeln auftreten, auf die die Induktionsvoraussetzung nur um den Preis eines Widerspruchs anwendbar ist. (Überdies werden bei diesem 'Beweis' überhaupt keine Voraussetzungen aus der Formentheorie verwendet.) - Allenfalls scheinen Janich (1976a) und Inhetveen (1978b) den formentheoretischen Ansatz mit einer Spezialisierung der Homogenität im Sinne der handwerklichen Interpretation verbinden zu wollen. Letzteres läuft darauf hinaus, daß in Ω nur noch endlich viele in 'formungspraktischer' Sprache formulierbare Eigenschaften zugelassen werden. (Bei Janich, S.114f, finden sich drei Auffüllungen, bei Inhetveen nur eine; vgl. seine Fußnote 3, S.274, in der überdies festgestellt wird, daß damit auch der - vermutlich als unerwünscht angesehene - "indefinite Quantor über 'geometrische' Aussageformen" entfalle.) Am Ende "entpuppen" sich für Inhetveen die Homogenitätsprinzipien bloß "als Metatheoreme der konstruktiven Geometrie" (1981) oder als ganz entbehrliches Überbleibsel aus älteren Begründungsansätzen (s. 1983, S.4).

Bei seinem Versuch, eine 'Protogeometrie' bis hin zu den gewünschten Eindeutigkeitsaussagen zu entwickeln, spezialisiert Janich (1976a) die innere Homogenität, indem er für $\mathfrak{A}(F,S)$ den Ausdruck wählt "Es gibt Paßstücke P' und P" zu einem Teilgebiet von F, so daß S eine Berührstelle auf P' bzw. P" hat, und P' und P" aufeinander passen". Die damit postulierte Flächenform F nennt er "flach" (vorgeometrische Form zur Ebenheit) und behauptet, sie sei "eindeutig bestimmt" in folgendem Sinn: "Wenn zwei harte Körper in voneinander unabhängigen Herstellverfahren flache Gebiete erhalten haben, so passen sie aufeinander" (S.116). Allerdings ist festzustellen, daß bezüglich der angegebenen Eigenschaft überhaupt die meisten Flächen homogen sind und als "flach" bezeichnet werden müßten, nämlich alle diejenigen, die entweder für alle Stellen oder für keine Stelle zwei Paßstücke besitzen, die auch noch aufeinander passen. In seinen Überlegungen beschränkt sich Janich zwar auf Flächen eines sehr speziellen Typs ("glatt vom Typ 4", S.98). Da jedoch zu diesem sowohl Kugeln als auch Ebenen gehören und beide "flach" im obigen Sinne sind, kann der beabsichtigte Eindeutigkeitsbeweis von vornherein nicht gelingen. Die zu erwartenden Schwierigkeiten werden denn auch durch Stipulation eines Krümmungsbegriffs übersprungen, aus dessen Eigenschaften das zu Beweisende zwar ohne weiteres resultiert, dessen Wohldefiniertheit aber alles andere als selbstverständlich ist. (Janich belegt jede von ihm betrachtete Fläche F mit einer reellen Zahl k(F) als zugehöriger Krümmung, wobei für zwei Flächen F und G gilt: $k(F) > k(G)$ ($k(F) < k(G)$, $k(F)=k(G)$) genau dann, wenn F und das Paßstück von G genau ein (kein, mehr als ein) inneres Berührstellenpaar haben. Es wird aber nicht die Existenz zweier Flächen F, G des betrachteten Typs ausgeschlossen, so daß für alle X: $k(X) > k(F)$ genau dann, wenn $k(X) > k(G)$, sowie $k(X) < k(F)$ genau dann, wenn $k(X) < k(G)$, und dennoch $k(F) \neq k(G)$. Überdies wird die Beschränkung auf "Glatte vom Typ 4" nicht gerechtfertigt.) Wesentlicher Bestandteil des Eindeutigkeitsbeweises wäre ein Nachweis dieser Wohldefiniertheit, und zwar in bezug auf eine viel umfassendere Klasse von Flächen. Denselben Punkt erörtert auch P. Hucklenbroich ausführlicher (neben weiteren Schwachstellen) in seiner Kritik der 'Protophysik' des Raumes (1978, S.366ff). Ein späterer, um mehr Explizitheit bemühter Beweisversuch von Inhetveen (1978b) ist ebenfalls nicht schlüssig.

Einen gewissen Erfolg in der Eindeutigkeitsfrage konnte K.-H. Katthage (1979) erzielen. An die Arbeit von Janich anknüpfend bemerkt er zunächst, daß die dort verwendete Definition von "harter Körper" verschärft werden muß. Es genügt nicht, von harten Körpern allein die Transitivität der Vertauschbarkeit bezüglich eines Paßkörpers zu fordern. Vertauschbar heißen zwei Körper A und B , wenn sie zu einem dritten Körper K passen. Für so definierte harte Körper folgt aber nicht die Unabhängigkeit von einem bestimmten Paßkörper, d.h. das Passen irgendeines Körpers K' zu B , falls K' zu A paßt und A, B vertauschbar sind.

Katthages weitere Überlegungen bestehen in einer lokalen Analyse der relationalen Struktur des Dreiplattenverfahrens. Als Grundlage dienen dazu exemplarisch eingeführte Prädikate ("Körper", "Fläche", "Stelle", "berühren", "passen", "glatt" usw.), intensionale Bestimmungen in Form von Prädikatorenregeln (z.B.: A, B glatt zueinander $\Longrightarrow$ A , B passen aufeinander) sowie an empirischer Formungspraxis evident gemachte Axiome (z.B.: Sind A , B glatt zueinander und paßt C auf A , so sind auch A , C glatt zueinander). Ein Tripel heißt "flach", wenn je zwei Komponenten glatt zueinander sind (Dreiplattenverfahren). Aus einer ganzen Reihe explizit gemachter Annahmen (insgesamt 12 interne Gebrauchsregeln) leitet Katthage dann die Eindeutigkeit des Dreiplattenverfahrens in folgender Form her: Zwei Körper aus verschiedenen Flachen-Tripeln sind glatt zueinander und vertauschbar. - Es ist festzuhalten, daß dieses Ergebnis nur für harte Körper gilt. Mittels einer Plausibilitätsüberlegung zeigt Katthage, daß dazu eine geeignete Klasse relativ zueinander starrer Körper hinreicht (S.50ff). Somit hat die Eindeutigkeit praktisch ihren Grund außer in der Homogenität (aufgefaßt als Ununterscheidbarkeit im Paßverhalten) auch "in der

Tatsache, daß ein System relativ starrer Gebilde mit großer Genauigkeit realisierbar und reproduzierbar ist" (S.71).

Im Zuge dieser Diskussion konsolidierten sich in der Erlanger Schule "Neue Grundlagen der Geometrie" (so die Überschrift eines Manuskripts von P. Lorenzen, 1981), deren Ausarbeitung durch R. Inhetveen inzwischen als Buch unter dem Titel "Konstruktive Geometrie - eine formentheoretische Begründung der euklidischen Geometrie" (1983) vorliegt. Da diese Schrift insgesamt zu unserer Auffassung der operativen Geometriegenese keine wesentlich neuen Erkenntnisse beisteuert, können wir uns hier ganz auf die Frage nach der Behandlung des Eindeutigkeitsproblems beschränken. (Für weitere Einzelheiten sei auf die Rezension von Schreiber (1984) verwiesen.)

Inhetveen unterscheidet bei der Entwicklung der Geometrie einen protogeometrischen von einem systematischen Teil. Dieser ist durch den Gebrauch eines sog. Formprinzips gekennzeichnet, das die Ununterscheidbarkeit (Formgleichheit) aller Figuren fordert, die aus irgend zwei Punkten durch jeweils dieselbe Folge von Konstruktionshandlungen hervorgehen. (Natürlich ist damit nichts anderes gefordert als die Euklidizität.) In der Protogeometrie (und Geometrie) werden "aphairetische" Aussagen gemacht, was bedeuten soll: der Form nach Behauptungen, der Absicht nach Normen für die Formungspraxis (S.24). Einige dieser Aussagen werden abgeleitet, andere bilden einen Anfang, wie z.B. die sechs Sätze, in denen von den Relationen des Berührens und des Passens von Körpern verlangt wird, daß sie total, symmetrisch und schwach-transitiv sein sollen. Die schwache Transitivität des Passens p besagt: aus ApB, BpC, CpD ergibt sich ApD. Ist eine Passungsfolge ApB, BpC, CpA realisierbar (und damit ApA), so heißt A "abdruckstabil". Unter den abdruckstabilen Oberflächenstücken sollen nun die geeigneten Kandidaten für Ebenen herausgesucht werden. Hatte man anfänglich etwas unklar mit "Berührungselementen" operiert (s.o.), so denkt man sich nun die Passung ApA mit Hilfe einer "Klappung" realisiert, die eine Kopie von A auf das betreffende Oberflächenstück von A aufsetzt und dabei eine "Klappachse" auszeichnet (sie "enthält alle die Stellen, die bei der Klappung fest bleiben", S.29). Oberflächen wie das (abdruckstabile) hyperbolische Paraboloid fallen damit außer Betracht, und es bleiben "klappsymmetrisch" genannte Körper(oberflächenstücke), z.B. ein Wellblech oder eine Fläche mit sägezahnförmigem Querschnitt. Von einer "technischen Ebene" ist nun nach Lorenzen und Inhetveen zu verlangen, daß sie "frei klappsymmetrisch" ist, d.h. daß "zu je zwei Stellen des Oberflächenstückes eine Klappung um eine Klappachse existiert, die diese Stellen ineinander überführt" (S.31). Für zwei "technische Ebenen" kann man dann zeigen, daß sie sich an beliebigen inneren Stellen (und damit frei verschiebbar) zur Passung bringen lassen (S.32). Allerdings ist diese Eindeutigkeitsaussage (als "Dingler-Janichscher Eindeutigkeitssatz" herausgestellt) insofern nicht überraschend, als man ja mit der freien Klappsymmetrie eine recht starke Voraussetzung investiert hat; da hätte es kaum einen Unterschied ausgemacht, die Eindeutigkeit technischer Ebenen von vornherein bloß zu postulieren. Dies gilt umso mehr, als uns der protogeometrische Status der Klappsymmetrie selbst als zweifelhaft erscheint. Die protogeometrischen Sätze fungieren nach Inhetveen "als Gütekriterien für die Herstellung von Körpern mit geforderten Eigenschaften" (S.20). Es muß demnach möglich sein, auf der Oberfläche bestimmter Körper Klappachsen auszumachen. Allerdings ist nicht ganz klar, wonach man dabei zu suchen hat. Was bedeutet in der Herstellungspraxis eine Fixpunktmenge unter einer Klappung? Erst später (nach dem Eindeutigkeitsbeweis für die Ebene) werden "technische Geraden" als Kanten (Schnitte zweier technischer Ebenen) eingeführt und Klappachsen als technische Geraden identifiziert (S.33). So drängt sich der Verdacht auf, daß mit dem harmlosen Wort 'Klappachse' das ganze Vorgehen zirkulär wird: es ist ein Joker, der an der entscheidenden Stelle die Rolle der Geraden übernimmt, um sie später 'offiziell' zugesprochen zu erhalten. Möglicherweise läßt sich diese Rolle so ändern, daß kein Zirkel entsteht; dann aber gewiß nicht durch den Hinweis auf die protogeometrische "Aphairesis".

In jedem Fall bleibt aber festzustellen, daß eine Definition der Ebene mit einem so starken und der Praxis fernliegenden Begriff wie dem der (freien) Klappsymmetrie begründungstheoretisch als eher trivial anzusehen ist, und zwar in demselben Sinne trivial, wie es die Erzwingung der Euklidizität durch das "Formprinzip" ist. Im Anschluß an diese und ähnliche Stipulationen gelingt dann ein reibungsloser Aufbau der Längenmessung. Es wird uns aber nicht deutlich, worin sich schließlich der selbstgesetzte strenge methodologische Anspruch eines Aufbaus "aus dem lebensweltlichen Fundament einer Passungstechnik zu einer Theorie der Formen" erfüllen soll.

