Elementare Wetten

Grundlegende Unterscheidungen

Unter einer **Wette** W (i.w.S.) verstehen wir einen Vertrag, in dem zwei Parteien (im Folgenden **Spieler** und **Bank** genannt) Leistungen vereinbaren, die von beiden Parteien zu erbingen sind, wenn bestimmte Ereignisse eintreten, die zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses unsicher sind. Bei der "Bank" kann es sich um einen persönlichen Gegenspieler handeln oder um eine Organisation, die Wetten mit einer größeren Zahl von Spielern abschließt. Wir betrachten im Folgenden ausschließlich Wetten, deren Leistungen in der *Zahlung von Geldbeträgen* besteht.

Wir unterscheiden zwischen Wetten unterschiedlicher Struktur:

- **Elementare Wetten** (die auf ein einzelnes Ereignis A abgeschlossen werden)
- **Multiwetten** (die sich auf mehrere Ereignisse $A_1, A_2, A_3, \ldots$ zugleich beziehen)

Die Rollen von Spieler und Bank sind in vertraglicher Hinsicht nicht immer symmetrisch. So kommt es in der Praxis vor, dass der Spieler sich zu einer Leistung (Geldzahlung) bereit findet, die Bank jedoch keine bestimmte (sondern nur eine *variable*) Auszahlung zusichert. Dies ist z.B. notwendig der Fall, wenn die Auszahlungsleistung nach dem Prinzip des Totalisators festgelegt wird (vgl. Näheres dazu im Abschnitt über Multiwetten). Die meisten Lotterien, das Zahlenlotto und (selbstredend) Fußball- und Pferde-Toto gehören zu diesem Typ.

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit elementaren Wetten.

Bei einer elementaren Wette W (im Folgenden kurz: Wette) ist es (außer beim Totalisator, s.o.) der Normalfall, dass beide Parteien ihre Leistungen exakt im Voraus festlegen.

Einsatz und Gewinn

Der Spieler zahlt an die Bank einen positiven Betrag e (den **Einsatz** der Wette). Wenn das Ereignis A eintritt (d.h. der Spieler die Wette *gewinnt*), zahlt die Bank an ihn einen zuvor vereinbarten positiven Betrag b (den **Bruttogewinn**).

Bei einer sinnvollen Wette übersteigt der Bruttogewinn den Einsatz: $b > e$, sonst bliebe dem Spieler, der die Wette gewinnt, nach Abzug seines Einsatzes kein positiver **Reingewinn** $g = b - e$. Wir nennen g kürzer **Gewinn** und fassen ihn (in Anbetracht der Unsicherheit des Ereignisses, auf das gewettet wird) als *Wert einer Zufallsvariablen* G auf.

Auszahlungsquote, Verhältnis, Wettquotient

Das Verhältnis von Bruttogewinn zu Einsatz heißt **Auszahlungsquote** q (kurz: **Quote**) von W:

$$q = \frac{b}{e}$$

Für den Gewinn gilt: $g = q\,e - e = (q-1)\,e$. Somit gibt der Wert $q-1$ das Verhältnis von Gewinn zu Einsatz wieder; wir nennen ihn **Nettoquote** und bezeichnen ihn mit $\hat{q}$.

Gelegentlich wird die Quote einer Wette durch ein ganzzahliges **Verhältnis** indirekt angegeben. Lässt sich ein Spieler z.B. auf eine Wette im Verhältnis $2:1$ ein, so ist er bereit, 2 Geldeinheiten einzusetzen, während die Bank (als Gegenspieler) 1 Geldeinheit einsetzt. Den Stock von 3 Geldeinheiten erhält der Gewinner. Somit entspricht dem Verhältnis $2:1$ die Quote $q = \frac{3}{2}$.

Ein Spieler, der eine Wette im Verhältnis $2:1$ abschließt, wird dies vernünftigerweise nur tun, wenn das "Treffer"-Ereignis A für ihn doppelt so wahrscheinlich ist wie das Gegenereignis $\overline{A}$. Entsprechendes gilt natürlich auch für den Gegenspieler im umgekehrten Verhältnis. Beide Parteien drücken mit dieser Wette die (epistemisch zu deutenden) gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(\overline{A}) = \frac{1}{3}$ aus. (In Wirklichkeit gehen viele, wenn nicht die meisten Spieler auf Wetten ein, die einer Wahrscheinlichkeitsbeurteilung keineswegs standhalten. Solches nicht-rationale Verhalten wurzelt oft darin, dass man in einer Risikosituation den "großen Gewinn" oder auch nur spannende Unterhaltung sucht.)

Der Sachverhalt soll allgemein beschrieben werden. Unter einer **Wette** (**im Verhältnis**) $s:t$ verstehen wir eine Wette mit der Quote $q = \frac{s+t}{s}$; der Kehrwert dieser Quote heißt **Wettquotient** w:

$$w = \frac{s}{s+t} = \frac{1}{q}$$

Unter bestimmten Bedingungen, die rationales Verhalten definieren, bringen Wettquotienten die epistemischen Wahrscheinlichkeiten der Beteiligten Spieler zum Ausdruck.

Wir treffen folgende Vereinbarung:

Fehlt bei einer Wette eine Angabe zu Verhältnis, Wettquotient oder Quote, so gehen wir stillschweigend von dem Verhältnis $1:1$ aus (**Standard-Wette**). Die Quote einer Standard-Wette beträgt somit 2.

Gewinnerwartung

Ist eine objektive Wahrscheinlichkeit $p = P(A)$ bekannt (z.B. aufgrund physikalischer Symmetrien), so ist der Erwartungswert $E(G)$ des Gewinns (kurz: **Gewinnerwartung**) definiert, und es gilt:

$$E(G) = p\,g + (1-p)\,(-e)$$

Wir verwenden $g = (q-1)\,e$ und erhalten:

$$E(G) = (p\,q - 1)\,e$$

Üblicherweise heißt die Wette **fair** (oder **gerecht**), wenn $E(G) = 0$, (für den Spieler) **günstig**, falls $E(G) > 0$, sonst **ungünstig**.

Legt man die frequentistische Deutung der Wahrscheinlichkeit zugrunde, so schätzt die Gewinnerwartung den mittleren Reingewinn, den der Spieler bei wiederholten Durchführungen der Wette erzielt. Bei einer fairen Wette kommt es auf längere Sicht zu einem angenäherten Ausgleich zwischen Spieler und Gegenspieler (bzw. Bank).

Man sieht ohne weiteres ein:

1. $E(G) = 0 \Longleftrightarrow p = w$
2. $E(G) > 0 \Longleftrightarrow p > w$
3. $E(G) < 0 \Longleftrightarrow p < w$

Danach ist eine Standard-Wette genau dann fair (günstig, ungünstig), wenn $p = \frac{1}{2} \left(> \frac{1}{2},\ < \frac{1}{2}\right)$ gilt.

Wetten auf das Gegenereignis

Wir bezeichnen mit A' das Gegenereignis zu A und entsprechend mit $p' = 1 - p$. Einigen sich Spieler und Gegenspieler auf eine Wette mit dem Verhältnis $s : t$, so lautet die zu A gehörige Quote $q = \frac{s+t}{s}$ und die zu A' gehörige Quote $q' = \frac{s+t}{t}$. Offenbar gilt

$$\frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1$$

Zwischen den Gewinnerwartungen $E(G)$, $E(G')$ von Spieler bzw. Gegenspieler besteht folgende Beziehung:

$$E(G') = -E(G)$$

<u>Beweis:</u> Wettet der Spieler den Einsatz e auf A, so ist sein Reingewinn $(q-1)\,e$ gerade der Einsatz e' des Gegenspielers. Dies ergibt sich auch rechnerisch sofort aus der Proportion $e : e' = s : t$; es gilt ja $e' = \frac{t}{s}\, e$ und $q - 1 = \frac{t}{s}$. Wegen $q' = \frac{q}{q-1}$ erhalten wir damit für das Verhältnis der Gewinnerwartungen:

$$\frac{E(G')}{E(G)} = \frac{(p'\,q'-1)\,e'}{(p\,q-1)\,e} = \frac{\left((1-p)\cdot\frac{q}{q-1} - 1\right)(q-1)}{p\,q-1} = \frac{(1-p)\,q-(q-1)}{p\,q-1} = -1 \quad \blacksquare$$

Die Würfelspiele des Chevalier de Méré

Der Chevalier de Méré war ein französischer Edelmann des 17. Jahrhunderts, der in seinen reichlich vorhandenen Mußestunden dem Glücksspiel frönte. In seinem Salon übernahm er gerne die Rolle der Bank, wenn er glaubte, damit gut verdienen zu können. Beliebt waren Würfelspiele mit mehreren Würfeln. Es wurden Standard-Wetten im Verhältnis $1:1$ (mithin zur Quote $q = 2$) abgeschlossen.

