© Prof. Dr. Alfred Schreiber | 2003-04-19

"Time is money" – Zeitwert des Geldes

Die Zeitpräferenzrate

Abel soll heute von Bodo 5 Fische bekommen. Bodo erscheint mit leeren Händen und bittet darum, die heutige Lieferung ausnahmsweise anderweitig verwenden zu dürfen. Zum Ausgleich verspricht er, Abel morgen 6 Fische zu bringen. Abel ist einverstanden.

Es bezeichne $q = \frac{6}{5}\ (= 1.2)$ den Quotienten von künftiger Konsummenge zur Menge des Konsums, der aufgeschoben wird. Als Wachstumsfaktor ist er ein Maß für die Ungeduld, die Abel beim Verzicht auf 5 Fische hat. Die zugehörige Wachstumsrate $r = q - 1 = 20\,\%$ heißt *Zeitpräferenzrate*.

Mit Zeitpräferenzraten lässt sich die zeitliche Verschiebung (tauschfähiger) Konsumeinheiten ausgleichen. Handelt es sich um Geldwerte, so ist die Zeitpräferenzrate der Zinssatz.

1000 Euro auf der Zeitachse

■ Diskrete Zeit

Wir unterteilen die Zeitachse in ganzzahlige Perioden (z.B. Jahre):

0 (Gegenwart) – **1** (Ende der ersten Periode) – **2** (Ende der zweiten Periode) – usf. ...

Es bezeichnen $0, 1, 2, 3, \ \ldots$ die Zeitpunkte am Ende der i-ten Periode ($i = 0, 1, 2, 3, \ \ldots$). Das Ende der nullten Periode (= Beginn der ersten Periode) wird als *Gegenwart* vereinbart.

Wir betrachten die ersten 3 Perioden und legen Zeitpräferenzraten (Zinssätze) von beziehentlich

$2\,\% - 5\,\% - 3\,\%$

zugrunde.

■ 1000 € heute

Abel besitzt gegenwärtig – d.h. zum Zeitpunkt 0 – 1000 €.

Wir wollen diesen Betrag auf Zeitpunkte der näheren Zukunft verschieben:

1000 € heute	$\longrightarrow$	$1000 \cdot 1.02 = 1020$ €	zum Zeitpunkt 1
	$\longrightarrow$	$1020 \cdot 1.05 = 1071$ €	zum Zeitpunkt 2
	$\longrightarrow$	$1071 \cdot 1.03 = 1103.13$ €	zum Zeitpunkt 3

Vom Standpunkt der Zinsrechnung sind 1000 € heute von gleichem Wert wie z.B. 1071 € zum Zeitpunkt 2. Das ist natürlich nur dann vertretbar, wenn die *kalkulatorischen Zinsraten* (hier: 0.02 und 0.05) die faktische Zeitpräferenz zutreffend beschreiben.

■ 1000 € morgen

Bodo sagt Abel den Betrag von 1000 € zum Zeitpunkt 1 sicher zu.

Der heutige Wert dieser Zusicherung ergibt sich durch sog. *Diskontieren* (oder: *Abzinsen*): $\frac{1000}{1.02} = 980.39$ € [alle Geldwerte kaufmännisch auf 2 Stellen nach dem Dezimalpunkt gerundet].

Besteht Bodo's Zusicherung für den Zeitpunkt 2, so gilt für ihren heutigen Wert x:

$$x \cdot 1.02 \cdot 1.05 = 1000 \Longrightarrow$$
$$x = \frac{1000}{1.02 \cdot 1.05} = 933.71 \text{ €}$$

Der auf den Zeitpunkt 0 diskontierte Wert einer künftigen Zahlung heißt ihr **Barwert**.

Addition

■ Zwei unabhängige Zahlungen

Abel bekommt von Bodo 1000 € in 1 Jahr, außerdem von Christian 800 € in 2 Jahren.

Der heutige Wert dieser Verbindlichkeiten:

Bodo: $\frac{1000}{1.02} = 980.39$ €

Christian: $\frac{800}{1.02 \cdot 1.05} = 746.97$ €

Die Diskontierung erzeugt Barwerte, d.h. auf denselben Zeitpunkt 0 bezogene Größen. Diese können daher addiert werden. Für Abel haben die beiden Zahlungszusagen (heute) den Wert 1727.36 €.