NACHWORT

Wer der operativen Genese der Geometrie soweit gefolgt ist, mag vielleicht allein aufgrund der Dominanz des einen Themas, trotz gelegentlich eingestreuter Abschwächungen, den Eindruck gewonnen haben, Operativität sollte als das Wesen der Geometrie hingestellt werden. Besser ist es aber, hier den größeren Zusammenhang zu sehen, in dem der operative mit einem logischen und einem ästhetischen Aspekt der mathematischen Tätigkeit verbunden ist. Waren der logisch-begriffliche Gehalt der Geometrie und ihre ästhetisch-anschauliche Seite schon immer vielbearbeitete Themen, so kann man das vom operativen Aspekt, insbesondere seiner hier behandelten teleologischen Spielart nicht behaupten. Im Gegenteil, das Reich der Zwecke und der technischen Praxis galt als die (meistens nicht so recht wahrgenommene) eher anstößige Nachtseite der kristallreinen Ideengefilde, die uns in der Geometrie begegnen. So allein konnte die Ansicht entstehen, es sei ein Wunder oder metaphysisches Rätsel, daß die Begriffe der Mathematik so gut auf die Wirklichkeit passen.

Schon Kant hat dieses Rätsel durch transzendentale Kritik aufgeklärt, indem er zu zeigen versuchte, daß das Objekt der Erkenntnis im Erkenntnisprozeß selbst mitgestaltet wird und nicht etwa als fertiges Bild in ein passives Bewußtsein fällt. Noch deutlicher als Kant ist es Dingler für die Geometrie gelungen, den vom Menschen geleisteten Anteil der Wirklichkeitsstruktur aufzuzeigen: Die Begriffe der Geometrie passen so gut auf die Wirklichkeit, weil wir diese nach ihrem Vorbilde praktisch-technisch gestalten. Kant dachte sich diese Spontaneität ganz als eine Sache der Erkenntnis und dementsprechend ins Selbstbewußtsein verlegt. Für Dingler war sie hingegen eine Angelegenheit des Handelns, des praktischen Tuns und damit der Domäne des Willens zugehörig.

Der Beitrag zur menschlichen Selbsterkenntnis, den beide Auffassungen liefern, erscheint uns jedoch dann am größten, wenn die in ihnen beanspruchte Spontaneität nicht hypostasiert wird. Der Mensch ist weder ein leibloses Bewußtsein noch ein tatenwütiges Willenswesen. Wenn wir von Ideen gesprochen haben, so meinten wir das nie im Sinne eines Idealismus; und statt an Operativismus hielten wir uns immer an die operative Genese der Geometrie. Sie gilt uns nicht als 'letzte Wahrheit', sondern als vernachlässigte 'Kehrseite' der Geometrie, die besser als gleichberechtigte Rückseite oder, je nach Standpunkt, auch einmal als Vorderseite betrachtet werden sollte.

Jedes Ding hat seinen Zusammenhang, der es übersteigt und relativiert, nicht minder der teleologisch-operative Aspekt und der gelegentlich mit ihm aufkommende Eindruck einer allzusehr zupackenden Art des Erkennens und Handelns (man denke nur an Dinglers "Ergreifung des Wirklichen"). Den größeren Komplex der logischen und ästhetischen Komponenten hatten wir schon erwähnt. Geometrie als

Thema abstrakten Denkens und Geometrie als Feld anschaulichen Vorstellens (einschließlich der Wahrnehmung ihrer Schönheit) stehen nicht unverbunden neben ihrer Praxis und mildern deren technische Rationalität. Aber auch die Teleologie jener Praxis selbst, wenn wir nur über sie nachdenken, kann uns zu einer offeneren und Einseitigkeit vermeidenden Auffassung verhelfen. Denn führen wir uns vor Augen, inwieweit eine Disziplin von einer Praxis und diese wiederum von einer Sphäre von Zwecken und Bedürfnissen abhängt und bestimmt wird, dann gilt es auf diese Zwecke zu achten und sie bewußt zu machen. So ist es nur noch ein Schritt bis zu der Erkenntnis, daß Zwecke nichts Absolutes sind, das uns am Ende dazu verführen könnte, eine durch Begriffe demolierte Wirklichkeit zu produzieren,- es sei denn wir machten sie dazu, indem wir das hinter ihnen stehende menschliche Leben vergessen.

ANHANG

I. Erläuterung einiger logischer Grundbegriffe

Wenn es manche Autoren auch versucht haben, so ist es doch wenig sinnvoll, den Begriff der Aussage abstrakt und ohne Bezugnahme auf die Regeln einer Sprache zu definieren. Da heißt es gelegentlich, eine Aussage sei ein sprachliches Gebilde, von dem es Sinn habe zu sagen, daß es wahr oder falsch sei. Diese Erklärung ist für natürliche Sprachen unbrauchbar, für formale Kunstsprachen ist sie sogar unbrauchbar und überflüssig. Da wir nur mit der zweiten Sorte oder ihr zumindest sehr verwandten Sprachsystemen zu tun haben, genügen hier einige Bemerkungen darüber, nach welchen Regeln man die Ausdrücke einer formalen (oder formalisierbaren) Sprache erzeugt. Für natürliche Sprachen stellt der Begriff der Aussage sowie die semantischen Prädikate (z.B. 'wahr', 'falsch') ein Problem dar, ein ziemlich kompliziertes sogar, wie die Forschungen des amerikanischen Logikers R. Montague (1974) auf diesem Gebiet zeigen. Bei formalsprachlichen Ausdrücken hingegen brauchen wir uns um semantische (das sind ihre Gültigkeit oder ihren Sinn betreffende) Probleme vorerst nicht zu kümmern. Diese Ausdrücke werden nämlich nach bestimmten Regeln schrittweise aus einfacheren sprachlichen Bausteinen hergestellt.

Die einfachsten Bausteine einer künstlichen Sprache L sind Variable x,y,z,... sowie gelegentlich auch Konstanten a,b,c,... für Individuen (über die in L der Intention nach, nicht aber unbedingt auch 'wirklich' gesprochen wird). Oft enthält eine Sprache mehrere Variablensorten nebeneinander, z.B. gibt es in Hilberts geometrischer Sprache Variable für Punkte, Geraden und Ebenen, aber keine Konstante. Dagegen benutzt man in der elementaren Arithmetik meist nur Variable für natürliche Zahlen, aber auch eine Konstante für die Zahl Null. Eine weitere Sorte von Sprachelementen bilden die Funktionszeichen f,g,h,... . Einfache Beispiele sind das Symbol 'log' für den Logarithmus oder '+' für die Addition. Insofern man den Logarithmus von einer Zahl bildet bzw. zwei Zahlen addiert, erhalten 'log' und '+' die sog. Stellenzahlen 1 bzw. 2 zugeordnet. Mit jedem Funktionszeichen von L ist eine bestimmte Stellenzahl verbunden zu denken. In geometrischen Sprachen kommen gewöhnlich keine Funktionssymbole vor, doch könnte man unschwer welche einführen, z.B. ein 2-stelliges Zeichen für den Schnitt zweier Ebenen.

Nun lassen sich aus den bisherigen Sprachelementen sog. einschlägige Terme (L-Terme, oder kurz: Terme) erzeugen, und zwar allgemein nach folgenden Regeln: Variable und Konstanten fungieren als Terme; sind $t_1,\ldots,t_n$ bereits hergestellte Terme und f ein n-stelliges Funktionszeichen, so ist auch $f(t_1,\ldots,t_n)$ ein Term. - Beispielsweise sind x,y,2 drei Terme, und mittels

Funktionszeichen bilden wir aus ihnen zusammengesetzte Terme wie +(x,2) (normalerweise als x+2 geschrieben), y+log(x+2) und dgl. mehr. Mit Hilfe der Terme und einer weiteren Sorte von Symbolen, den Relationszeichen: ϱ, σ, τ, ... gelangen wir zu den Grundformeln (oder atomaren Formeln). Auch die Relationszeichen sind mit einer Stellenzahl behaftet, z.B. ist ein Zeichen für die Inzidenz (von Punkt und Gerade) 2-stellig, eines für die Zwischenbeziehung (etwa: Ebene zwischen zwei Punkten) 3-stellig. Hat man ein n-stelliges Relationssymbol ϱ und Terme $t_1, \ldots, t_n$, so ist $\varrho\,(t_1,\ldots,t_n)$ der allgemeine Fall einer atomaren Formel (wobei wir das Identitätszeichen nicht unter die logischen Symbole zählen, sondern als 2-stelliges Relationszeichen auffassen). Schließlich werden die einschlägigen Formeln (und Aussagen) hergestellt, indem man Grundformeln mittels logischer Symbole zusammensetzt. Was 'Formel' bzw. 'Aussage' besagt, hängt somit von den zugelassenen Regeln logischer Zusammensetzung ab. Gewöhnlich werden folgende Erzeugungsregeln zugrunde gelegt:

Grundformeln sind Formeln. Wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, ... bereits gebildete Formeln sind, so auch $\neg\mathfrak{A}$ ('nicht $\mathfrak{A}$'), $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ ('$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$'), $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ ('$\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$'), $\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{B}$ ('wenn $\mathfrak{A}$, dann $\mathfrak{B}$') sowie $\bigwedge x\,\mathfrak{C}$ ('für alle x : $\mathfrak{C}$') und $\bigvee x\,\mathfrak{C}$ ('es gibt ein x , so daß $\mathfrak{C}$').

Die Zeichen '$\bigwedge$' und '$\bigvee$' heißen All- bzw. Existenzquantor, die hinter ihnen stehenden Variable durch sie gebundene Variable. Ob eine Variable gebunden oder nicht-gebunden (frei) ist, hängt davon ab, in welchem Formelteil wir ihr Vorkommen betrachten. Beispielsweise kommt in der Formel

$$\neg\sigma(x,y)\wedge\bigwedge x\bigvee z\ \varrho(x,y,z)$$

z nur gebunden, y nur frei und x sowohl frei als auch gebunden vor, und zwar ist x in $\neg\sigma(x,y)$ frei, in $\bigwedge x\bigvee z\,\varrho(x,y,z)$ aber gebunden. Eine Formel, in der keine Variable frei vorkommt, heißt Aussage; Aussagen sind also spezielle Formeln. Die so gebildeten sprachlichen Ausdrücke (wie auch die Sprache selbst) heißen von erster Stufe, da die Quantoren sich nur auf Variable für Individuen, nicht aber auch auf (hier nicht betrachtete) Variable für Funktionen oder Relationen erstrecken. In diesem Fall spricht man von Sprachen zweiter oder höherer Stufe.

Um die natürlichsprachlichen Aussagen (etwa in diesem Teil des Anhangs) von den formalsprachlichen Aussagen (etwa bzgl. einer Sprache L erster Stufe) zu unterscheiden, spricht man auch von Aussagen der Metasprache bzw. der Objektsprache (hier: L). Gelegentlich hat man es mit einer Metaaussage (d.h. Aussage der Metasprache) zu tun, in der etwas über alle Formeln einer formalen Sprache L behauptet wird. Zum Beweis solcher Metaaussagen verwendet man eine

Induktion über den Aufbau der L-Formeln. Diese besteht darin, die Behauptung zunächst für die atomaren Formeln zu zeigen (Induktionsverankerung) und dann für die nach den Erzeugungsregeln zusammengesetzten Formeln $\neg\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$, $\bigwedge x\mathfrak{C}$, ... unter der Annahme ihrer Geltung für die Teilformeln $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... (Induktionsschritt). Wenn die Meta-Allaussage sich auf sämtliche Formeln einer Teilmenge Ω der Menge aller Formeln bezieht, so funktioniert die Aufbau-Induktion natürlich nur, wenn die Menge Ω auch induktiv nach den betreffenden Regeln erzeugt werden kann.

Die soweit skizzierte Syntax ist rein formal; dennoch versteht man sie besser vor dem Hintergrund einer inhaltlichen mathematischen Theorie. Hilbert hat zwar immer wieder den formalen Status seines geometrischen Axiomensystems betont, er formuliert die einschlägigen Aussagen aber nicht mittels logischer Symbolik, sondern verwendet die entsprechenden Wörter der mathematischen Gebrauchssprache, auch für die Relationszeichen, die ja nach Hilbert für sich genommen keine Bedeutung besitzen. Überlegen wir einmal, was wir zu tun hätten, wollten wir einer formalen Sprache 'Bedeutung geben', sie interpretieren, wie der technische Ausdruck lautet. Der Vorgang ist im Grunde recht einfach und plausibel: Mit Ausnahme der Variablen ersetzen wir jedes Symbol der Sprache durch den wirklichen Namen für ein Ding. Für die logischen Zeichen haben wir dies bereits in den beigefügten Klammern angedeutet. Konstanten werden ersetzt durch Namen für Individuen, Funktions- und Relationszeichen durch Namen für Abbildungen bzw. Beziehungen entsprechender Stellenzahl. Kurzum, der Sprache L wird eine Struktur S zugeordnet, bestehend aus einem Individuenbereich (in der Rolle der Trägermenge) samt über ihm erklärter Funktionen und Relationen. Bei einer solchen Interpretation geht eine einschlägige Aussage $\mathfrak{A}$, die ja in Wahrheit nur das Gerüst einer Aussage (eine Aussagenform) darstellt, in eine einschlägige Aussage der zu $\mathfrak{A}$ gehörenden inhaltlichen Sprache über. Stellt diese eine in S wahre Behauptung dar, so heißt S Modell für $\mathfrak{A}$. Ist S Modell für jede Aussage eines Aussagensystems, so heißt S Modell des Systems.