■ Das erste Spiel

Vier Würfel werden geworfen. Es wird auf das Ereignis gewettet, dass keine Sechs darunter vorkommt.

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit:

$$p = \left(1 - \tfrac{1}{6}\right)^4 = \left(\tfrac{5}{6}\right)^4 = \tfrac{625}{1296} \approx 0.482253 < \tfrac{1}{2}$$

Das Spiel ist ungünstig für den Spieler, günstig für die Bank. Die Gewinnerwartung beträgt bei einem Einsatz von 1 Geldeinheit:

$$E(G) = p \cdot 2 - 1 = -\tfrac{23}{648} \approx -0.0354938$$

Als "Bank" war der Chevalier somit in der Position, durchschnittlich gut 3.5 % aller gesetzten Geldbeträge einzustreichen.

■ Das zweite Spiel

Zwei Würfel werden 24-mal geworfen. Es wird auf das Ereignis gewettet, dass keine Doppelsechs darunter vorkommt.

Herr de Méré meinte zunächst, dieses Spiel sei nur eine Variante mit gleichen Gewinnchancen wie beim ersten Spiel. Die Wahrscheinlichkeit für eine Doppel-Sechs ist ja ein Sechstel der Wahrscheinlichkeit, mit nur einem Würfel eine Sechs zu werfen. Man könnte also vermuten, dass 6-mal mehr Versuche mit zwei statt vier Würfeln die alte Wahrscheinlichkeit hervorbringt. Dieses "Proportionalitäts-Denken" führt in die Irre. Der Chevalier hatte kein Einsehen, wurde aber durch Verluste in der Praxis irritiert.

Die Gewinn-Wahrscheinlichkeit lautet:

$$p = \left(1 - \tfrac{1}{36}\right)^{24} = \left(\tfrac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.508596 > \tfrac{1}{2}$$

Diese Wette ist also für den Spieler günstig! Setzt dieser 1 Geldeinheit ein, so ergibt sich für ihn die positive Gewinnerwartung

$$E(G) = p \cdot 2 - 1 \approx 0.0171922$$

die auf lange Sicht der Bank Verluste einbringt. Der Chevalier hatte es bemerkt.

Multiwetten

Begriffliche Unterscheidungen

Im allgemeinsten Sinn ist eine **Multiwette** W eine Wette, die sich auf mehrere (unter Umständen auch abzählbar-unendlich viele) Ereignisse $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ bezieht. Je nach der Art der Leistung, zu der sich der Spieler vorab verpflichtet, lassen sich zwei Typen unterscheiden.

■ Wetten vom Pauschaltyp

Wie bei einer elementaren Wette zahlt der Spieler an die Bank einen einzigen Einsatzbetrag. Die Gewinn-Situation ist nun aber nicht an ein Ereignis allein gebunden. Vielmehr können verschiedene Versuchsausgänge zu variierenden positiven Auszahlungen an den Spieler führen. Ein bekanntes Beispiel ist das *Zahlenlotto*, bei dem gemäß der erzielten Gewinnklasse ausgezahlt wird. Beim *St. Petersburger Spiel* haben wir es sogar mit unendlich vielen Gewinnklassen zu tun (vgl. den betreffenden Abschnitt).

■ Wetten vom Individualtyp

In diesem Fall realisiert der Spieler eine Einsatzverteilung $(e_1, \ldots, e_n)$ auf das – als endlich vorausgesetzte – Ereignissystem $(A_1, \ldots, A_n)$, d.h. er setzt den Betrag e_i auf das Ereignis A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Eine Multiwette dieses Typs kann durch Zusammenfassung (Kopplung) mehrerer Einzelwetten $W_1, \ldots, W_n$ zustande kommen, wobei die Gegenspieler jeweils andere sein können. Es ist aber auch möglich, dass ein und dieselbe Bank als Partner bei allen Teilwetten auftritt. In diesem Fall bilden die $A_1, \ldots, A_n$ häufig die (sich wechselseitig ausschließenden) Ausgänge eines Zufallsversuchs, z.B. beim Roulett (vgl. dazu den Abschnitt über Roulett).

Anmerkung: Formal kann man Wetten vom Pauschaltyp dem Individualtyp unterordnen, indem man eine konstante Einsatzverteilung annimmt und deren Summe als Einzeleinsatz betrachtet.

■ Vollständigkeit

Von besonderem Interesse sind **vollständige** Multiwetten, bei denen mit Sicherheit wenigstens eines der Ereignisse A_i eintritt, der Spieler also mindestens eine Teilwette gewinnt.

Das Prinzip des Totalisators

Der Totalisator ist ein verbreitetes Prinzip zur Festlegung von Quoten. Diese erfolgt nachträglich seitens der Bank, die zunächst die Einsätze aller Spielteilnehmer bis zu einem Stichzeitpunkt sammelt. Danach werden die Quoten festgelegt und die Gewinne ausgeschüttet. Der insgesamt an die Spieler zurückfließende Betrag ist allerdings nur ein Teil der Einsatzsumme, der nach Abzug von Steuern, Betriebskosten und dgl. mehr übrig bleibt. Beim Zahlenlotto z.B. vermindert der Totalisator die Einnahmen um mindestens 50 %.

Ein Glücksspiel nach dem Totalisatorprinzip lässt sich als Multiwette eines Spielerkollektivs gegen die Bank auffassen. Die Besonderheit: Das Spielerkollektiv *verliert immer* (zumeist sehr hoch), während einzelne (zumeist sehr wenige) Spieler Gewinne in bisweilen beträchtlicher Höhe erzielen können. Dem Reiz großer, wenn auch unwahrscheinlicher Gewinne verdanken Totalisator-Spiele ihre hartnäckige Popularität. Ohne sie geht es auch nicht, da "Mega-Gewinne" ein entsprechend großes Spielerkollektiv voraussetzen.

Wir wollen das Totalisatorprinzip formal beschreiben: Bezeichnet e_k den auf das Ereignis A_k eingesetzen Gesamtbetrag (d.h. den Einsatz des Spielerkollektivs), so ist

$$S = e_1 + e_2 + ... + e_n$$

die totale **Einsatzsumme** (= Einnahme der Bank). Für den auszuschüttenden Betrag schreiben wir $\theta \cdot S$, wobei θ den **Ausschüttungsanteil** mit $0 < \theta \leq 1$ angibt. Im Fall $\theta = 1$ würde die Bank ihre Einnahmen vollständig wieder ausschütten. Die komplette Einbehaltung der Einnahmen ($\theta = 0$) bleibt außer Betracht, da sie den Charakter der Wette aufhöbe.

Wie sollen nun die Quoten q_k zu A_k festgesetzt werden? Ein naheliegendes und einfaches Verfahren ist folgende antiproportionale Definition:

$$q_k = \frac{\theta S}{e_k} \quad (k = 1, 2, \ ..., n)$$

Diese besagt: Ereignisse A_k, auf die insgesamt große Einsätze gewettet wurden (weil die daran beteiligten Spieler an deren Eintreten glauben), erhalten umso niedrigere Auszahlungsquoten.

Beispiel: Auf Außenseiter beim Pferderennen zu setzen, ist nicht besonders erfolgversprechend (weshalb auch nur eine Minderheit dies wagt). Umso höher fällt die Auszahlungsquote aus, wenn dann wider Erwarten solche Wetten gewinnen.

Anmerkung: Es ist möglich und praktibel, die Quoten nach einer anderen Vorschrift als der hier formulierten zu berechnen. Dabei ist aber stets eine Reziprozität von Einsatzhöhe und Quote zu beachten. – Für das Folgende verzichten wir auf die Betrachtung solcher Varianten.