■ Zusammenfassung und Verallgemeinerung

1. Werden mehrere Zahlungen zu verschiedenen Zeitpunkten zugesichert, so erreicht man durch Bezug aller Zahlungen auf einen festen Zeitpunkt die Vergleichbarkeit der Geldbeträge (und damit ihre Addierbarkeit).

2. Der Bezugszeitpunkt ist zweckmäßigerweise der Zeitpunkt 0 (Gegenwart). Grundsätzlich könnte aber jeder beliebige Zeitpunkt herangezogen werden.

3. Die Summe von Barwerten diverser Einzelzahlungen ist ihrer Natur nach ebenfalls ein Barwert (der allerdings i.a. nicht durch Diskontierung eines Betrags entsteht).

4. Der Barwert einer Zahlungsfolge $c = (c_0, c_1, ..., c_{N-1})$ kann als Gesamtnutzen zeitlich verteilter Teilnutzen (d.h. der einzelnen Zahlungsbeträge) angesehen werden. Das *additive Modell* steht hierbei Pate. Die Normierung der Nutzenwerte unterbleibt (da die auftretenden monetären Werte bereits vergleichbar sind, s.o.).

© Prof. Dr. Alfred Schreiber | 2003-04-19

Soll Fuhrmann in ein neues Taxi investieren?

■ Fallbeispiel

Taxiunternehmer Fuhrmann überlegt, ob er einen zusätzlichen Gebraucht-Pkw anschaffen soll.

Kosten: 20000 €,

Nutzungsdauer: 3 Jahre.

Fuhrmann schätzt, dass der zusätzliche Wagen ihm

im 1. Jahr 4000 €,

im 2. Jahr 14000 €

im 3. Jahr 5000 €

mehr einbringt.

■ Barwerte ermitteln

Wir wollen die Barwerte der Periodenüberschüsse ermitteln. Dazu brauchen wir einen kalkulatorischen Zinssatz. Fuhrmann legt auf Empfehlung seiner Hausbank $r = 0.035$ zugrunde.

Die Zahlungsreihe lautet: $c = (-20000, 4000, 14000, 5000)$. Damit ergibt sich:

Barwert von $c_1 = \frac{4000}{1.035} = 3864.73$

Barwert von $c_2 = \frac{14000}{1.035^2} = 13069.15$

Barwert von $c_3 = \frac{5000}{1.035^3} = 4509.71$

Es ist $\text{PV}(c; 0.035) = -20000 + 3864.73 + 13069.15 + 4509.71 \approx 1443$ € (auf ganze € abgerundet). Es erscheint (in Anbetracht der zu Grunde gelegten Daten) somit als <u>günstig</u>, in einen zusätzlichen Pkw zu investieren.

■ Automatisierte Lösung

Zunächst das Paket "Diskontierung" laden:

```
<< Modellbildung`Diskontierung`
```

Barwert (gesamt) ermitteln:

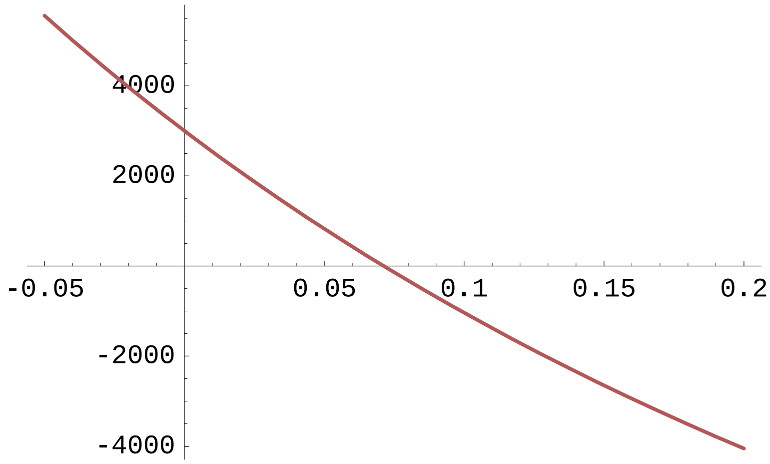
```
c = {-20000, 4000, 14000, 5000};
PV[c, 0.035]
```

```
1443.6
```

Die Investition erscheint als günstig!

Das folgende Schaubild zeigt, für welche Zinsraten der PV (noch) positiv ausfällt:

```
PvGraph[c, -0.05, 0.2];
```



Man erkennt, dass z.B. bei einem Zinssatz von 8 % der Barwert negativ wird. Die Entscheidung wird in diesem Fall nicht mehr zugunsten der Investition ausfallen. Die Alternative, die Investitionssumme von 20000 € für 3 Jahre mit 8 % bei der Bank verzinsen zu lassen, ist dann vorzuziehen.