Vom Modellbegriff kommen wir unmittelbar zum Begriff der logischen Folgerung. Sei Γ eine Menge einschlägiger Formeln. Eine Aussage $\mathfrak{A}$ heißt logische Folgerung aus Γ, wenn sie in jedem Modell von Γ gilt. Man darf das logische Folgern in diesem Sinne nicht verwechseln mit dem logischen Schließen, bei dem von vorgegebenen Formeln ausgehend nach fest vereinbarten Regeln neue Formeln abgeleitet werden. Ein solches System von Ableitungsregeln stellt die sog. klassische Prädikatenlogik (erster Stufe) dar (in älterer Literatur häufig "Funktionenkalkül" genannt). Schon immer haben Logiker und Mathematiker davon geträumt, aus Axiomen die Theoreme der Mathematik durch rein mechanisches Ableiten gewinnen zu können. Bedeutend war der Vorstoß G. Freges in diese Richtung, umfassender jedoch der deduktive Aufbau, den B. Russell und

A.N. Whitehead in ihrem berühmten dreibändigen Monumentalwerk "Principia Mathematica" (1910-1913) vorgeführt haben. Über die prädikatenlogischen Schlußregeln bewies Kurt Gödel (1930) den nach ihm benannten

Vollständigkeitssatz: Ist $\mathfrak{A}$ logische Folgerung aus Γ , so läßt sich $\mathfrak{A}$ auch mit Hilfe der Schlußregeln der Prädikatenlogik aus Γ ableiten. (Die Umkehrung hiervon gilt ebenfalls, ist jedoch vergleichsweise trivial.)

Nehmen wir als Beispiel das Hilbertsche Axiomensystem für die Geometrie: Eine in allen seinen Modellen gültige Aussagenform ist dann dem Vollständigkeitssatz zufolge aus den Axiomen mit den Regeln der Prädikatenlogik ableitbar. Allerdings sagt der Gödelsche Satz nichts darüber aus, wie eine solche Ableitung beschaffen ist.

Abschließend erwähnen wir noch den Begriff der deduktiven Vollständigkeit, der sich nicht - wie der oben genannte - auf die Schlußregeln, sondern auf das jeweilige Axiomensystem Γ bezieht. Γ heißt <u>deduktiv-vollständig</u>, wenn jede nicht aus Γ ableitbare einschlägige Formel $\mathfrak{A}$ in Γ widerlegt werden kann (nämlich durch einen Beweis von $\neg\mathfrak{A}$ aus Γ). Ein bekanntes Resultat von Alfred Tarski besagt, daß die euklidische Geometrie (in einer geeigneten Formalisierung erster Stufe) deduktiv-vollständig ist (vgl. dazu die ausführliche Darstellung bei W. Schwabhäuser (1956)). Das ist schon deswegen bemerkenswert, weil die meisten axiomatischen Theorien, z.B. der Arithmetik oder der Mengenlehre, diese Eigenschaft nicht besitzen.

(Leser die an einer ausführlichen Erörterung der genannten Begriffe interessiert sind, müssen wir auf die reichhaltige Lehrbuchliteratur zur mathematischen Logik verweisen, z.B. auf das ausgezeichnete Buch von J.R. Shoenfield (1967).)

II. Chronologisches Verzeichnis zur Literatur über 'operative Geometrie'

Das folgende (im Herbst 1983 abgeschlossene) Verzeichnis enthält eine chronologische und innerhalb gleicher Jahre nach Verfassern alphabetisch geordnete Auflistung von Arbeiten, die sich mit der operativen Interpretation und Grundlegung der Geometrie in der Tradition Dinglers befassen. Zitiert wird gemäß dem nachfolgenden Literaturverzeichnis. Eine Reihe von Titeln sind mit Annotationen versehen (hier: knappe Andeutungen zum Inhalt oder auch charakteristische Textstellen); das Fehlen einer Annotation bedeutet keinerlei Wertung, überhaupt wurde von wertenden Stellungnahmen abgesehen. - Mit Sicherheit kann keine Vollständigkeit beansprucht werden. Das Verzeichnis dient lediglich der Orientierung im Entwicklungsgang des geometrischen Operativitätsgedankens, es soll weder dessen (noch zu schreibende) Geschichte ersetzen noch eine Bibliographie zu Dinglers Geometrietheorie darstellen (mehr Hinweise dazu z.B. in Willer (1973), S.105-213).

1907

Dingler, a: Grundlinien einer Kritik und exakten Theorie der Wissenschaften, insbesondere der mathematischen

"Auf jeder Stufe der Naturerforschung haben wir einen bestimmten starren Körper. Mit dessen Hilfe können wir in allen Messungen einen gewissen 'Genauigkeitsgrad' erreichen. Dieser Genauigkeitsgrad erlaubt uns den starren Körper wieder zu verbessern und mittels dieses neuen starren Körpers wieder einen höheren Genauigkeitsgrad zu erreichen etc."

Dingler, b: Über die Grundlagen der Euklidischen Geometrie

1911

Dingler: Die Grundlagen der angewandten Geometrie

Behandelt ausführlich das Dreiplattenschleifverfahren für ebene Flächen (nach Besuch eines Aschaffenburger Industriebetriebes). Formuliert ein Prinzip der Exhaustion (von Theorien). Dessen Anwendung auf den starren Körper (wie in (1907a)) liefert die Vermutung, "daß unsere empirische Geometrie gegen eine bestimmte ideale Geometrie hin konvergiert im Verlaufe der Forschung". Anhang I ist Vorläufer der heutigen 'Formentheorie' (s. Lorenzen 1977, 1981a, b).

1920

Dingler: Der starre Körper

Verfeinerung der früheren Überlegungen zu diesem Thema: Diskussion von vier verschiedenen Starrheitsdefinitionen sowie von möglichen Stellungnahmen zu nicht-euklidischen Abweichungen.

1925

Dingler: Über den Zirkel in der empirischen Begründung der Geometrie

1928

Dingler: Das Experiment. Sein Wesen und seine Geschichte

Kapitel II behandelt die "elementaren Formgestalten" (Ebene, deformationsfreier Körper), ihre praktische Herstellung und Kontrolle unter dem Gesichtspunkt der Eindeutigkeit (= eindeutige Realisierung). "Die euklidische Geometrie ist ... der logische Ausdruck für unseren Wunsch ... nach eindeutigen, wiederherstellbaren Elementargestalten."

1933

Dingler: Die Grundlagen der Geometrie

Dinglers Hauptwerk zur Geometrie ("nicht als Erkenntnis, sondern als Tat"), "...gibt zum ersten Male seit Euklid einen Aufbau der Geometrie, in dem dessen Zusammenhang mit dem Realen unmittelbar gegeben ist". Einführung der Ebene durch Ununterscheidbarkeitsforderungen. "In Euklids Axiomen treten dagegen die Begriffe Ebene, Gerade, Streckengleichheit unmittelbar auf. Unsere Grundbegriffe gehören ... völlig der vortheoretischen Sphäre des täglichen Lebens und Handelns an."

1938

Dingler: Die Methode der Physik

Behandelt S.109ff "die geometrischen Realisierungen" als Stufen eines "sich selbst weiter- und höherschraubenden Prozesses".

1952

Dingler: Über die Geschichte und das Wesen des Experimentes

Enthält u.a. Hinweise zu "der geschichtlichen Entstehung der räumlichen Meßinstrumente, der räumlichen Formung überhaupt".

1955

Dingler: Geometrie und Wirklichkeit

Die "technischen Verfahren sind das Grundlegendste und in der Tat Einzige, was wir über die Beziehung zwischen Geometrie und Wirklichkeit wirklich besitzen".

Dingler: Die Ergreifung des Wirklichen

Überlegungen zur Geometrie auf S.131-142, 156-166. Die Ununterscheidbarkeit von 'Stellen' wird als "Symmetrie" bezeichnet, die "der Mensch ... rein aus seinem Vorstellen und Denken heraus" (und keineswegs durch Abstraktion) gewinnt.

1956

Bopp: Starrer Körper und euklidische Geräte

Erklärt "den Fortschritt der Verwirklichung des starren Körpers" durch "Vergleichsverfahren". Formungspraktische "Bedingungen des Gleichseins und Zusammenpassens zweier Körper" werden dazu verwendet, Grundbegriffe wie "Rechter Körper", "Rechter Keil", "Rechte Kante" und "Rechter Winkel" einzuführen.

Sanborn: Das Experiment als schöpferische Tat

"Alle konstanten Formen, mit denen wir zu tun haben, werden unter Zugrundelegung empirischer, von uns herstellbaren Ebenen gewonnen."

1958

Bopp, a: Die Existenz der Ebene

Betont den Vorrang des starren Körpers in der pragmatischen Ordnung der Geometrie und entwickelt vom Standpunkt der Formungspraxis aus Grundsätze für die

Relationen "verträglich" und "lagergleich" zwischen Körpern (z.B.: Sind drei Körper paarweise verträglich, so sind sie auch paarweise lagergleich; sind zwei Körper lagergleich und verträglich, so sind sie Rechte Körper, d.h. sie passen in einem ebenen Flächenstück aufeinander.). Die Verträglichkeit zweier Rechter Körper aus verschiedenen Schleiftripeln "können wir nicht deduktiv" begründen.

Bopp, b: Die Ideen, die der Geometrie zugrunde liegen

"Auch aus noch so scharf bestimmten Grundbegriffen können niemals irgendwelche Grundgesetze logisch abgeleitet werden". "Die euklidischen Gesetze gründen sich auf praktische Erfahrung mit den Grundgeräten."

1961

Lorenzen: Das Begründungsproblem der Geometrie als Wissenschaft der räumlichen Ordnung

Dinglers Konzept der Ununterscheidbarkeit (1933) bzw. Symmetrie (1955) wird als Prinzip der Homogenität gedeutet und formal präzisiert. Entsprechende Prinzipien für den Ebenenbegriff, für 'orthogonal' und 'parallel' werden formuliert (damit läßt sich die Kongruenz und also auch der starre Körper definieren). "Die Geometrie der homogenen Grundformen ist ... die euklidische Geometrie." Sie dient als eine Theorie der "Bedingungen ..., die physikalische Messungen allererst möglich machen" und wird daher "protophysikalisch" genannt.

1962

Lorenzen: Der Erkenntniswert der Mathematik

Auf S.64ff Kurzdarstellung der 'protophysikalischen' Geometrie.

1963

Frey: Zur philosophischen Begründung der Geometrie

Behandelt kurz "Reine Anschauung und Homogenität" auf S.25f im Anschluß an Lorenzen (1961). "Auch im Schulunterricht läßt sich der Begriff der Homogenität behandeln."

1964

Becker, (O.) b: Die Rolle der euklidischen Geometrie in der Protophysik

Behauptet die "Unerzwingbarkeit der euklidischen Geometrie" auch im Rahmen einer (operativen) 'Protophysik'. Weitere Themen sind "die totale Apriorität" und "die anschauliche Evidenz" der euklidischen Geometrie.

Dingler: Aufbau der exakten Fundamentalwissenschaft

2. Teil, Die Geometrie, auf S.153-187. Sorgfältige Behandlung topologischer Begriffe ("Körper", "Körpergrenze", "Trennfläche" etc.) im Ausgang von Alltagssprache und -praxis. Nach "Einführung der Ebene" wird versucht, u.a. Hilberts Axiome der Verknüpfung sowie das Parallelenaxiom herzuleiten.

1965

Lorenzen: Methodisches Denken

Behandelt die Geometrie auf S.49-53. Die Homogenitätsprinzipien "können auch als Axiome einer Theorie betrachtet werden, nämlich dann, wenn man die Tatsache, daß sie Forderungen an Punkte, Linien und Flächen wirklicher Körper sind, unberücksichtigt läßt".

Mittelstaedt: Philosophische Probleme der modernen Physik

Erörtert die operative Grundlegung der Geometrie im Zusammenhang der Theorien von Kant, Helmholtz und Poincaré.