Aufgrund der antiproportionalen Festlegung der Quoten q_k lässt sich sofort eine Aussage über die zugehörigen Wettquotienten w_k gewinnen:

$$w_1 + w_2 + ... + w_n = \frac{1}{\theta}$$

Beweis: Unter Berücksichtigung der Definition der w_k ($= \frac{1}{q_k}$) ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{\theta S} = \frac{1}{\theta S} \sum_{k=1}^{n} e_k = \frac{1}{\theta}$$

■

Wettquotienten sind dazu geeignet, Glaubensgrade (epistemische Wahrscheinlichkeiten) auszudrücken (vgl. den Abschnitt über Elementare Wetten). Bei einem Totalisator-Spiel ist dies nach obiger Gleichung aber nur für $\theta = 1$ möglich, da andernfalls die $w_1, \ ..., w_n$ <u>keine Wahrscheinlichkeitsverteilung</u> über der Ereignismenge $\{A_1, \ .., A_n\}$ darstellen. Im Sinne der Wahrscheinlichkeitslehre ist daher die Teilnahme an einem Totalisator-Spiel mit $\theta < 1$ <u>nicht rational!</u>

Gewinnerwartung bei Multiwetten

Es soll der Erwartungswert $E(G)$ des Gewinns G berechnet werden, den ein Spieler bei einer <u>vollständigen Multiwette vom Individualtyp</u> mit gegebener W-Verteilung erzielt. Wir nehmen dazu für $k = 1, 2, \ ..., n$ an:

- Der Spieler setzt den Einsatz $e_k \geq 0$ auf das Ergebnis A_k (wobei $S = e_1 + e_2 + ... + e_n > 0$).
- Die Wahrscheinlichkeiten $p_k = P(A_k)$ sind bekannt (wobei $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$).
- Die Auszahlungsquoten q_k sind bekannt.

Man kann sich die Situation als $(p_1, \ p_2, \ ..., \ p_n)$-Bernoulli-Rad vorstellen, auf dessen Sektoren 1, 2, ..., n beziehentlich die Einsätze $e_1, e_2, \ ..., e_n$ gewettet werden. Die Einsatzsumme S streicht die Bank ein. Gewinnt Sektor k, erhält der Spieler den Betrag $q_k \, e_k$ ausbezahlt.

Der Reingewinn g_k im Fall des Spielausgangs A_k ergibt sich damit zu $g_k = q_k \, e_k - S$. Die Zufallsvariable G kann die Werte $g_1, g_2, \ ..., g_k$ annehmen. Über ihren Erwartungswert lässt sich zeigen:

■ Satz über die Gewinnerwartung

$$E(G) = \sum_{k=1}^{n} (q_k \, p_k - 1) \, e_k$$

<u>Beweis:</u> 1. Die Gleichung ergibt sich durch direktes Auswerten der Summe $E(G) = \sum_{k=1}^{n} g_k \, p_k$ unter Berücksichtigung der oben verabredeten Annahmen und Bezeichnungen (Einzelheiten als <u>Übung</u>).

2. Ein anderer Beweis nutzt die Additivität des Erwartungswertes aus. Wir denken uns die Multiwette in n elementare Teilwetten $W_1, \ ..., W_n$ zerlegt. Bei W_k setzt der Spieler den Betrag e_k auf A_k und den Betrag 0 auf alle übrigen A_j mit $j \neq k$. Dann erhält man $q_k \, e_k - e_k = (q_k - 1) \, e_k$ als Wert der Zufallsvariablen G_k, die den Gewinn der Wette W_k darstellt. Da bekanntlich $E(G_k) = (q_k \, p_k - 1) \, e_k$ (vgl. den Abschnitt über Elementare Wetten), ergibt sich: $E(G) = E(G_1 + ... + G_n) = E(G_1) + ... + E(G_n)$. ■

■ Gewinnerwartung bei Totalisator-Spielen

Wir werten den k-ten Summanden in der Formel für $E(G)$ mit der Totalisator-Quote $q_k = \frac{\theta S}{e_k}$ aus und erhalten: $(q_k \, p_k - 1) \, e_k = \left(\frac{\theta S}{e_k} \, p_k - 1\right) e_k = \theta \, S \, p_k - e_k$. Damit ergibt sich

$$E(G) = \sum_{k=1}^{n} (\theta\, S\, p_k - e_k) = \theta\, S \sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{n} e_k = \theta\, S - S$$

und schließlich die Formel:

$$E(G) = (\theta - 1)\, S$$

Wegen $\theta \leq 1$ und $S > 0$ ist $E(G) \leq 0$, d.h. ein Totalisator-Spiel ist niemals günstig. Im Normalfall $\theta < 1$ ist es wegen $E(G) < 0$ sogar ungünstig. Der mittlere Gewinn, auf den ein Teilnehmer (hier: das Spielerkollektiv) auf längere Sicht hoffen darf, ist proportional zur Summe aller eingesetzten Beträge. Der Proportionalitätsfaktor $\theta - 1$ gibt den negativen Anteil an, den die einbehaltenen Einnahmen an dieser Summe ausmachen. Die Proportionalität zu S bringt zum Ausdruck, dass von allen Einsätzen e_k derselbe Anteil einbehalten wird.

Der große französische Schriftsteller und Philosoph Voltaire soll es verstanden haben, aus allen Gelegenheiten Geld zu schlagen. Den Grund zu seinem beträchtlichen Reichtum hatte er mit einer Lotterie gelegt, die vom damaligen absolutistischen Staat veranstaltet wurde. Voltaire und der Mathematiker La Condamine fanden für deren Ausschüttungsanteil $\theta > 1$ heraus (!). Nachdem sie finanzkräftige Partner ins Boot geholt hatten, kauften sie fast die ganze Auflage der Lose auf. Der Finanzminister war zuerst zufrieden über den guten Absatz, musste am Ende aber den Fehler einräumen und (durch einen Gerichtsbeschluss gezwungen) die Gewinne zu Lasten der Staatskasse ausbezahlen.

■ Erwartungsstabilität

Ist $E(G)$ proportional zur Einsatzsumme S, so kann ein Spieler die Gewinnerwartung nicht beeinflussen, gleichgültig wie er die einzelnen Einsätze in der von ihm insgesamt gesetzten Summe S auf die Spielausgänge verteilt. Für Totalisator-Spiele geht dies unmittelbar aus der oben bewiesenen Formel hervor. Es gibt aber auch andere Multiwetten (z.B. Roulett), bei denen Gewinnerwartung und Einsatzsumme proportional sind.

Wir nehmen dies zum Anlass folgender Definition:

Eine Multiwette (bzw. das zugehörige "Glücksspiel") heiße **erwartungsstabil** (kurz: **stabil**), wenn $E(G) = \lambda \cdot S$ gilt mit einem festen $\lambda \in \mathbb{R}$, **Stabilitätskoeffizient** genannt.

Beispiele: Für Roulett gilt $\lambda = -\frac{1}{37}$ (vgl. den Abschnitt über Roulett). – Das Glücksspiel *Lustige Sieben* ist hingegen nicht stabil. Es lassen sich Einsatzverteilungen finden, deren Gewinnerwartung größer ist als die aller anderen Einsatzverteilungen (vgl. die Übungsaufgaben).

Stabile (vollständige) Multiwetten werden charakterisiert durch den folgenden Satz:

Stabilitätskriterium

Eine Multiwette ist stabil genau dann, wenn $q_k\, p_k = \text{const}$ $(1 \leq k \leq n)$.

Beweis: 1. Sei $q_k\, p_k = \text{const}$ $(k = 1, 2, ..., n)$. Wir setzen $\lambda := q_k\, p_k - 1$ und erhalten sofort $E(G) = \lambda\, S$. – 2. Sei nun umgekehrt $E(G) = \lambda\, S$. Dann gilt für alle Einsatzverteilungen $e_1, ..., e_n$ mit der Summe S:

$$\sum_{k=1}^{n} (q_k\, p_k - 1)\, e_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda\, e_k$$

Spezialisiert man $e_1 = S$ und $e_k = 0$ für $k \neq 1$, so ergibt sich: $(q_1\, p_1 - 1)\, S = \lambda\, S$ und damit $q_1\, p_1 = \text{const}$ $(= \lambda + 1)$. Für $e_2 = S$ und $e_k = 0$ $(k \neq 2)$ folgt in derselben Weise: $q_2\, p_2 = \text{const}$, usf. bis $e_n = S$, $e_k = 0$ für $k \neq n$. ■

Es ist aufschlussreich, sich vor dem Hintergrund des Stabilitätskriteriums in die Rolle der Bank zu versetzen, die ein bestimmtes "Glücksspiel" veranstaltet. Natürlich möchte sie *von allen Versuchsausgängen gleichmäßig profitieren*, d.h. sie muss eine stabile Multiwette anbieten und dafür sorgen, dass zu gegebener Totalsumme S aller Einsätze ihre Gewinnerwartung $E(G)$ stets gleich bleibt. Nach dem Stabilitätskriterium wird dies garantiert, wenn nur die Quoten q_k proportional den Kehrwerten der Wahrscheinlichkeiten p_k sind.