1967

Kamlah (W.)/Lorenzen: Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens

Kap. VI,5: Material-synthetische Wahrheit (Geometrie). "Die Geometrie beruht ... auf vielen praktischen Bedürfnissen, z.B. dem Bedürfnis, Wohnungen oder Festungen zu bauen, allgemeiner dem Bedürfnis, überhaupt etwas herzustellen. Wer ignoriert, daß diese Bedürfnisse auch seine sind, braucht keine Handlungsnormen für den technischen Umgang mit Körpern als sinnvoll anzuerkennen - ... er verliert sich in einer Illusion." - Die Orthogonalität wird (im Unterschied zu Lorenzen (1961)) durch "ein äußeres Homogenitätsprinzip" festgelegt.

Thüring: Die Gravitation und die philosophischen Grundlagen der Physik

Behandelt auf S.36-44 Geometrie als "Die erste und einfachste Messungsbasis", übernimmt dabei Dinglers (1933) Geometrie-Auffassung. "Die sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrien sind demgegenüber nicht-operative Geometrien." "Die Axiome der Euklidischen Geometrie haben sich als Herstellungs-Anweisungen eindeutiger und einfachster deformationsfreier Gestalten erwiesen."

1969

Bopp: Die Entwicklung geometrischer Begriffe aus dem Urbegriff des starren Körpers

"... möchte zeigen, daß die Grundbegriffe der euklidischen Geometrie nichts anderes als ... Idealbegriffe (Episteme) sind, Ideen die wir aus der Uridee des starren Körpers Schritt für Schritt entwickeln können."

Janich, a: Die Protophysik der Zeit

Kap. I "Zur Methode der Physik" enthält zahlreiche Bemerkungen zur 'proto-physikalischen' Geometrie, insbesondere zum Prinzip der Exhaustion, zur Frage der Euklidizität und zum Verfahren der Ideation.

Janich, b: Wie empirisch ist die Physik?

"Was zu leisten ist, besteht ... für die Geometrie in der ideativen Bestimmung aller geometrischen Grundbegriffe sowie in einer Ableitung eines geometrischen Axiomensystems aus dem System der Homogenitätsprinzipien." In Abschnitt II wird diese Aufgabe diskutiert.

Lorenzen/Mittelstraß: Die methodische Philosophie Hugo Dinglers

Über den "operativen Ansatz in der Geometrie" auf S.45-51. Die Aufgabe, "alle Axiome der euklidischen Geometrie ... aus ... Homogenitätsprinzipien logisch abzuleiten, ... ist bis heute noch nicht vollständig gelöst".

Lorenzen: Normative Logic und Ethics

Skizziert den Geometrie-Aufbau (1961) auf S.54-59, verwendet dabei aber eine Definition von 'parallel' mittels 'inzident' bzw. 'orthogonal'.

Steiner, (F.): Über den Aufbau der Geometrie mit Hilfe von Homogenitätsprinzipien

Präsentiert eine sehr eingeschränkte Teillösung der in Janich (1969b) genannten Begründungsaufgabe. Vgl. auch Lorenzen/Mittelstraß (1969).

1970

Büchel: Zur "Protophysik" von Raum und Zeit

Kritisiert 'protophysikalische' Ansprüche vom Standpunkt der Allgemeinen Relativitätstheorie aus und versucht zu zeigen, "daß es auf sogar unendlich viele verschiedene Weisen möglich ist, die Euklidizität der Geometrie zu erzwingen". Bezweifelt ferner die eindeutige Realisierbarkeit des starren Körpers.

1971

Hölling: Realismus und Relativität. Philosophische Beiträge zum Raum-Zeit--Problem

Diskussion der Dinglerschen Physikbegründung S.168-181, insbesondere Kritik der Annahmen über die Realisation geometrischer Formen.

Kanitscheider: Geometrie und Wirklichkeit

Kritisiert S.190-201 den "Apriorismus bei der Anwendung der Geometrie" (Dingler, Lorenzen). "Daß die auf die angegebene Weise technisch realisierten Ideen mit dem optischen Standardmodell der wirklichen Geometrie zusammenfallen, könnte der Fall sein, müßte sich aber erst durch eine empirische Überprüfung herausstellen."

1972

Mainzer: Mathematischer Konstruktivismus

Referiert S.196-204 den Lorenzenschen Aufbau der Geometrie mit der Variante, daß Formen wie Kugel und Ebene nach technischer Realisierung durch eine Abstraktionsregel gewonnen werden.

1973

Janich: Eindeutigkeit, Konsistenz und methodische Ordnung: normative versus deskriptive Wissenschaftstheorie zur Physik

"Mit dem Anspruch auf Eindeutigkeit steht und fällt das protophysikalische Programm."

Jeuck: Mathematik als Handlung. Die Bedeutung der Arbeiten Paul Lorenzens für eine Didaktik der Mathematik

"Analysen zur operativen Behandlung der Geometrie" nach Dingler und Lorenzen in Teil IV, S.159-193.

Lorenzen/Schwemmer: Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie

Behandlung der Geometrie auf S.162-168 wie in Lorenzen (1969). "Es fehlt dazu vor allem noch der Eindeutigkeitsbeweis der Ebene: daß eine Ebene durch 3 ihrer (nicht-kollinearen) Punkte bestimmt ist. Erst diese Eindeutigkeit garantiert, daß Meßgeräte, die die Homogenitätsprinzipien realisieren, zu eindeutigen Meßergebnissen führen."

1974

Mittelstraß: Wider den Dingler-Komplex

Über die operative Begründung der "Geometrie als erste methodisch durchgeführte Realisierung(en) einer konstruktiven Idee von Wissenschaft" auf S.94-96.

1975

Lenk: Bemerkungen zu einer pragmatischen Fundierung der Geometrie. Zu Lorenzens konstruktiver Begründung der euklidischen Geometrie aus homogenen Grundformen.

Lorenzens "Versuch zeigt deutlich die methodische und historische Einbettung der Geometrie als mathematischer Disziplin in die zum großen Teil kulturell geformte Herstellungspraxis".

1976

Böhme: Ist die Protophysik eine Reinterpretation des Kantischen Apriori?

"Das Apriori der Protophysik ist ... sicherlich nur in einem limitativen Sinne konstitutiv für die Gegenstände der Naturwissenschaft."

Düsberg: Protophysik - eine apriorische Theorie physikalischer Messung?

Nach Ansicht des Verf. ist die Frage "eindeutig zu verneinen".

Jäger: Begründung der euklidischen Geometrie mit Homogenitätsprinzipien

Benutzt zahlreiche Homogenitätsprinzipien, die in den Beiträgen der 'Erlanger Schule' nicht in Betracht gezogen werden.

Janich, a: Zur Protophysik des Raumes

Hofft "unter anderem, das protophysikalische Programm bezüglich der Geometrie soweit expliziert zu haben, daß danach auch ein formalistischer Mathematiker die Begründungsaufgabe (die dann immer noch keineswegs trivial ist) lösen kann". Behandelt dann die Ziele der 'Protophysik', vorgeometrisches Vokabular, Ideation, Homogenität, Eindeutigkeits- und Äquivalenzbeweise.

Janich, b: Zur Kritik an der Protophysik

Eingehende (teilweise polemische) Erwiderung auf kritische Beiträge zur Protophysik (abgedruckt in Böhme (Hrsg., 1976)). "Keiner dieser Beiträge setzt sich mit der Intention der Protophysik auseinander, die messende Physik methodisch zu begründen."

Janich, c: Ideation

"Man spricht ... nicht mehr über realisierte Formen, sondern über beabsichtigte Formen, die realiter immer nur unter dem Vorbehalt beseitigter Störungen vorliegen."

Kambartel: Apriorische und empirische Elemente im methodischen Aufbau der Physik

Für die Diskussion in Böhme (Hrsg., 1976) aktualisierte Überarbeitung eines älteren Vortrages (X. Deutscher Kongreß f. Philosophie, 1972).

Kamlah, (A.): Zwei Interpretationen der geometrischen Homogenitätsprinzipien in der Protophysik

Untersucht zunächst "die mathematische Form der Dingler-Lorenzenschen Geometrie". Betrachtet dann zwei Interpretationen der Homogenität. Hauptergebnis: Euklidische Geometrie + Homogenitätsprinzipien (in "physikalischer Interpretation") ist äquivalent zu Euklidische Geometrie + euklidische Invarianz der Naturgesetze. - In "handwerklicher Interpretation" sind die ideativen Normen nicht eindeutig; aber selbst bei physikalischer Interpretation "sind der Eindeutigkeit noch gewisse Grenzen gesetzt, wenn es nicht möglich ist, Störfaktoren auszuschalten, die die Realisation geometrischer Formen beeinträchtigen".

Mainzer, a: Präzisierungen des Konstruktionsbegriffs in Logik und Mathematik

"Die wahren Sätze der Protophysik sind mit den konstruktiven Dialogregeln, arithmetischen und protophysikalischen K.(onstruktions)-Anweisungen verteidigbar."

Mainzer, b: Anschauung und Form im Raum

Auf S.29-42 'Formentheorie' mit der Relation des Passens (vgl. Dingler 1911, Anhang I, sowie Lorenzen 1977).

1977

Fertig: Modelltheorie der Messung

Auf S.162-198 Analysen zur 'Protophysik'. Vertritt u.a. die Ansicht, "daß Lorenzen ebenso wie Dingler zur Begründung der Geometrie ... von einem prinzipiell falschen Ansatz ausging".

Lorenzen: Eine konstruktive Theorie der Formen räumlicher Figuren

Kurze Darstellung des formentheoretischen Ansatzes (ohne Homogenitätsprinzipien). Eine Schnittfläche eines Körpers wird eben genannt, wenn der Körper zu einem Abdruck von sich selbst passungsgleich ist. Als "Janichscher Eindeutigkeitssatz" wird die Behauptung bezeichnet: Zwei ebene Körper passen zueinander. "Die nichteuklidischen Geometrien sind keine Konkurrenz zu der hier behandelten Formentheorie, weil 'Formen' nur in der euklidischen Geometrie vorkommen."

1978

Bender: Umwelterschließung im Geometrieunterricht durch operative Begriffsbildung

Behandelt die Aufgabe des Geometrie-Unterrichts, ein didaktisches Prinzip der operativen Begriffsbildung (s.a. Schreiber 1978c) und Lernziele für einen umwelterschließenden Geometrie-Unterricht.

Bernays: Bemerkungen zu Lorenzen's Stellungnahme in der Philosophie der Mathematik

"... selbst wenn ... Homogenität als Leitgedanke genommen wird, so ist damit keineswegs schon eine bestimmte Axiomatisierung der Geometrie festgelegt".

Fertig: Wie objektiv ist die Physik? - Zur Diskussion um die Protophysik

Hucklenbroich: Theorie des Erkenntnisfortschritts

In Kapitel 11 ausführliche Analysen "zum methodologischen Status der Protophysik in der Konstruktiven Wissenschaftstheorie P. Lorenzens". Der Verf. kommt in seiner Kritik von Janich (1976a) zu dem Ergebnis, "daß die Behauptung der Eindeutigkeit der Homogenitätsprinzpien nicht auf so festen Füßen steht, wie es die Protophysiker annehmen".

Inhetveen, a: Philosophische Grundprobleme der Mathematik

Zur Geometrie auf S.142-146.

Inhetveen, b: Die Dinge des dritten Systems ...

Gemeint sind Ebenen (in Hilberts "Grundlagen der Geometrie") und ihre Einführung im Rahmen des formentheoretischen Ansatzes.

Kamlah, (A.): Zur Diskussion um die Protophysik

Laugwitz: Zur Begründung der Geometrie

"Soweit ich sehe, wird man Lorenzen darin folgen müssen, daß Homogenitätsprinzipien der einzige bisher bekannte Vorschlag sind, die Geometrie zu begründen."

Lorenzen, b: Die drei mathematischen Grunddisziplinen der Physik

Zur Geometrie auf S.79-87. "Als einen Grundbegriff der Protogeometrie schlage ich den Körper vor, an dem ein Oberflächenstück ausgezeichnet ist, so daß in diesem Oberflächenstück noch ein Berührungselement markiert ist."

Lorenzen, c: Eine Revision der Einsteinschen Revision

"... die Einführung der Lorentz-Metrik wird erst sinnvoll, nachdem vorher Geometrie und Kinematik als apriorische Teile einer Protophysik begründet ... worden sind."

Maier: Aufbau der Euklidischen Geometrie mit Homogenitätsprinzipien

Schreiber, c: Die operative Genese der Geometrie nach Hugo Dingler und ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht

Behandelt nach einer Kritik des Dinglerschen und 'protophysikalischen' Programms die Grundlagen eines Prinzips der operativen Begriffsbildung in der Geometrie (s.a. Bender 1978).

Torretti: Hugo Dingler's Philosophy of Geometry

Eingehende Untersuchung des Dinglerschen Programms zum Aufbau der Geometrie sowie dessen Nachfolge (intensive Quellenauswertung). "Dingler's foundations of geometry amount in the end ... to just another, not remarkably neat and perhaps even insufficient axiomatization of Euclid's theory."

1979

Düsberg: Zur Messung von Raum und Zeit. Eine Kritik der sogenannten Protophysik

Behandelt auf S.78-99 Längenmessung und Geometrie, insbesondere die Korrektion starrer Maßstäbe mit Hilfe von Thermometern.

Kamlah, (A.): Zur Eindeutigkeit von Zeit- und Längenmessungen

Mit der nach Kamlah (1976) "verbleibenden Mehrdeutigkeit wollen wir uns hier befassen".

Katthage: Die Eindeutigkeit des Dreiplattenverfahrens

"Im Einzelnen konnte gezeigt werden, daß das von der Protophysik beschriebene Verfahren zur Herstellung ebener Flächen - das Dreiplattenverfahren - zu homogenen Flächen führt, und daß dieses Verfahren eindeutig ist, wenn die zur Herstellung der Ebenen verwendeten Körper ihre Gestalt relativ zueinander nicht verändern." "Das Problem der Eindeutigkeit ist damit als Frage nach Kriterien für die Auswahl einer von mehreren Klassen relativ starrer Körper der Physik zugewiesen."

Inhetveen, a: Über die Konstitution geometrischer Gegenstände

"Die Frage, ob den Homogenitätsprinzipien ... eine konstitutive Rolle für die Geometrie zukommt, muß ... neu, und zwar negativ, beantwortet werden. Die Homogenitätsprinzipien sind ... zu beweisbaren Theoremen geworden."

Inhetveen, b: Gedanken zu einer Didaktik der konstruktiven Geometrie

Inhetveen, c: Geometrien und Modelle

Janich: Was heißt "eine Geometrie operativ begründen"?

Lorenzen: Wissenschaftstheorie und Nelsons Erkenntnistheorie am Beispiel der Geometrie und Ethik

Bemerkung in der Diskussion (zum Vortrag): "Die Homogenitätsprinzipien meiner früheren Arbeiten werden in der Formentheorie zu beweisbaren Sätzen."

1980

Bender/Schreiber: The Principle of Operative Concept Formation in Geometry Teaching

Janich: Die Protophysik der Zeit (2. Auflage)

"Nichteuklidische Geometrien können bei Dingler keine empirische Relevanz gewinnen, in einer auf Protophysik gegründeten Physik dagegen schon."

Lorenzen: Geometrie als meßtheoretisches Apriori der Physik

Schreiber: Idealisierungsprozesse - ihr logisches Verständnis und ihre didaktische Funktion

Die genannten Aspekte von Idealisierung werden auf S.50/51 und S.56/57 für die Geometrie konkretisiert.

1981

Inhetveen: Die Rolle der Eindeutigkeit in der Philosophie Hugo Dinglers

"Der protogeometrische Eindeutigkeitssatz ('Je zwei Ebenenstücke sind (bis auf Überlappungen) kongruent.') wird im Hinblick auf die zu erstellende Theorie nur deshalb bewiesen, weil er gebraucht wird, um sicherzustellen, daß die Grundkonstruktionen der formentheoretischen Geometrie, also die Konstruktionen von Verbindungsgerade, Orthogonale und Winkelhalbierenden, eindeutig ausführbar sind."

Katthage: Sind die Normen der Protophysik des Raumes eindeutig?

Kurzfassung von Katthage (1979).

Lorenzen, a: Die Definition der Ebene und das Thalesviereck

Lorenzen, b: Neue Grundlagen der Geometrie

Definiert mit Bezug auf Dingler (1911) Flächenstücke als eben, wenn sie "in jeder Richtung klappsymmetrisch" sind. Dabei heißt ein Körper K klappsymmetrisch, wenn sich ein kongruenter Körper K' (d.h. K und K' passen zu einem dritten Körper) mit K durch Umklappen zur Passung bringen läßt. Auf der Grundlage des für diese Ebenen formulierten "Dingler-Janichschen Eindeutigkeitssatzes" sowie eines "Formprinzips" (wonach die konstruierbaren "Formen nicht von der Wahl der Basispunkte abhängen") ergibt sich die euklidische Geometrie.

1983

Inhetveen: Konstruktive Geometrie

Bearbeitet ausführlich die neuen Grundlagen der Geometrie nach Lorenzen (1981b). Diese "formentheoretische Begründung" kommt "ganz ohne Homogenitätsprinzipien" aus und läßt "die üblichen Kongruenzaxiome im Interesse einer zirkelfreien Begründung der Längenmessung nicht als unbewiesenen Anfang" zu. "Der neuen Beweislage ... wird durch die Einführung des sog. Formprinzips als einem neuen Beweismittel Rechnung getragen."

III. Literaturverzeichnis

Aebli, H.: Psychologische Didaktik. Franz. Neuchatel 1951, dt. Stuttgart 1963, 4. Aufl. 1970.

Aebli, H.: Von Piagets Entwicklungspsychologie zur Theorie der kognitiven Sozialisation. In: G. Steiner (Hrsg., 1978), S.604-627.

Arens, H.: Farbmetrik. Berlin 1950, 2. Aufl. 1957.

Ascheberg, R./Herrgott, G./Krausser, P.: Zur konstruktivistischen Protophysik der Zeit. Eine immanente Kritik. In: Z. f. allg. Wissenschaftstheorie 9 (1978), S.112-133.

Aschkinuse, W.G.: Vielecke und Vielfache. In: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd.4: Geometrie. Russ. Moskau 1963, dt. Berlin 1969, S.393-458.

Atiyah, M.F.: Trends in Pure Mathematics. In: Proc. of the 3rd Intern. Congress on Mathematical Education, Karlsruhe 1976, S.61-74.

Bauersfeld, H.: Die Grundlegung und Vorbereitung geometrischen Denkens in der Grundschule. In: H. Ruprecht (Hrsg.): Erziehung zum produktiven Denken. Freiburg 1967, S.40-54.

Bazille, P.: Wankel II: 400 PS aus dem Schuhkarton. In: Auto-Zeitung 1982/17, S.60-63.

Becker, G.: Das Exemplarische im mathematischen Unterricht. Diss. Aachen, 1971.

Becker, O.: Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen. In: Jahrb. f. Philos. u. Phänomenolog. Forschung 6 (1923), S.385-560.

Becker, O.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. Freiburg/München 1964a.

Becker, O.: Die Rolle der euklidischen Geometrie in der Protophysik. In: Philosophia Naturalis 8 (1964b), S.49-64.

Bender, P.: Eine endliche Präsentation der Siegelschen Modulgruppe zweiten Grades. Diss. Mainz 1976.

Bender, P.: Umwelterschließung im Geometrieunterricht durch operative Begriffsbildung. In: Der Mathematikunterricht 24/5 (1978), S.25-87.

Bender, P.: Abbildungsgeometrie in der didaktischen Diskussion. In: Zentralbl. f. Didaktik d. Mathematik 14 (1982), S.9-24.

Bender, P.: Zentrale Ideen der Geometrie für den Unterricht der Sekundarstufe I. In: Beiträge zum Mathematikunterricht, Bad Salzdetfurth 1983, S.8-17.

Bender, P./Schreiber, A.: The Principle of Operative Concept Formation in Geometry Teaching. In: Educational Studies in Mathematics 11 (1980), S.59-90.

Bergold, H.: Wie gerecht sind unsere Verhältniswahlen? In: Didaktik d. Mathematik 7 (1979), S.266-278.

Bernays, P.: Die Mannigfaltigkeit der Direktiven für die Gestaltung geometrischer Axiomensysteme. In: Henkin/Suppes/Tarski (Hrsg., 1959), S.1-15.

Bernays, P.: Die schematische Korrespondenz und die idealisierten Strukturen. In: Dialectica 24 (1970), S.53-66.

Bernays, P.: Bemerkungen zu Lorenzen's Stellungnahme in der Philosophie der Mathematik. In: K. Lorenz (Hrsg., 1978), S.3-16.

Bischof, N.: Psychophysik der Raumwahrnehmung. In: Handbuch der Psychologie, Bd.I/1, S.307-408. Göttingen 1966.

Böhme, G.: Protophysik der Zeit - eine nicht-empirische Theorie der Zeitmessung? In: Philos. Rundschau 20 (1973), S.94-111. Wiederabgedruckt in G. Böhme (Hrsg., 1976), S.276-299.

Böhme, G.: Ist die Protophysik eine Reinterpretation des Kantischen Apriori? In: G. Böhme (Hrsg., 1976), S.219-234.

Böhme, G.(Hrsg.): Protophysik. Für und wider eine konstruktive Wissenschaftstheorie der Physik. Frankfurt a.M. 1976.

Boltjanski, W.G. / Jaglom, I.M.: Geometrische Extremwertaufgaben. In: Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd.5: Geometrie. Russ. Moskau 1966, dt. Berlin 1971. S.261-335.

Bonnesen, T./Fenchel, W.: Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934. Berichtigter Reprint Berlin/Heidelberg/New York 1974.

Bopp, E.: Starrer Körper und euklidische Geräte. In: Philosophia Naturalis 3 (1956), S.383-391.

Bopp, E.: Die Existenz der Ebene. In: Philosophia Naturalis 5 (1958a), S.55-65.

Bopp, E.: Die Ideen, die der Geometrie zugrunde liegen. In: Philosophia Naturalis 5 (1958b), S.481-497.

Bopp, E.: Die Entwicklung geometrischer Begriffe aus dem Urbegriff des starren Körpers. In: Der Mathematikunterricht 15/1 (1969), S.29-43.

Brauner, H./Kickinger, W.: Gebaute Geometrie. In: Der Mathematikunterricht 28/2 (1982), S.5-28.

Bruner, J.S.: Der Prozeß der Erziehung. Amer. Cambridge, Mass., 1960, dt. Berlin 1970.

Bruner, J.S.: Entwurf einer Unterrichtstheorie. Amer. Cambridge, Mass., 1967, dt. Berlin 1974.

Büchel, W.: Zur "Protophysik" von Raum und Zeit. In: Philosophia Naturalis 12 (1970), S.261-281. Wiederabgedruckt in G. Böhme (Hrsg., 1976), S.235-264.

Buth, M.: Zum Verhältnis von Protophysik und spezieller Relativitätstheorie. In: Philosophia Naturalis 20 (1983), S.213-223.

Cadwell, I.H.: Topics in Recreational Mathematics. Cambridge 1966, Neudruck 1970.

Carnap, R.: Der Raum. Ein Beitrag zur Wissenschaftslehre. Kant-Studien-Ergänzungsheft Nr.56, Berlin 1922.

Carnap, R.: Physikalische Begriffsbildung. Karlsruhe 1926.
Carnap, R.: Philosophical Foundations of Physics. New York 1966. Dt. von W. Hoering: Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaft. 2., verb. Aufl. München 1974.
Conant, J.B.: On Understanding Science. An Historical Approach. Oxford 1947.
Connelly, R.: A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra. In: Publ. Math. I.H.E.S. 47 (1978), S.333-338.