Derselbe Sachverhalt lässt sich auch mit den früher betrachteten Wettquotienten ($w_k = \frac{1}{q_k}$) formulieren: Stabile Multiwetten sind dadurch gekennzeichnet, dass ihre "objektiven" Wahrscheinlichkeiten p_k und die Wettquotienten w_k (durch die für die Versuchsausgänge A_k "subjektive" Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden) proportional sind. Genauer gilt (mit dem Stabilitätskoeffizienten λ):

$$p_k = (1+\lambda)\, w_k \quad \text{für alle } k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$$

Für Totalisator-Spiele gilt: $\lambda = \theta - 1$ und $w_k = \theta^{-1}\, p_k$.

Opportunistisches Spielverhalten

Das Folgende bezieht sich auf Multiwetten, deren Quoten nach dem Totalisatorprinzip ermittelt werden.

■ Zweistufige Dynamik

Es kann (wie beim *Pferderennen*) vorkommen, dass die Totalisation der Einsätze zweistufig erfolgt. Zum Zeitpunkt, der die beiden Stufen voneinander trennt, wird eine Art "Zwischenbilanz" gezogen, d.h. die bis dahin (in sog. Vorwetten) gesetzten Beträge $e_1,\ \ldots,\ e_n$ werden (nach dem Totalisatorprinzip) in Quoten umgerechnet: $q_k = \frac{\theta\, S}{e_k}$ ($k = 1,\ \ldots,\ n$), und öffentlich bekanntgegeben.

Die Spieler erfahren auf diese Weise, wie das Spielerkollektiv die Wette einschätzt. Ein einzelner Spieler hat nun eine ggfs. zweite Gelegenheit, Geldbeträge zu setzen. Er kann sich dem Trend anschließen, d.h. auf favorisierte Pferde bevorzugt wetten, oder ein höheres Risiko bei Außenseitern eingehen, um von einer höheren Auszahlungsquote zu profitieren. Auf dem Rennplatz gibt es dazu allerlei "impressionistischen" Hintergrund: Besichtigung von Pferd und Jockey in der Vorführrunde, Insider-Tipps aus der Gerüchteküche, usw.

Die neuen Einsätze, die sich während der zweiten Stufe ansammeln, seien mit $e_1^*,\ \ldots,\ e_n^*$ bezeichnet, entsprechend $S^* = e_1^* + \ldots + e_n^*$. Die finalen Quoten q_k^* werden daraufhin nach dem Totalisatorprinzip errechnet, wobei für A_k die Summe aus beiden Stufen $e_k + e_k^*$ zu Grunde gelegt wird.

Wir wollen annehmen, dass sich das Spielerkollektiv *opportunistisch* verhält. Das einfachste derartige Verhaltensmodell wird durch die proportionale Beziehung $e_k^* \propto w_k$ dargestellt. Wir notieren sie in der Form

$$e_k^* = \alpha \cdot \frac{1}{q_k}$$

für eine reelle Konstante $\alpha > 0$. – Es lässt sich zeigen, dass unter dieser Voraussetzung die finalen Quoten mit den Quoten aus den Vorwetten übereinstimmen:

$$q_k^* = q_k \quad \text{für alle } k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$$

Beweis: Zunächst bestimmen wir den Wert von α. Es gilt

$$S^* = \sum_{k=1}^{n} e_k{}^* = \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k} = \alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{\theta S} = \frac{\alpha}{\theta S} \sum_{k=1}^{n} e_k = \frac{\alpha}{\theta}$$

Es ist also $\alpha = \theta S^*$. Damit erhalten wir

$$q_k{}^* = \frac{\theta (S + S^*)}{e_k + e_k{}^*} = \frac{\theta (S + S^*)}{\frac{\theta S}{q_k} + \frac{\alpha}{q_k}} = \frac{\theta (S + S^*)}{\theta S + \theta S^*} q_k = q_k$$

■

■ Konvergenz bei mehrstufiger Dynamik

Es soll noch eine andere Modellierung opportunistischen Spielverhaltens erwähnt werden. Sie ist bei beliebig wiederholbaren Spieldurchgängen realisierbar und beschreibt ein Spielerkollektiv, das seinen Einsatz auf dem Ausgang A_k proportional zum mittleren Gewinn wählt, der im bisherigen Spielverlauf auf A_k verwirklicht wurde. Die Teilnehmer müssen dabei weder die objektiven Wahrscheinlichkeiten p_k kennen noch die Auszahlungsquoten q_k, die der Totalisator auf jeder Stufe ermittelt.

Man kann zeigen: Im Laufe der Zeit entsteht eine Folge von Wettquotienten $w_k(1)$, $w_k(2)$, $w_k(3)$, …., die für $t \to \infty$ gegen $\theta^{-1}\, p_k$ (mit Wahrscheinlichkeit 1) strebt. [Vgl. A. Schreiber: *Zur Anpassungsdynamik subjektiver Wahrscheinlichkeiten*. Grundlagenstudien aus Kybernetik und Geisteswissenschaft **21** (1980), 117-125]. Die hier angenommene Form des Opportunismus stabilisiert somit zumindest auf lange Sicht ein dynamisches Wettsystem. Für $\theta = 1$ sind die Wettquotienten $w_k(t)$ als subjektive (epistemische) Wahrscheinlichkeiten interpretierbar, die stochastisch gegen die objektiven Wahrscheinlichkeiten p_k konvergieren.

Eine Summenregel für Quoten

Bei vielen Glückspielen ist es üblich, aus den vorhandenen Elementarereignissen A_1, ..., A_n neue Ereignisse zusammenzusetzen. Z.B. werden im Roulett zwei benachbarte Zahlenfelder zu einer neuen "Chance" (als *Cheval* bezeichnet) verkoppelt.

Wir betrachten allgemein den analogen Fall, dass Versuchsausgänge A_1, A_2 zu einem wettbaren Ereignis A verbunden werden. Es stellt sich dann die Frage, wie die Quote q für A festzulegen ist, wenn die Quoten q_1, q_2 für A_1 bzw. A_2 gegeben sind. Eine naheliegende Vorgehensweise erschließt sich durch folgenden Grundsatz:

Kohärenzprinzip

Durch Ereignisbündelung soll sich die Gewinnerwartung nicht ändern.

Das hat unmittelbar zur Folge: Der Summand im Erwartungswert, der sich auf das zusammengesetzte Ereignis A bezieht, liefert denselben Beitrag wie die beiden Summanden, die zu den Ereignissen A_1 und A_2 gehören, zusammen.

Mit der oben hergeleiteten Formel für den Erwartungswert $E(G)$ ergibt sich:

$$(q_1\, p_1 - 1)\, e_1 + (q_2\, p_2 - 1)\, e_2 = (q\, (p_1 + p_2) - 1)\, (e_1 + e_2)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung (mit der unbekannten Quote q) beschreibt den Anteil von A an der Gewinnerwartung. Nach q aufgelöst erhalten wir:

$$q = \frac{q_1\,p_1\,e_1 + q_2\,p_2\,e_2}{(p_1 + p_2)\,(e_1 + e_2)}$$

Im allgemeinen liefert dieser Ausdruck keine von der Einsatzverteilung unabhängige Festsetzung der "Verbundquote" q. Anders bei stabilen Wetten. Für diese gilt nämlich nach dem oben bewiesenen Stabilitätskriterium: $q_1\,p_1 = q_2\,p_2 = \lambda + 1$ (λ Stabilitätskoeffizient), woraus mit $p = p_1 + p_2 = P(A)$ folgt:

$$q = \frac{(\lambda + 1)\,(e_1 + e_2)}{p(e_1 + e_2)} = \frac{\lambda + 1}{p}$$

Die Konstanz der Produkte aus Quote und Wahrscheinlichkeit gilt (bei stabilen Multiwetten) demnach auch für beliebige zusammengesetzte Ereignisse: $q\,p = \lambda + 1$.