Dahlke, E.: Zum Stellenwert didaktischer Prinzipien im Mathematikunterricht. In: Bauersfeld, H.,u.a. (Hrsg.): Forschung in der Mathematikdidaktik (IDM-Reihe Bd.3), Köln 1981, S.125-135.
Dingler, H.: Grundlinien einer Kritik und exakten Theorie der Wissenschaften, insbesondere der mathematischen. München 1907a.
Dingler, H.: Über die Grundlagen der Euklidischen Geometrie. Mitteilungen des Naturwissenschaftlichen Vereins. Aschaffenburg 1907b.
Dingler, H.: Die Grundlagen der angewandten Geometrie. Eine Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung in den exakten Wissenschaften. Leipzig 1911.
Dingler, H.: Der starre Körper. In: Physik. Zeitschrift 21 (1920), S.487-492.
Dingler, H.: Über den Zirkel in der empirischen Begründung der Geometrie. In: Kantstudien 30 (1925), S.310-330.
Dingler, H.: Das Experiment. Sein Wesen und seine Geschichte. München 1928.
Dingler, H.: Die Grundlagen der Geometrie. Stuttgart 1933.
Dingler, H.: Die Methode der Physik. München 1938.
Dingler, H.: Über die Geschichte und das Wesen des Experimentes. München 1952.
Dingler, H.: Geometrie und Wirklichkeit. In: Dialectica 9 (1955), S.341-362, und 10 (1956), S.80-93.
Dingler, H.: Die Ergreifung des Wirklichen. München 1955 (postum). 2., gekürzte Aufl. (mit einer Einleitung von K. Lorenz und J. Mittelstraß) Frankfurt a.M. 1969.
Dingler, H.: Aufbau der exakten Fundamentalwissenschaft. Herausgeg. von P. Lorenzen. München 1964.
Drenckhahn, F.: Zur Didaktik der Mathematik und ihrer Wissenschaftsmethodik. In: Math.-Naturwiss. Unterricht 5 (1952/53), S.205-211.
Düsberg, K.J.: Protophysik - eine apriorische Theorie physikalischer Messung? In: G. Böhme (Hrsg., 1976), S.265-275.
Düsberg, K.J.: Zur Messung von Raum und Zeit. Eine Kritik der sogenannten Protophysik. Diss. Düsseldorf 1979, Königstein/Ts. 1980.
Duncker, K.: Zur Psychologie des produktiven Denkens. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1935, Neudruck 1963.

Efimow, N.W.: Über die Grundlagen der Geometrie. Höhere Geometrie I. Russ. Moskau 1953, dt. Braunschweig/Basel/Berlin 1970.

Engel, A.: Geometrical Activities for the Upper Elementary School. In: Educational Studies in Mathematics 3 (1971), S.353-394.

Engel, A.: The Probabilistic Abacus, In: Educational Studies in Mathematics 6 (1975), S.1-22.

Essler, W.K.: Wissenschaftstheorie II: Theorie und Erfahrung. Freiburg/München 1971.

Essler, W.K.: Analytische Philosophie I: Methodenlehre, Sprachphilosophie, Ontologie, Erkenntnistheorie. Stuttgart 1972.

Euklides: Die Elemente. Nach Heibergs Text aus d. Griechischen übers. u. herausgeg. von C. Thaer. Leipzig 1933-37 (3 Bde.)

Fejes Tóth, L.: Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.

Fejes Tóth, L.: What the Bees Know and What They Do Not Know. In: Bull. Amer. Mat. Soc. 70 (1964), S.468-481.

Fejes Tóth, L.: Reguläre Figuren. Budapest 1965.

Fertig, H.: Modelltheorie der Messung. Berlin 1977.

Fertig, H.: Wie objektiv ist die Physik? - Zur Diskussion um die Protophysik. In: Philosophia Naturalis 17/1 (1978), S.31-55.

Fettweis, E.: Anleitung zum Unterricht in der Raumlehre. 3. Aufl. Paderborn 1951.

Feyerabend, P.K.: Die Wissenschaftstheorie - eine bisher unerforschte Form des Irrsinns? In: Hübner/Menne (Hrsg.): Natur und Geschichte. - X. Deutscher Kongreß für Philosophie (Kiel 1972), Hamburg 1973, S.88-124.

Freudenthal, H.: Neuere Fassung des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems. In: Math. Z. 63 (1956), S.374-405.

Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Bd. 1 u. 2. Stuttgart 1973.

Freudenthal, H.: Didaktische Phänomenologie mathematischer Grundbegriffe. In: Der Mathematikunterricht 23/3 (1977), S.46-73.

Freudenthal, H.: Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht. München/Wien 1978.

Frey, G.: Zur philosophischen Begründung der Geometrie. In: Der Mathematikunterricht 9/2 (1963), S.18-30.

Fricke, H. / Besuden, H.: Mathematik - Elemente einer Didaktik und Methodik. Stuttgart 1970.

Gardner, M.: Das gespiegelte Universum. Amer. New York 1964, dt. Braunschweig 1967.

Gardner, M.: Logik unterm Galgen. Amer. New York 1969, dt. Braunschweig 1971.

Gardner, M.: Mathematischer Karneval. Amer. New York 1975, dt. 5. Aufl. Frankfurt a.M. 1978.

Glatfeld, M./Schröder, E.C.: Über Induktion beim Mathematiklernen. In: M. Glatfeld (Hrsg.): Mathematik Lernen. Probleme und Möglichkeiten. Braunschweig 1977, S.140-175.

Gödel, K.: Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. In: Monatsh. Math. Phys. 37 (1930), S.349-360.

Gööck, R.: Selbermachen. München 1971, 5. Aufl. 1975.

Gonseth, F.: Les mathématiques et la réalité. Essai sur la méthode axiomatique. Paris 1936.

Grieder, A.: Protophysik der Zeit und Relativitätstheorie. In: Dialectica 30 (1976), S.145-159.

Grünbaum, A.: Conventionalism in geometry. In: Henkin/Suppes/Tarski (Hrsg., 1959), S.204-222.

Hajos, G.: Einführung in die Geometrie. Ungar. Budapest 1966, dt. Leipzig 1970.

Halmos, P.R.: Does Mathematics Have Elements? In: The Mathematical Intelligencer 3 (1981), S.147-153.

Hauser, G.: Geometrie und Philosophie. Eine Einführung in die Grundlagen der Geometrie für gebildete Laien. 2. Aufl. Luzern 1946.

Helmholtz, H.v.: Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen. In: Nachr. von der Königl. Ges. d. Wiss. in der Georg-August-Universität aus d. Jahre 1868, Nr.9, S.193-221. Wiederabgedruckt in H.v. Helmholtz: Über Geometrie. Darmstadt 1968.

Helmholtz, H.v.: Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome, Vortrag im Heidelberger Dozentenverein (1870). In: Vorträge u. Reden Bd. II, Braunschweig 1884, S.1-31. Wiederabgedruckt in H.v. Helmholtz: Über Geometrie. Darmstadt 1968.

Henkin, L./Suppes, P./Tarski, A. (Hrsg.): The Axiomatic Method, with special Reference to Geometry and Physics (Proc. of an Intern. Symposion, Berkeley 1957). Amsterdam 1959.

Hentig, H.v.: Allgemeine Lernziele der Gesamtschule. In: Lernziele der Gesamtschule. Deutscher Bildungsrat - Gutachten und Studien der Bildungskommission 12. Stuttgart 1969.

Hilbert, D.: Grundlagen der Geometrie. Göttingen 1899, 10. Aufl. Stuttgart 1968.

Hilbert, D./Cohn-Vossen, S.: Anschauliche Geometrie. Berlin 1932. Nachdruck Darmstadt 1973.

Hjelmslev, J.: Die Geometrie der Wirklichkeit. In: Acta Math. 40 (1916), S.35-66.

Hölder, O.: Die mathematische Methode. Berlin 1924.

Hölling, J.: Realismus und Relativität. Philosophische Beiträge zum Raum-Zeit-Problem. München 1971.

Holland, G.: Strategien zur Bildung geometrischer Begriffe. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1975. Hannover 1975, S.58-68.

Holzkamp, K.: Wissenschaft als Handlung. Versuch einer neuen Grundlegung der Wissenschaftslehre. Berlin 1968.

Hucklenbroich, P.: Theorie des Erkenntnisfortschritts. Zum Verhältnis von Erfahrung und Methoden in den Naturwissenschaften. Meisenheim am Glan 1978.

Hund, F.: Grundbegriffe der Physik. Mannheim 1969.

Husserl, E.: Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie. Herausgeg. von W. Biemel. Den Haag 1954.

Inhetveen, R.: Philosophische Grundprobleme der Mathematik. In: Studienprogramm Erziehungswissenschaft. München/Wien/Baltimore 1978a, S.139-154.

Inhetveen, R.: Die Dinge des dritten Systems .... In: K. Lorenz (Hrsg., 1978b), S.266-277.

Inhetveen, R.: Über die Konstitution geometrischer Gegenstände. In: Materialien XIII: Zur Begründung physikalischer Geo- und Chronometrien. Hrsg. von W. Diederich, Schwerpunkt Mathematisierung, Univ. Bielefeld, 1979a, S.42-58.

Inhetveen, R.: Geometrien und Modelle. In: Abstracts, 6th Intern. Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, Section 8. Hannover 1979b, S.66-70.

Inhetveen, R.: Gedanken zu einer Didaktik der konstruktiven Geometrie. In: M. Ewers (Hrsg.): Wissenschaftstheorie und Naturwissenschaftsdidaktik. Bad Salzdetfurth 1979c, S.253-266.

Inhetveen, R.: Die Rolle der Eindeutigkeit in der Philosophie Hugo Dinglers. Vortrag auf dem Dingler-Kolloquium, Marburg 1981.

Inhetveen, R.: Konstruktive Geometrie. Eine formentheoretische Begründung der euklidischen Geometrie. Mannheim/Wien/Zürich 1983.

Jäger, M.: Begründung der euklidischen Geometrie mit Homogenitätsprinzipien. Diplom-Arbeit Gießen 1976.

Janich, P.: Die Protophysik der Zeit. Mannheim 1969a, 2., überarbeitete Aufl., Frankfurt a.M. 1980.

Janich, P.: Wie empirisch ist die Physik? In: Philosophia Naturalis 11 (1969b), S.291-303.

Janich, P.: Eindeutigkeit, Konsistenz und methodische Ordnung: normative versus deskriptive Wissenschaftstheorie zur Physik. In: Kambartel/Mittelstraß (Hrsg., 1973), S.131-158.

Janich, P.: Zur Protophysik des Raumes. In: G. Böhme (Hrsg., 1976a), S.83-130.

Janich, P.: Zur Kritik an der Protophysik. In: G. Böhme (Hrsg., 1976b), S.300-350.

Janich, P.: Ideation. In: Historisches Wörterbuch d. Philosophie, Bd.4. Basel 1976c, S.49-52.

Janich, P.: Das Mass der Masse. In: K. Lorenz (Hrsg., 1978), S.340-350.

Janich, P.: Was heißt "eine Geometrie operativ begründen"? In: Materialien XIII: Zur Begründung physikalischer Geo- und Chronometrien. Herausgeg. von W. Diederich, Schwerpunkt Mathematisierung, Univ. Bielefeld, 1979, S.59-77.

Janich, P.: Hugo Dingler - die Protophysik und die spezielle Relativitätstheorie. Vortrag auf dem Dingler-Kolloquium, Marburg 1981.

Jeuck, R.: Mathematik als Handlung. Die Bedeutung der Arbeiten Paul Lorenzens für eine Didaktik der Mathematik. Diss. PH Ruhr, 1973.

Kambartel, F.: Apriorische und empirische Elemente im methodischen Aufbau der Physik. In: G. Böhme (Hrsg., 1976), S.351-371.

Kambartel, F./Mittelstraß, J. (Hrsg.): Zum normativen Fundament der Wissenschaft. Frankfurt a.M. 1973.

Kamlah, A.: Zwei Interpretationen der geometrischen Homogenitätsprinzipien in der Protophysik. In: G. Böhme (Hrsg., 1976), S.169-218.

Kamlah, A.: Zur Diskussion um die Protophysik. In: K. Lorenz (Hrsg., 1978), S.311-339.

Kamlah, A.: Zur Eindeutigkeit von Zeit- und Längenmessungen. In: Materialien XIII: Zur Begründung physikalischer Geo- und Chronometrien. Herausgeg. von W. Diederich, Schwerpunkt Mathematisierung, Univ. Bielefeld, 1979, S.78-114.

Kamlah, W./Lorenzen, P.: Logische Propädeutik. Vorschule des vernünftigen Redens. Mannheim 1967.

Kanitscheider, B.: Geometrie und Wirklichkeit. Berlin 1971.

Kant, I.: Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft. Riga 1786.

Karmarsch, K.: Handbuch der mechanischen Technologie. Herausgeg. von Ernst Hartig, bearb. von Hermann Fischer, Bd.1, 6. Aufl., Leipzig/Berlin 1888.

Kasper, H./Schürba, W./Lorenz, H.: Die Klotoide als Trassierungselement. Bonn 1954, 5. Aufl. 1968.

Katthage, K.-H.: Die Eindeutigkeit des Dreiplattenverfahrens. Ein Beitrag zur Diskussion des Eindeutigkeitsproblems in der Protophysik des Raumes. Diss. Köln 1979.

Katthage, K.-H.: Sind die Normen der Protophysik des Raumes eindeutig? In: J. Pfarr (Hrsg., 1981), S.55-96.