Die Formel zur Berechnung der Verbundquote q aus den Einzelquoten q_1 und q_2 ergibt sich aus dem bisher Hergeleiteten ohne Mühe:

■ Satz über die Verbundquote bei stabilen Wetten

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$$

Beweis: $\frac{1}{q} = \frac{p}{\lambda+1} = \frac{p_1+p_2}{\lambda+1} = \frac{p_1}{\lambda+1} + \frac{p_2}{\lambda+1} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ ■

Anmerkung: Die Beziehung zwischen Verbundquote und Einzelquoten bei erwartungsstabilen Multiwetten ist formal identisch mit der aus der Elektrizitätslehre bekannten Beziehung zwischen Gesamtwiderstand und parallel geschalteten Einzelwiderständen.

Aufbau des Roulettspiels

Die folgende kleine Studie zum Aufbau des Roulett-Spiels nutzt das begriffliche Instrumentarium der Abschnitte über Elementare Wetten und Multiwetten. Auch die Materialien zum Roulett (Satzmöglichkeiten und Gewinnchancen auf dem Tableau) sollten bekannt sein.

Unser Vorgehen ähnelt ein wenig einer "Neu-Erfindung" des Spiels. Am Anfang steht eine Liste mit plausiblen und zweckmäßigen Anforderungen, aus der dann schrittweise die konkreten Eigenschaften und Strukturen des Spiel deduziert werden.

■ Grundlegende Forderungen

Folgende (noch recht allgemein gehaltene) Eigenschaften werden für Roulett gefordert:

R1. Es handelt sich um ein reines Glückspiel, d.h. Gewinn und Verlust werden zufällig und nicht aufgrund von Geschicklichkeit und intelligentem Verhalten realisiert. Die Versuchsvorrichtung (Kessel) ist dazu mit einer Anzahl gleichwahrscheinlicher Ausgänge versehen. Als Vorbild kann ein Bernoulli-Rad mit gleichgroßen Sektoren dienen.

R2. Die Ausgänge sind Zahlen: $\Omega = \{0, 1, \ ..., n\}$. Die Zählung beginnt bei 0, weil dem damit verbundenen Ereignis *Zero* eine besondere Rolle zukommen soll. Die Zahl n werden wir später festlegen.

R3. a) Damit der Bankhalter ruhig schlafen kann, wird Erwartungsstabilität verlangt. b) Um die Bank in eine Vorteilsposition zu bringen, muss der Stabilitätskoeffizient negativ sein ($\lambda < 0$). c) Um die Spieler zu motivieren, muss die Gewinnerwartung maximal sein.

R4. Die Auszahlungsquoten auf alle wettbaren Ereignisse sind ganze Zahlen.

R5. Um den Spielern Abwechslung zu bieten, werden möglichst viele zusammengesetzte Ereignisse in das Wettgeschehen einbezogen.

R6. Bei der Realisierung des Geräts ist ein optimaler Kompromiss zu finden zwischen der physikalischen Kontrolle (der Gleichverteilung) einerseits und der Übersichtlichkeit für die Spielteilnehmer (Größe des Tableaus).

■ Stabilitätskoeffizient und Quote

Die Wahrscheinlichkeiten der Roulett-Zahlen k seien p_k $(k \in \Omega)$. Es gilt nach **R1** und **R2:** $p_0 = p_1 =. .. = p_n = \frac{1}{n+1}$. Wir notieren kürzer $p = p_k$.

Mit q_k bezeichnen wir die Auszahlungsquote für die Zahl k.

Wird die Forderung **R3** a) erfüllt, so liefert das Stabilitätskriterium: $q_k\ p_k = \lambda + 1$. Daraus ergibt sich sofort, dass alle Zahlen k dieselbe Quote $q\,(= q_k)$ erhalten. Wir lösen die Gleichung nach λ auf:

$$\lambda = q\ p - 1 = \frac{q}{n+1} - 1$$

Die in **R3** b) geforderte Bedingung $\lambda < 0$ ist daher genau dann erfüllt, wenn $q < n + 1$; dabei ist **R4** zufolge q als ganze Zahl zu wählen. Die Forderung **R3** c) nach größtmöglicher Gewinnerwartung (für den Spieler) macht diese Wahl eindeutig. Denn für eine stabile Wette gilt $E(G) = \lambda\, S$, d.h. wir müssen q so festlegen, dass λ maximal wird. Dies ist genau für $q = n$ der Fall. Insgesamt erhalten wir damit Werte für die Einzelquote und den Stabilitätskoeffizienten, die nur noch von der Tableaugröße n abhängen:

$$q = n \text{ und } \lambda = -\frac{1}{n+1}$$

■ Verbundquoten und Tableau

Um **R5** Genüge zu tun, werden zusammengesetzte Ereignisse $A \subset \Omega$ in das Wettgeschehen einbezogen. Nach **R4** muss auch deren Quote $q(A)$ ganz sein. Es ergibt sich nach dem *Satz über die Verbundquoten* bei stabilen Multiwetten:

$$\frac{1}{q(A)} = \underbrace{\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}}_{|A|-\text{mal}} = \frac{|A|}{q}$$

und damit:

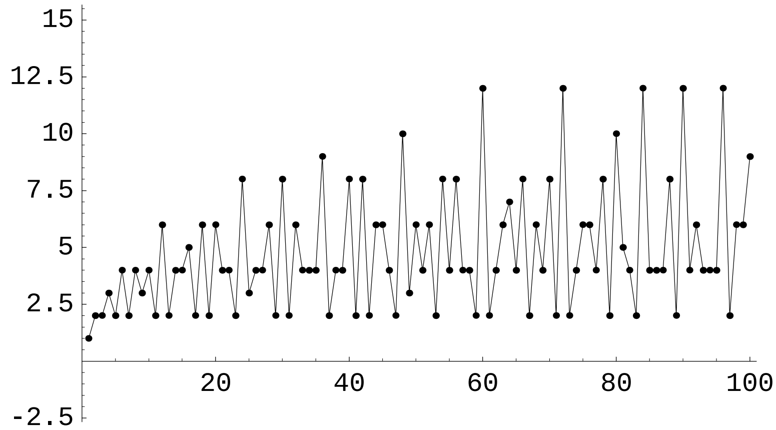
$$q(A) = \frac{q}{|A|} = \frac{n}{|A|}$$

Damit möglichst viele $A's$ definiert werden können, muss n zahlreiche Teiler besitzen. Bei $n = 29$ etwa erhielten wir nicht eine einzige zusammengesetzte Gewinnchance. Auf der anderen Seite verhindert die Forderung **R6** zu große Werte von n. Denn damit würde das Tableau zu unübersichtlich, aber auch die Fächer bzw. der zugehörige Sektorwinkel des Kessels zu klein für eine zuverlässige Laplace-Maschine. Aus Gründen der Praktikabilität wird man daher $n \leq 100$ einschränken.

Glücklicherweise benötigen wir für eine größere Teilermenge von n nicht unbedingt auch große Zahlen. Ist n aus wenigen kleinen Primfaktoren aufgebaut, so hat sie viele Teiler. Wir verschaffen uns einen Funktionsverlauf der Teileranzahl von n für $1 \leq n \leq 100$:

```
<< Graphics`Graphics`
<< Modellbildung`Verteilungen`
```

```
ta = Table[Length[Divisors[n]], {n, 1, 100}];
LinienDiagramm[ta, 1]
```

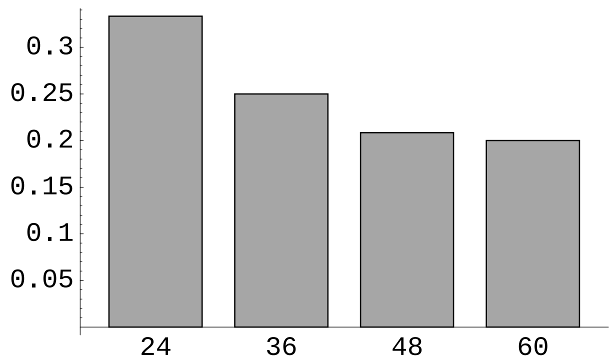


Die größte Teileranzahl, die in diesem Intervall vorkommt, ist 12 (für n = 60, 72, 84, 90, 96). Die nächstniedrigeren Anzahlen sind 10 (für n = 48, 80) und 9 (für n = 36, 100). Immerhin hat die kleine Zahl n = 24 bereits 8 Teiler.