Kempinsky, H.: Lebensvolle Raumlehre. Anleitung zu einem wesenhaften Raumkundeunterricht. Leipzig 1920, 10., verm. u. verb. Aufl. Bonn/Brannenburg (Obb.) 1952.

Klein, F.: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt, Bd.I, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1924.

Klemm, F.: Technik. Eine Geschichte ihrer Probleme. München 1954.

Kley, E.: Zum Bedeutungsaspekt im Sachunterricht. In: E. Kley: Sache und Sinn. Studien zur Didaktik der Volksschule. Braunschweig 1963a, S.33-60.

Kley, E.: Unterricht über technische Gegenstände und Vorgänge. In: H. Roth/A. Blumenthal (Hrsg.): Schule und Arbeitswelt. Hannover 1963b, S.21-38.

Klüver, J.: Operationalismus. Kritik und Geschichte einer Philosophie der exakten Wissenschaften. Stuttgart/Bad Cannstatt 1971.

Kordemski, B.A.: Köpfchen, Köpfchen. Russ. Moskau 1959, dt. Leipzig 1965.

Krainer, K.: Umwelterschließung im Geometrieunterricht. Staatsarbeit Klagenfurt 1982.

Krampf, W. (Hrsg.): Hugo Dingler: Gedenkbuch zum 75. Geburtstag. München 1956.

Kretzschmar, B.: Nach der Wahl: Mathematik entscheidet, wer regiert. In: Bild der Wissenschaft 12/5 (1975), S.64-68.

Kuhn, T.S.: Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen. Amer. Chicago 1962, dt. Frankfurt a.M. 1973.

Kyburg, H.E.,Jr.: Philosophy of Science: A Formal Approach. New York/London 1968.

Laugwitz, D.: Zur Begründung der Geometrie. In: Ku. Lorenz (Hrsg., 1978), S.247-253.

Lebesgue, H.: Measure and the Integral. Herausgeg. mit einem biografischen Essay von K.O. May. San Francisco/London/Amsterdam 1966.

Leibniz, G.W.: Hauptschriften zur Grundlegung der Philosophie, Bd.I. Herausgeg. von E. Cassirer. Hamburg 1904.

Lenk, H.: Bemerkungen zu einer pragmatischen Fundierung der Geometrie. Zu Lorenzens konstruktiver Begründung der euklidischen Geometrie aus homogenen Grundformen. In: H. Lenk: Pragmatische Philosophie. Hamburg 1975, S.281-292. Abdruck auch in K. Lorenz (Hrsg., 1978), S.254-265.

Lévi-Strauss, C.: Der Ursprung der Tischsitten. Mythologica III. Frankfurt a.M. 1973.

Lie, S.: Über den Einfluß der Geometrie auf die Entwicklung der Mathematik (Antrittsvorlesung, geh. am 29. Mai 1886 in Leipzig). In: S. Lie: Gesammelte Abhandlungen, Bd.7. Leipzig/Oslo 1960, S.467-476.

Lietzmann, W.: Stoff und Methode des Raumlehreunterrichts in Deutschland. Abh. über den math. Unterricht in Deutschland, veranlaßt durch die IMUK, herausgeg. von F. Klein. Leipzig und Berlin: 1912.

Lietzmann, W.: Experimentelle Geometrie. Stuttgart 1959.

Lorenz, Ko.: Gestaltwahrnehmung als Quelle wissenschaftlicher Erkenntnis. In: Z. f. experimentelle u. angew. Psychologie 4 (1959). Wiederabgedruckt in K. Lorenz: Vom Weltbild des Verhaltensforschers. München 1968, S.97-147.

Lorenz, Ku. (Hrsg.): Konstruktionen versus Positionen. Beiträge zur Diskussion um die Konstruktive Wissenschaftstheorie, Bd.1 (Spezielle Wissenschaftstheorie). Berlin/New York 1978.

Lorenz, Ku./Mittelstraß, J.: Die methodische Philosophie Hugo Dinglers. Einleitung zu H. Dingler (1955/1969), S.7-55.

Lorenzen, P.: Einführung in die operative Logik und Mathematik. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1955.

Lorenzen, P.: Das Begründungsproblem der Geometrie als Wissenschaft der räumlichen Ordnung. In: Philosophia Naturalis 6 (1961), S.415-431. Wiederabgedruckt in P. Lorenzen (1968), S.120-141.

Lorenzen, P.: Der Erkenntniswert der Mathematik. In: Der Mathematikunterricht 8/2 (1962), S.54-66.

Lorenzen, P.: Methodisches Denken. In: Ratio 7 (1965), S.1-23. Wiederabgedruckt in P. Lorenzen (1968), S.24-59.

Lorenzen, P.: Methodisches Denken. Frankfurt a.M. 1968.

Lorenzen, P.: Normative Logic and Ethics. Mannheim 1969.

Lorenzen, P.: Regeln vernünftigen Argumentierens. In: Aspekte 3 (1970), H.1-6, verb. Neudruck in P. Lorenzen (1978a), S.4-57.

Lorenzen, P.: Eine konstruktive Theorie der Formen räumlicher Figuren. In: Zentralbl. f. Didaktik d. Mathematik 9 (1977), S.95-99.

Lorenzen, P.: Theorie der technischen und politischen Vernunft. Stuttgart 1978a.

Lorenzen, P.: Die drei mathematischen Grunddisziplinen der Physik. In: P. Lorenzen (1978a), S.68-92 (1978b).

Lorenzen, P.: Eine Revision der Einsteinschen Revision. In: P. Lorenzen (1978a), S.93-103 (1978c).

Lorenzen, P.: Wissenschaftstheorie und Nelsons Erkenntnistheorie am Beispiel der Geometrie und Ethik. In: P. Schröder (Hrsg., 1979).

Lorenzen, P.: Geometrie als meßtheoretisches Apriori der Physik. In: Physik und Didaktik 8/4 (1980), S.291-299. Erw. Fassung in: O. Schwemmer (Hrsg.): Vernunft, Handlung und Erfahrung. Über die Grundlagen und Ziele der Wissenschaften. München 1981, S.49-63.

Lorenzen, P.: Die Definition der Ebene und das Thalesviereck. Vortrag auf dem Dingler-Kolloquium, Marburg 1981a.

Lorenzen, P.: Neue Grundlagen der Geometrie. Manuskript, April 1981b.

Lorenzen, P./Schwemmer, O.: Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie. Mannheim 1973.

Mach, E.: Zur Psychologie und natürlichen Entwicklung der Geometrie. In: The Monist, 1902. Wiederabgedruckt in E. Mach (1926), S.353-388.

Mach, E.: Erkenntnis und Irrtum. Skizzen zur Psychologie der Forschung. Leipzig 1905, 5. Aufl. 1926.

Maier, E.: Aufbau der Euklidischen Geometrie mit Homogenitätsprinzipien. Diplom-Arbeit Karlsruhe 1978.

Mainzer, K.: Mathematischer Konstruktivismus. Kants Begründung und gegenwärtige Präzisierungen der Grundlagenforschung, Diss. Münster 1972/73.

Mainzer, K.: Präzisierungen des Konstruktions-Begriffs in Logik und Mathematik. In: Historisches Wörterbuch d. Philosophie, Bd.4. Basel 1976a, S.1015-1019.

Mainzer, K.: Anschauung und Form im Raum. Philos. Sem. d. Westf. Wilhelms-Univ., Münster 1976b.

Mainzer, K.: Geschichte der Geometrie. Mannheim/Wien/Zürich 1980.

Martin, P./Schmidt, O.: Raumlehre. Nach Formengemeinschaften bearbeitet. Ausg. A: 1. Heft, 3. Aufl. 1896. 2. Heft, 3. Aufl. 1897. 3. Heft, 2. Aufl. Ausg. B (vereinfachte Ausgabe), 3. Heft, o.J. (1903). Berlin.

May, E.: Über das Prinzip der pragmatischen Ordnung und seine generelle philosophische Bedeutung. In: W. Krampf (Hrsg., 1956), S.131-148.

Menninger, K.: Mathematik in deiner Welt. Göttingen 1954, 2. Aufl. 1958.

Menninger, K.: Mathematik und Kunst. Göttingen 1959.

Menninger, K.: Zwischen Raum und Zahl. Frankfurt a.M. 1960.

Merleau-Ponty, M.: Phänomenologie der Wahrnehmung. Franz. Paris 1945, dt. Berlin 1966.

Meschkowski, H.: Wandlungen des mathematischen Denkens. Eine Einführung in die Grundlagenprobleme der Mathematik. 3. Aufl. Braunschweig 1964.

Meschkowski, H.: Mathematik als Bildungsgrundlage. Braunschweig 1965.

Meschkowski, H.: Richtigkeit und Wahrheit in der Mathematik. Zürich 1976.

Meyer, K.: Algebra und Geometrie. Frankfurt a.M. 1980.

Mischel, Th.: Das Äquilibrationsmodell von Piaget als Motivationstheorie. In: G. Steiner (Hrsg., 1978), S.671-690.

Mittelstaedt, P.: Philosophische Probleme der modernen Physik. 2. Aufl. Mannheim 1965, 3. Auflage 1968.

Mittelstaedt, P.: Zur Protophysik der klassischen Mechanik. In: G. Böhme (Hrsg., 1976), S.131-168.

Mittelstaedt, P.: Protophysik und spezielle Relativitätstheorie. In: K. Lorenz (Hrsg., 1978), S.290-310.

Mittelstraß, J.: Wider den Dingler-Komplex. In: J. Mittelstraß: Die Möglichkeit von Wissenschaft. Frankfurt a.M. 1974, S.84-105.

Montada, L.: Die Lernpsychologie Jean Piagets. Stuttgart 1970.

Montague, R.: Formal Philosophy - Selected papers of Richard Montague. Herausgeg. von R.H. Thomason. New Haven/London 1974.

Moulton, I.P.: Some geometry experiences for elementary school children. In: Arithm. Teacher 21 (1974), S.114-116.

Müller, G. / Wittmann, E.: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Braunschweig 1977.

Müller, G.H.: Zur operativen Begründung von Logik und Mathematik. In: Ratio 1 (1957), S.77-86.

Müller, K.P.: Raumgeometrie in der Schule und für die Schule. In: Mathematica didact. 4 (1981), S.155-168.
Münzinger, W.: Projektunterricht, projektorientierter Mathematikunterricht. In: Forschungsbeiträge zum Mathematikunterricht I, Materialien und Studien, B.8, IDM,Univ. Bielefeld, 1977, S.108-129.

Pedersen, J.J.: Geometry is Alive and Well: The Coxeter Symposion in Toronto. In: Two-Year College Mathematics Journal 11 (1980), S.19-25.
Perelman, J.I.: Unterhaltsame Geometrie. übers. aus dem Russischen, Berlin 1954.
Perron, O.: Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene. Stuttgart 1962.
Pfarr, J. (Hrsg.): Protophysik und Relativitätstheorie. Beiträge zur Diskussion über eine konstruktive Wissenschaftstheorie der Physik. Mannheim/Wien/Zürich, 1981.
Piaget, J.: Psychologie der Intelligenz. Franz. Paris 1947, dt. Zürich 1947, 4. Aufl. Zürich/Stuttgart 1970.
Piaget, J.: Die Entwicklung des Erkennens I: Das mathematische Denken. Franz. Paris 1950, dt. Stuttgart 1975.
Piaget, J.: Three lectures: The stages of the intellectual development of the child. The relation of affectivity to intelligence in the mental development of the child. Will and action. In: Bull. of the Menninger Clinic 26 (1962), S.102-145.
Piaget, J./Inhelder, B./Szeminska, A.: Die natürliche Geometrie des Kindes. Franz. Paris 1948, dt. Stuttgart 1974.
Piaget, J./Inhelder, B./u.a: Die Entwicklung des räumlichen Denkens beim Kinde. Franz. Paris 1948, dt. Stuttgart 1975.
Pieri, M.: La geometria elementare istituita sulle nozioni di 'punto' e 'sfera'. In: Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze, ser.3, 15 (1908), S.345-450.

Reidemeister, K.: Raum und Zahl. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957.
Rosenfeld, G.: Theorie und Praxis der Lernmotivation. Ein Beitrag zur pädagogischen Psychologie. Berlin 1966.
Ruzavin, G.I.: Die Natur der mathematischen Erkenntnis. Studien zur Methodologie der Mathematik. Berlin 1977.

Sachsse, H.: Anthropologie der Technik. Ein Beitrag zur Stellung des Menschen in der Welt. Braunschweig 1978.
Sanborn, H.C.: Das Experiment als schöpferische Tat. In: W. Krampf (Hrsg., 1956), S.174-188.