Fazit:

Als brauchbare Werte für n bleiben: 24, 36, 48, 60.

Für welches n sollen wir uns entscheiden? – Natürlich ist das keine rein mathematische Frage mehr. Alle vier Werte kommen prinzipiell in Betracht. Es ließe sich allenfalls noch ihre "Ergiebigkeit" in Form des Quotienten $\frac{t(n)}{n}$ messen, wobei $t(n)$ = *Teileranzahl von n* bedeutet:



Bei diesem Test schneidet die 24 am besten ab! Tatsächlich gibt es auch ein dem Roulett verwandtes Spiel namens *Roulca*, das auf dieser Zahl aufbaut. Es wurde von dem Croupier Josef Schlosser während seiner Kriegsgefangenschaft in Frankreich erfunden und später im Kleinen Saal des Casinos Baden-Baden gespielt.

Bekanntlich baut das Roulett-Spiel auf dem "zweitbesten" Wert n = 36 auf. Zu jedem echten Teiler t von 36 erhalten wir aus unserer oben hergeleiteten Verbundquoten-Formel eine ganze Auszahlungsquote q und damit einen Typ von Gewinnchance:

Teiler t	**Quote** q	**Ereignisse ("Chancen")**
18	2	sog. Einfache Chancen (18 Zahlen)
12	3	Dutzend, Kolonne (12 Zahlen)
9	4	[*nicht realisiert*]
6	6	Einfache Transversale (6 Zahlen)
4	9	Carré (4 Zahlen)
3	12	Volle Transversale (3 Zahlen)
2	18	Cheval (2 Zahlen)
1	36	Plein (1 Zahl)

Bei den einfachen Chancen *Manque* (1-18) und *Passe* (19-36) sowie bei allen Chancen mit Quote $q \geq 4$ sind die Zahlenfelder verbunden. Eine Chance mit 9 Feldern wurde (vermutlich aufgrund der 3×12-Tableau-Geometrie nicht realisiert. Man beachte: Im Regelwerk des Roulett werden die Gewinnzahlungen durch die Nettoquoten $\hat{q} = q - 1$ angegeben. Für die "Bruttoquoten" bestätigt man die im Satz über die Verbundquote formulierte "Summenregel" (als Übungsaufgabe).

■ Gewinnerwartung

Der Stabilitätskoeffizient des Roulett-Spiels beträgt $\lambda = -\frac{1}{n+1} = -\frac{1}{37} \approx -0.027$. Danach ist die Gewinnerwartung $-0.0027 \times \mathit{Einsatzsumme}$, d.h. unabhängig von der Art, wie die Spielchips auf dem Tableau verteilt werden, haben die Spieler im Mittel mit einem Verlust von 2.7 % ihrer Einsätze zu rechnen. Ein irgendwie geartetes "Spielsystem", das sichere Gewinne garantiert, ist damit ausgeschlossen.

Die berechnete Gewinnerwartung gilt allerdings nur für die nicht-einfachen Chancen. Der Grund dafür liegt darin, dass bei Ausgang 0 (*Zero*) die Einfachen Chancen (Rot, Schwarz, usw.) mit etwas mehr Milde behandelt werden. Die Einsätze auf ihnen gehen nicht direkt verloren, und der Spieler erhält zwei Wahlmöglichkeiten (was die Sache rechnerisch etwas komplizierter macht): 1. Sein Einsatz geht zur Hälfte verloren, oder 2. er wird gesperrt (*en prison*). Kommt beim nächsten Spiel wieder Zero, erhält die Bank den Einsatz, andernfalls wird er wieder freigegeben (vorausgesetzt die Einfache Chance, auf der er liegt, gewinnt). Das klassische französische Roulett sieht bei wiederholtem Zero sogar eine zweite Sperrung vor, die durch zwei Freigaben wieder aufgehoben werden muss.

Es soll hier darauf verzichtet werden, aus diesem Reglement und seinen Varianten die jeweiligen exakten Stabilitätskoeffizienten für das Einfach-Chancen-Spiel zu berechnen. Vgl. dazu [P. Davies, A.S.C. Ross: *Repeated zero at roulette*. The Mathematical Gazette **63**, No. 423 (1979), 54-56]. – Gehen wir von der vereinfachten Annahme aus, wonach bei Zero die Bank die Hälfte des Einsatzes auf Einfachen Chancen einzieht, so ergibt sich: $\lambda = -\frac{1}{74} \approx -0.0135$ (zur Übung). Dieser Wert ist als realistische Näherung an die Realität zu betrachten.

Wetten auf Einfache Chancen haben (nicht zuletzt angesichts der gemäßigt negativen Gewinnerwartung) ihren Reiz. Wer 1000 € auf Rot setzt, gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von 48.6 % weitere 1000 € dazu. Verglichen mit den Gewinn-Wahrscheinlichkeiten beim Lotto und anderen Totalisator-Spielen ist dies ein außerordentlich hoher Wert. Z.B. gewinnt man "4 Richtige" beim Lotto (6 aus 49) mit weniger als 1 Promille! Beim Roulett sind natürlich größere Einsätze erforderlich und entsprechend gute Nerven, um die Alles-oder-Nichts-Situation auszuhalten. Bei längerem Wetten mit kleineren Einsätzen beeinträchtigt ein Spieler die Chance, von einer Laune des Zufalls zu profitieren, da dann die größere Anzahl der Spieldurchgänge zum statistischen Ausgleich und damit zu einer besseren Approximation an die theoretische Gewinnerwartung führt – und die ist bekanntlich negativ!

Eine doppelte Buchmacherwette

Aufgabe

In Coin City entscheidet sich am Wochenende die Stadt-Boxmeisterschaft im Halbschwergewicht zwischen Johnny Cash und Nat Miller. Bruno, der gerne bei solchen Gelegenheiten wettet, setzt bei seinem Buchmacher 100 $ auf den Sieg von Cash bei einem Wettverhältnis $10:13$. Als Bruno am Freitag vor dem Kampf in einem anderen Stadtteil Einkäufe macht, bemerkt er dort zufällig einen Buchmacher, der Wetten auf den Sieg von Miller im Verhältnis $5:4$ annimmt. Bruno denkt einen Augenblick nach (... ? ! ...) und findet einen Einsatzbetrag, der ihm bei jedem Ausgang des Kampfs einen positiven Gewinn garantiert.

Welche Einsatzbeträge kommen für Bruno (bei der zweiten Wette) in Frage? Welche Gewinne können erzielt werden? Kann Bruno es so einrichten, dass die Höhe seines Gewinns unabhängig davon ist, wer als Sieger aus dem Kampf hervorgeht?

Lösung

Bezeichnungen:

$A_1 =$ Sieg von Cash, $A_2 =$ Sieg von Miller

Auszahlungsquoten:

$q_1 = \frac{10+13}{10} = 2.3$, $q_2 = \frac{5+4}{5} = 1.8$

Einsätze:

$e_1 = 100$, $e_2 = x$

■ Welche Einsatzbeträge x kommen in Frage?

Wenn beide Wetten (zu einer vollständigen Multiwette zusammengefasst) einen positiven Gewinn bringen sollen, sind die Bedingungen zu erfüllen:

$$q_1\, e_1 - (e_1 + e_2) > 0$$
$$q_2\, e_2 - (e_1 + e_2) > 0$$

Das Lösungsintervall für den 2. Einsatz lässt sich leicht per Hand ausrechnen.

Auch *Mathematica* kann Ungleichungen lösen:

```
<< Algebra`InequalitySolve`
```

```
InequalitySolve[
 {2.3 * 100 - (100 + x) > 0,
  1.8 * x - (100 + x) > 0},
 x]
```

```
125. < x < 130.
```

e_2 kann somit im offenen Intervall (125; 130) gewählt werden.

Zum Beispiel ergibt sich für $e_2 = 126$ \$ die folgende Situation:

```
{2.3 * 100 - (100 + x), 1.8 * x - (100 + x)} /. x → 126
```

```
{4., 0.8}
```

Das heißt, bei einem Sieg von Cash beläuft sich Bruno's Reingewinn auf 4 $, bei einem Sieg von Miller auf 80 Cents.

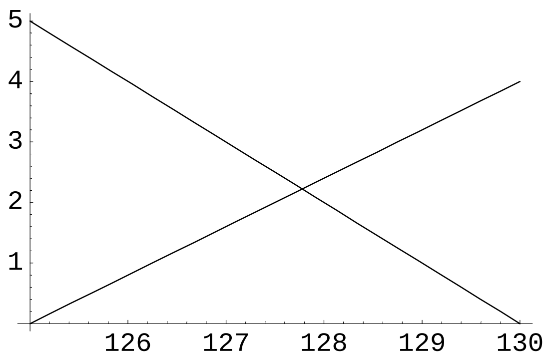
■ Welche Gewinne können erzielt werden?

Wir definieren die beiden Gewinnfunktionen:

```
g1[x_] := 2.3 * 100 - (100 + x);
g2[x_] := 1.8 * x - (100 + x);
```

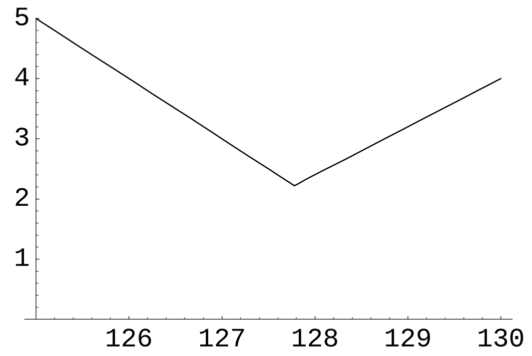
Die Funktionsgraphen von g1 und g2:

```
Plot[{g1[x], g2[x]}, {x, 125, 130}];
```



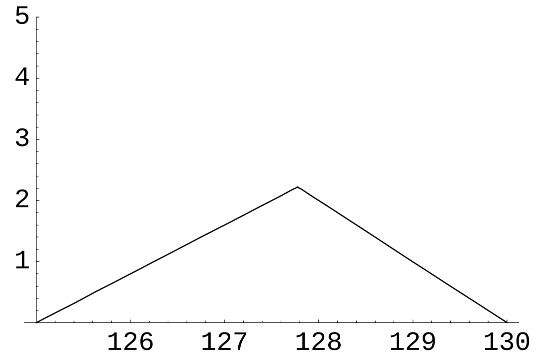
Im günstigsten Fall erzielbare positive Gewinne:

```
Plot[Max[g1[x], g2[x]], {x, 125, 130}, PlotRange → {0, 5}];
```



Im ungünstigsten Fall erzielbare positive Gewinne:

```
Plot[Min[g1[x], g2[x]], {x, 125, 130}, PlotRange → {0, 5}];
```



■ Gleicher Gewinn unabhängig vom Ausgang der Wette?

Die Bedingung dafür lautet: $g_1(x) = g_2(x)$

```
x = x /. Solve[g1[x] == g2[x], x][[1]]
```

```
127.778
```

In diesem Fall beträgt der Gewinn 2 $ 22 Cent:

```
g1[x]
```

```
2.22222
```

Ungefähr diesen Betrag hatte Bruno für die Fahrt mit öffentlichen Verkehrsmitteln in jenen Stadtbezirk aufbringen müssen, wo er auf den zweiten Buchmacher stieß.

Gewinnsichere Einsatzverteilungen

Das Problem

■ Vorbemerkungen

Das einführende Beispiel "Eine doppelte Buchmacherwette" enthält die Aufgabe, zu einer vollständigen Multiwette mit zwei Ausgängen A_1, A_2 Einsätze e_1, e_2 zu bestimmen, die dem Spieler einen positiven Reingewinn unabhängig vom Wettausgang garantieren.

Die Möglichkeit einer solchen gewinnsicheren Einsatzverteilung hängt allein von den Auszahlungsquoten ab; die Wahrscheinlichkeiten der Ausgänge A_k spielen in diesem Zusammenhang keine Rolle.

Wir wollen das Problem in allgemeiner Form formulieren und lösen.

■ Formulierung des Problems

Wir setzen eine vollständige Multiwette mit sich gegenseitig ausschließenden Ausgängen $A_1, \; ..., A_n$ und zugehörigen Quoten $q_1, \; ..., q_n$ (sämtlich > 1) voraus. Der Einsatz eines Spielers auf A_k werde mit e_k bezeichnet, die Summe aller Einsätze mit $S = e_1 + ... + e_n$. Der Gewinn (Reingewinn), der bei Eintritt von A_k erzielt wird, lässt sich dann darstellen als

$$g_k = g_k(e_1, \; ..., e_n) = q_k \, e_k - S, \text{ wobei } 1 \le k \le n$$

Eine Einsatzverteilung $(e_1, \; ..., e_n)$ mit nichtnegativen e_k heiße **gewinnsicher**, wenn $g_k(e_1, \; ..., e_n) > 0$ für alle $k = 1, 2, \; ..., n$.

Aus der Definition ergibt sich sofort $e_k > 0$ für alle $k = 1, 2, \; ..., n$. (Bei einer gewinnsicheren Einsatzverteilung entsteht unter allen Umständen ein positiver Gewinn, es muss also auf sämtlichen Ausgängen ein positiver Einsatz gewettet werden.)

Wir stellen folgende Fragen:

1. Unter welcher (hinreichenden und/oder notwendigen) Bedingung für die Quoten gibt es gewinnsichere Einsatzverteilungen?

2. Wie lassen sich im Falle ihrer Existenz die Einsatzbeträge gewinnsicherer Verteilungen effektiv berechnen?

Defekt einer Wette

Der folgende Gedankengang hat heuristischen Charakter; er motiviert u.a. den Begriff *Defekt einer Wette*, der eine Schlüsselrolle bei der Lösung unseres Problems spielt.

Da auf alle A_k ein positiver Betrag gesetzt wird, liegt es nahe, die Multiwette auf jeweils $A_1, \; ..., \; A_n$ als elementare Wette auf das Ereignis $A \; (= A_1 + ... + A_n)$ zu deuten. Dabei ist S der Einsatz auf A.

Wir müssen nun noch die Verbundquote q für A festlegen.

Das Kohärenzprinzip (wonach sich die Gewinnerwartung durch die hier vorgenommene Bündelung der Wettausgänge nicht ändern soll) liefert im allgemeinen keine Quote, die von den Einsätzen $e_1, \; ..., \; e_n$ unabhängig ist. Wir wollen daher (vorübergehend) annehmen, dass bei jedem Wettausgang ein konstanter Reingewinn g entsteht: $g_1 =. .. = g_n = g$. In diesem Fall erhalten wir offenbar eine stabile Wette (es ist $E(G) = p_1 \, g + ... + p_n \, g = g$).

Nach dem *Satz über die Verbundquote* (vgl. den Abschnitt "Multiwetten") gilt in diesem Fall für die (nach dem Kohärenzprinzip ermittelten) Quote q und den zugehörigen Wettquotienten w:

$$w = \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + ... + \frac{1}{q_n}$$

Ist der Wettquotient $w \leq 1$, lässt er sich als subjektive Wahrscheinlichkeit deuten, die der Spieler dem Ereignis A zuschreibt. Da A objektiv sicher ist, erscheint allein $w = 1$ als vernünftig. Nichtsdestoweniger sind in der Praxis für w Werte < 1 und > 1 möglich. (So ließe sich etwa im Beispiel "Doppelte Buchmacherwette" der Wert $w = \frac{10}{23} + \frac{5}{9} = \frac{205}{207} < 1$ dadurch erklären, dass die erste Quote von einem Buchmacher festgelegt wird, der nichts von dem zweiten Buchmacher und seiner Quote für das Gegenereignis weiß – und umgekehrt.)

■ Definition

Die Differenz $v := 1 - w$ bzw. ausführlicher

$$v := 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}$$

heiße **Defekt** der Multiwette mit den Auszahlungsquoten $q_1, \; ..., \; q_n$.

Das Hauptresultat

■ Vorbereitung

Wir wollen – zur Vorbereitung des Hauptresultats – die heuristische Überlegung des vorangehenden Abschnitts noch etwas ausbauen. Dabei gelte weiterhin die Annahme: $g_1 =. .. = g_n = g$.