Schipper, W.: Untersuchungen zur Stellung der Topologie im geometrischen Anfangsunterricht. Bad Salzdetfurth 1981.

Schmalz, R.: Die Schraubenlinie im Unterricht. Staatsexamensarbeit Neuss 1980.

Schmidt, E.: Die Drehkolben- und Kreiskolbenmaschine, Entstehung einer neuen Bauart des Verbrennungsmotors mit überraschenden Eigenschaften. In: VDI-Berichte 45 (1960), S.7-11.

Schneider, W.: Technisches Zeichnen für die Praxis. Braunschweig 1961, 5. Aufl. 1965.

Schoemaker, G./Goddijn, A./de Lange, J./Kindt, M.: Neuer Geometrie-Unterricht auf der Sekundarstufe. In: H.G. Steiner/B. Winkelmann (Hrsg.): Fragen des Geometrieunterrichts. Köln 1981, S.99-155.

Schreiber, A.: Die Idee des Raumes in der Musik. VDI-Nachrichten 42 (1972), S.25.

Schreiber, A.: Theorie und Rechtfertigung. Untersuchungen zum Rechtfertigungsproblem axiomatischer Theorien in der Wissenschaftstheorie. Braunschweig 1975.

Schreiber, A.: Eine methodische Schwierigkeit in P. Lorenzens operativer Begriffslehre. In: Z. f. Philos. Forsch. 32 (1978a), S.99-102.

Schreiber, A.: Logische Form und Invarianz. In: Philosophia Naturalis 17 (1978b), S.66-69.

Schreiber, A.: Die operative Genese der Geometrie nach Hugo Dingler und ihre Bedeutung für den Mathematikunterricht. In: Der Mathematikunterricht 24/5 (1978c), S.7-24.

Schreiber, A.: Universelle Ideen im mathematischen Denken - ein Forschungsgegenstand der Fachdidaktik. In: Mathematica didact. 2 (1979), S.165-171.

Schreiber, A.: Idealisierungsprozesse - ihr logisches Verständnis und ihre didaktische Funktion. In: Journal f. Mathematik-Didaktik 1 (1980), S.42-61.

Schreiber, A.: Methodenkritische Überlegungen zu Merleau-Pontys Phänomenologie der Raumerfahrung. In: Philososphia Naturalis 18 (1981), S.423-437.

Schreiber, A.: Parallelfiguren - ein Problemfeld für umwelterschließenden Geometrie-Unterricht. In: Mathematica didact. 5 (1982), S.139-153.

Schreiber, A.: Bemerkungen zur Rolle universeller Ideen im mathematischen Denken. In: Mathematica didact. 6 (1983), S.65-76.

Schreiber, A.: Rezension zu Inhetveen (1983). Erscheint in: Zentralbl. für Didaktik d. Mathematik (1984).

Schröder, P. (Hrsg.): Vernunft, Erkenntnis, Sittlichkeit. Internationales philosophisches Symposion (Göttingen, Oktober 1977) aus Anlaß des 50. Todestages von Leonard Nelson. Hamburg 1979.

Schubring, G.: Die historisch-genetische Orientierung in der Mathematik-Didaktik. Zur Rolle der Geschichte der Mathematik. In: Zentralbl. f. Didaktik d. Mathematik 9 (1977), S.209-213.

Schubring, G.: Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik. Stuttgart 1978.

Schwabhäuser, W.: Über die Vollständigkeit der elementaren euklidischen Geometrie. In: Z. f. math. Logik u. Grundlagen d. Math. 2 (1956), S.137-165.

Shoenfield, J.R.: Mathematical Logic. Reading, Mass, 1967.

Spallek, K.: Wankelmotor und Reuleauxsche Dreiecke. In: Math.-Naturwiss. Unterr. 37 (1984), S.22-23.

Stachowiak, H.: Allgemeine Modelltheorie. Wien/New York 1973.

Steck, M.: Dürers Gestaltlehre der Mathematik und der bildenden Künste. Halle 1948.

Stegmüller, W.: Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und Analytischen Philosophie. Bd.I (1969), Bd.II (1970 u. 1973), Bd.IV (1973). Berlin/Heidelberg/New York.

Steiner, F.: Über den Aufbau der Geometrie mit Hilfe von Homogenitätsprinzipien. Diplom-Arbeit Erlangen-Nürnberg 1969.

Steiner, G.: Mathematik als Denkerziehung. Eine psychologische Untersuchung über die Rolle des Denkens in der mathematischen Früherziehung. Stuttgart 1973.

Steiner, G.: Jean Piaget: Versuch einer Wirkungs- und Problemgeschichte. In: Hommage a Jean Piaget zum 80. Geburtstag. Stuttgart 1976, S.49-114.

Steiner, G. (Hrsg.): Piaget und die Folgen. Die Psychologie des 20. Jahrhunderts, Bd.VII. Zürich 1978.

Steiner, H.G. (Hrsg.): Didaktik der Mathematik. Darmstadt 1978.

Stoker, J.J.: Unbounded Convex Point Sets. In: American Journal of Mathematics 62 (1940), S.165-179.

Stowasser, R.: Problemorientierte Zugänge zur Geometrie. In: Schriftenreihe des IDM 3/1974, Univ. Bielefeld, S.65-120.

Stückrath, F.: Kind und Raum. München 1955.

Stührmann, H.J./Wessels, B.: Lehrerhandbuch für den Technischen Werkunterricht, Bd.1: Maschinentechnik in Unterrichtsbeispielen. Weinheim 1970, 2. Aufl. 1972.

Stumpf, C.: Über den Ursprung der Raumvorstellung. Leipzig 1873.

Tarski, A.: What is elementary geometry? In: Henkin/Suppes/Tarski (Hrsg., 1959), S.16-29.

Theis. E.: Woher rührt unser Wohlgefallen am Goldenen Schnitt? In: Studium Generale 6 (1953), S.502-506.

Thompson, D'Arcy W.: On Growth and Form. Cambridge 1917, 2. Aufl. 1942.

Thüring, B.: Die Gravitation und die philosophischen Grundlagen der Physik. Berlin 1967.

Tjalve, E.: Systematische Formgebung für Industrieprodukte. Düsseldorf 1978.

Torretti, R.: Hugo Dingler's Philosophy of Geometry. In: Dialogos 32 (1978), S.85-128.

Volk, D.: Geometrie aus dem Handwerk. Genauer Hinschauen beim Mauern und Häuserbauen. Göttingen 1984.

Waerden, B.L., van der.: Einfall und Überlegung. Basel 1954, 3. Aufl. 1973.

Wagenschein, M.: Entdeckung der Axiomatik. In: Der Mathematikunterricht 20/1 (1974), S.52-70.

Walther, G.: Drei Ansätze zu mathematischen Untersuchungen aus dem Bereich der Musik. In: Math.-Naturwiss. Unterr. 29/7 (1976), S.405-410.

Wessels, B.: Die Werkerziehung. 2. Aufl. Bad Heilbrunn (Obb.) 1969.

Weyl, H.: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. 1928, 3., wesentlich erweiterte Aufl. München/Wien 1966.

Weyl, H.: Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege mathematischen Verständnisses. In: Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften 38 (1932), S.177-188.

Weyl, H.: Wissenschaft als symbolische Konstruktion des Menschen. In: Eranos-Jahrb. 1948 (1949), S.375-431.

Weyl, H.: Symmetrie. Amer. Princeton 1952, dt. Basel/Stuttgart 1955.

Whitehead, A.N.: The Mathematical Curriculum. In: A.N. Whitehead: The Aims of Education (Nachdruck der Präsidialansprache (1913) an die Londoner Gruppe der Mathematical Association). New York/London 1929. Dt. Übers.: Die Gegenstände des mathematischen Unterrichts. In: Neue Sammlung 2 (1962), S.257-266.

Wille, R.: Mathematische Sprache in der Musiktheorie. In: Jahrbuch Überblicke Mathematik. Mannheim 1980, S.167-184.

Willer, J.: Relativität und Eindeutigkeit. Hugo Dinglers Beitrag zur Begründungsproblematik. Meisenheim am Glan 1973.

Winter, H.: Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. In: Beiträge zum Lernzielproblem. Ratingen 1972.

Winter, H.: Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht. In: Zentralbl. f. Didaktik d. Mathematik 7 (1975), S.106-116.

Winter, H.: Die Erschließung der Umwelt im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule 7 (1976), S.337-353.

Winter, H.: Zur Einführung (in: Umwelterschließung im Geometrieunterricht). In: Der Mathematikunterricht 24/5 (1978a), S.5-6.

Winter, H.: Geometrie vom Hebelgesetz aus - ein Beispiel zur Integration von Physik- und Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. In: Der Mathematikunterricht 24/5 (1978b), S.88-125.

Wittmann, E.: Zum Begriff "Gruppierung" in der Piagetschen Psychologie. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1972, Teil 2. Hannover 1973, S.203-222.

Wittmann, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig 1974, 5. Aufl. 1978.

Wittmann, E.: Zur Rolle von Prinzipien in der Mathematikdidaktik. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1975. Hannover 1975, S.226-235

Wittmann, E.: Eine Erweiterung des operativen Prinzips. In: Beiträge zur Mathematikdidaktik. Festschrift für Wilhelm Oehl. Hannover 1976, S.167-178.

Wittmann, E.: Piagets Begriff der Gruppierung. In: G. Steiner (Hrsg., 1978), S.219-234.

Wittmann, E.: Beziehungen zwischen operativen "Programmen" in Mathematik, Psychologie und Mathematikdidaktik. In: Journal f. Mathematik-Didaktik 2 (1981), S.83-95.

Wuchterl, K.: Struktur und Sprachspiel bei Wittgenstein. Frankfurt a.M. 1969.

Wundt, W.: Kleine Schriften. Stuttgart 1921.

Zankov, L.V.: Didaktik und Leben. Russ. Moskau 1968, dt. Hannover 1973.

Zeißig, E.: Präparationen für Formenkunde (Raumlehre - Geometrie) als Fach an Volksschulen. I. Teil, 2. Aufl. 1904, 3. Aufl. 1916. II. Teil, 1900. Langensalza.

Zeißig, E.: Die Raumphantasie im Geometrieunterrichte. Sammlung v. Abh. aus d. Gebiete der Päd. Psychologie u. Physiologie, Bd.V, 6. Heft. Berlin 1902.

Zeitler, H.: Radlinien in Schule, Technik und Wissenschaft. In: Der Mathematikunterricht 26/4 (1980), S.81-104.

Zeitler, H.: Über Gleichdicks. Anregungen und Erfahrungen zum Geometrieunterricht der SI. In: Did. d. Math. 9 (1981), S.250-275.

Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (1976): Analysen: Geometrie in der Grundschule. Stuttgart 1976, S.1-18, 49-79.

Zschommler, W.: Feinoptik-Glasbearbeitung. Werkkunde für den Feinoptiker. München 1963.

IV. Verzeichnis der Tabellen und Abbildungen

Tabellen

Abbildungen

V. Index

Nachtrag

In den knapp drei Dekaden, die nach Abschluss des chronologischen Literaturverzeichnisses (Ende 1983) ins Land gegangen sind, hat sich auf dem Gebiet unserer Monografie nichts getan, das deren kritisches Fazit zur operativen Geometriebegründung und den positiven Ansatz ihrer didaktischen Uminterpretation in wesentlichen Punkten korrigieren könnte. Zahlreiche Mängel in den Theorie-Entwürfen der Erlanger Schule erörtert im Detail auch L. Amiras in seiner Dissertation „Protogeometrica. Systematisch-kritische Untersuchungen zur protophysikalischen Geometriebegründung“ (Konstanz, 2000). In der Folge hat dieser Autor sich daran versucht, die figurentheoretische ‘Wende’ (weg von den Homogenitätsprinzipien) in einen „produktiv-operativen Ansatz zur Begründung der Geometrie in der Protophysik“ umzumünzen (vgl. Journ. f. General Philosophy of Science 34 (2003), 133-158). Ausführlicher geschieht dies in seiner Habilitationsschrift „Protogeometrie. Elemente der Grundlagen der Geometrie als Theorie räumlicher Figuren“ (Pädagogische Hochschule Weingarten, 2006). Aber auch dieser Neuanlauf, die elementare Geometrie systematisch als operative Figurenlehre aufzubauen, lässt noch viele Fragen offen; zu kritischen Anmerkungen vgl. A. Schreiber, „Begriffsbestimmungen. Aufsätze zur Heuristik und Logik mathematischer Begriffsbildung“ (Logos: Berlin 2011), S. 153 f.