Es ergibt sich: $e_k\, q_k = g + S = \text{const}$, oder als Verhältnisgleichung geschrieben:

(*) $e_1 : e_2 : \;... : e_n = \frac{1}{q_1} : \frac{1}{q_2} : \;... : \frac{1}{q_n}$

Daraus lassen sich nun Einsätze e_k bestimmen, die einen konstanten Gewinn g unabhängig vom Ausgang der Wette garantieren.

Da das Ereignis A in jedem Fall eintritt, ergibt sich der sichere Reingewinn $g = q\,S - S = (q-1)\,S$. Wir stellen damit die Einsatzsumme S wie folgt dar:

(**) $S = \frac{g}{q-1} = \frac{g}{q\left(1-\frac{1}{q}\right)} = \frac{g}{q \cdot v}$

Tatsächlich lässt sich aus (*) und (**) folgern:

$$e_k = \frac{g}{q_k\, v} \text{ für } k = 1,\, 2,\; ...,\, n$$

<u>Beweis:</u> Man beachte, dass $e_1 + ... + e_n = S$ und $\frac{g}{q_1\, v} + ... + \frac{g}{q_n\, v} = \frac{g}{q\, v}$ gilt. Der Rest ergibt sich dann aus der folgenden **Hilfsbehauptung**:

> Es sei $x_1 + ... + x_n = y_1 + ... + y_n \neq 0$ und $x_1 : \;... : x_n = y_1 : \;... : y_n$. Dann gilt $x_k = y_k$ für alle $k = 1,\; ...,\, n$.

<u>Beweis der Hilfsbehauptung:</u> Es gibt eine reelle Zahl α, sodass $x_k = \alpha\, y_k$ $(1 \leq k \leq n)$. Damit folgt $\sum_{k=1}^n x_k = \alpha \sum_{k=1}^n y_k$ und $\alpha = 1$. ■

■ Satz über gewinnsichere Einsatzverteilungen

> Folgende Aussagen sind äquivalent:
>
> (1) Zu jedem $g > 0$ existiert genau eine Einsatzverteilung mit $g_1 =. .. = g_n = g$.
>
> (2) Es gibt eine Einsatzverteilung mit $g_1 > 0,\; ...,\, g_n > 0$.
>
> (3) Für den Defekt v gilt: $v > 0$.
>
> (4) Für alle Einsatzverteilungen gilt: $g_1 + ... + g_n > 0$.

<u>Beweis:</u> Zunächst beweisen wir die Äquivalenz von (1)-(3) durch Ringschluss; anschließend wird $(3) \Leftrightarrow (4)$ gezeigt.

(1) ⇒ (2): Eine nach (1) existierende Einsatzverteilung erfüllt natürlich auch Bedingung (2).

(2) ⇒ (3): Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Einsatzverteilung, die der Bedingung (2) genügt, d.h. es gilt $q_k\, e_k - S = g_k > 0$ mit $1 \le k \le n$. Wir erhalten daraus $\frac{1}{q_k} < \frac{e_k}{S}$ und weiter $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{S} = 1$. Somit gilt für den Defekt: $v > 0$.

(3) ⇒ (1): Sei $g > 0$ vorgegeben und $v > 0$ (wie in (3) vorausgesetzt). Wir definieren eine Einsatzverteilung durch $e_k := \frac{g}{q_k\, v}$ und zeigen $g_k = g$ für $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$g_k(e_1, \ldots, e_n) = q_k\, e_k - S = \frac{g}{v} - \sum_{k=1}^{n} e_k = \frac{g}{v} - \sum_{k=1}^{n} \frac{g}{q_k\, v} = \frac{g}{v}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}\right) = g$$

Tatsächlich sind die so definierten e_k $(1 \le k \le n)$ die einzige Lösung des Gleichungssystems $q_k\, e_k - (e_1 + \ldots + e_n) = g$. Man zeigt dazu, dass die zugehörige Matrix

$$\begin{pmatrix} \hat{q}_1 & -1 & \ldots & -1 \\ -1 & \hat{q}_2 & \ldots & -1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -1 & -1 & \ldots & \hat{q}_n \end{pmatrix}$$

mit $\hat{q}_k = q_k - 1$ (Nettoquoten) ist regulär ist (d.h. den Rang n besitzt).

(3) ⇔ (4): Für eine beliebige Einsatzverteilung $(e_1, \ldots, e_n)$ gilt:

$$v > 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k} < 1 = \frac{1}{S} \sum_{k=1}^{n} e_k$$

$$\Leftrightarrow 0 < \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{e_k}{S} - \frac{1}{q_k} \right)$$

$$\Leftrightarrow 0 < \sum_{k=1}^{n} (q_k\, e_k - S) = \sum_{k=1}^{n} g_k$$

■

■ Folgerungen

Der vorangehende Satz charakterisiert Wetten W, bei denen gewinnsichere Einsatzverteilungen möglich sind. Das hinreichende und notwendige Kriterium dafür lautet, dass der Defekt v von W positiv ist: $v = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k} > 0$. Dem Beweis entnimmt man, wie Einsätze $e_1, \ldots, e_n$ effektiv zu berechnen sind, für die sich ein vorgegebener konstanter Reingewinn $g\ (>0)$ ergibt. Es gilt: $e_k = \frac{g}{q_k\, v}$ für $k = 1, 2, \ldots, n$.

<u>Beispiel:</u> Eine vollständige Multiwette habe die Quoten $q_1 = 2$, $q_2 = 3.5$, $q_3 = 5$. Wegen $v = 0.0142857 > 0$ lassen sich gewinnsichere Einsätze finden, z.B. garantieren $e_1 = 3500$, $e_2 = 2000$, $e_3 = 1400$ einen sicheren Gewinn von 100 Geldeinheiten unabhängig vom Wettausgang.

Wenn die Einsatzsumme S vorgegeben wird (um damit die Ausgaben für die Wette zu beschränken), so ergibt sich für den dann erzielbaren konstanten Gewinn g:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \frac{g}{q_k\, v} = \frac{g}{v}(1 - v)$$

also: $g = \frac{v}{1-v} S$. Die zugehörigen Einsätze lauten damit:

$$e_k = \frac{S}{1-v} \cdot \frac{1}{q_k} \text{ für } k = 1, 2, \ldots, n$$

Liegt bei einer Wette W eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $(p_1, \ldots, p_n)$ vor, so lässt sich ein einfacher Zusammenhang zwischen Gewinnerwartung und Defekt von W erkennen:

Ist W bei allen Einsatzverteilungen günstig (fair, ungünstig), so ist der Defekt von W positiv (Null, negativ).

Beweis: Wir behandeln den Fall, dass W günstig bei allen Einsatzverteilungen $(e_1, \ldots, e_n)$ ist, d.h. es gilt: $E(G) = \sum_{k=1}^n (q_k\, p_k - 1)\, e_k > 0$, und damit auch $q_k\, p_k - 1 > 0$ für alle $k = 1, \ldots, n$. Wir erhalten hieraus $\frac{1}{q_k} < p_k$ und schließlich $v = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k} > 1 - \sum_{k=1}^n p_k = 0$. – Analog verlaufen die übrigen Fälle. ■

Defekt und Stabilitätskoeffizient

Bei stabilen Wetten lässt sich der Zusammenhang zwischen Gewinnerwartung und Defekt v durch den Stabilitätskoeffizienten λ ausdrücken:

$$\lambda = \frac{v}{1-v}$$

Beweis: Für eine stabile Wette gilt: $q_k\, p_k = \lambda + 1$, mithin erhalten wir $\frac{1}{q_k} = \frac{p_k}{\lambda+1}$ und

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{q_k} = \frac{1}{\lambda+1} \sum_{k=1}^n p_k = \frac{1}{\lambda+1}$$

Hieraus ergibt sich $v = 1 - \frac{1}{\lambda+1}$ sowie $\lambda = \frac{v}{1-v}$. ■

Folgerung für Totalisator-Spiele:

Wegen $\lambda = \theta - 1$ wird hier $v = 1 - \frac{1}{\theta}$. Es ist ferner $\theta = 1$ genau dann, wenn $v = 0$.

Geometrische Deutung

Dieser Paragraph wird zu einem späteren Zeitpunkt nachgeliefert.