© Prof. Dr. Alfred Schreiber | 2003-04-19

Der Barwert einer Zahlungsreihe

Die einführenden Überlegungen (zum "Zeitwert des Geldes" oder das Beispiel "Taxi Fuhrmann") legen den im Folgenden entwickelten Begriff des Barwertes einer Zahlungsreihe nahe.

Zahlungsreihen

Eine **Zahlungsreihe** $c = (c_0, c_1, ..., c_{N-1})$ ist eine endliche Folge von zeitlich verteilten (nachschüssigen) Einzelzahlungen. Es bezeichnet c_j den Geldwert der Zahlung am Ende der j-ten Periode. Die Zahlung c_0 erfolgt zu Beginn der ersten Periode.

Es soll durchweg vorausgesetzt werden, dass die Zahlungen mit Sicherheit erfolgen.

Sprechweisen:

$c_j < 0$: Einzahlung

$c_j > 0$: Auszahlung

$c_j = 0$: Nullzahlung (keine Zahlung)

Für jede der $N-1$ Perioden sei eine monetäre Zeitpräferenzrate (ein Zinssatz) r_j und damit ein Zinsfaktor $q_j = 1 + r_j$ als gültig zu Grunde gelegt ($1 \leq j \leq N-1$).

Barwerte

Die Folge der Zinsfaktoren $(q_1, ..., q_{N-1})$ wird dazu benutzt, jede Einzelzahlung c_j in einen auf die Gegenwart (Zeitpunkt 0) bezogenen Nutzenwert $u_j(c_j)$ umzurechnen; dieser **Barwert von** c_j entsteht durch schrittweise Diskontierung (Abzinsung) mit den Zinsfaktoren der Perioden j bis 1:

$$u_j(c_j) := \frac{c_j}{q_1 \cdot ... \cdot q_j}\text{, wobei } u_0(c_0) := c_0$$

Die $u_j(c_j)$ sind als Teilnutzenwerte der Zahlungen in den Perioden anzusehen. Als Barwerte sind sie vergleichbar; es bedarf somit keiner Normierung. Naturgemäß sind die Zahlungen präferenzunabhängig. Daher kann einer

Zahlungsreihe ein Gesamtnutzen zugeordnet werden, der im "additiven Modell" nichts anderes ist als die Summe der Einzelbarwerte (alle mit gleichem Gewicht berücksichtigt):

$$u(c) = u_0(c_0) + u_1(c_1) + \ldots + u_{N-1}(c_{N-1})$$

Wir definieren diesen Gesamtnutzen der Zahlungsreihe $c = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$ als ihren **Barwert** ("present value"):

$$\mathrm{PV}(c \mid q_1, \ldots, q_{N-1}) := c_0 + \frac{c_1}{q_1} + \frac{c_2}{q_1\, q_2} + \ldots + \frac{c_{N-1}}{q_1\, q_2 \cdots q_{N-1}}$$

Der hier gegebene Ausdruck repräsentiert das Diskontierungsmodell für die Bewertung von Zahlungsreihen in allgemeiner Form [vgl. dazu auch das *Mathematica*-Paket Diskontierung.m].

■ Wichtiger Spezialfall: konstanter Zinsfaktor

Weisen alle Perioden des Betrachtungszeitraums den gleichen Zinsfaktor q auf, so nimmt die Funktion PV folgende Gestalt an:

$$\mathrm{PV}(c, q) := c_0 + \frac{c_1}{q} + \frac{c_2}{q^2} + \ldots + \frac{c_{N-1}}{q^{N-1}}$$

Wir schreiben auch (unter Hervorhebung der Zinsrate $r = q - 1$):

$$\mathrm{PV}(c; r) := c_0 + \frac{c_1}{1+r} + \frac{c_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{c_{N-1}}{(1+r)^{N-1}}$$

Entscheidungen mit PV als Wertfunktion

Zwei Handlungsalternativen a, a' mögen Zahlungsreihen c bzw. c' als Konsequenzen nach sich ziehen. Betrachtet man PV als Nutzenfunktion (im Zusammenhang einer Entscheidung bei Sicherheit zugleich: Wertfunktion), so liefert das Optimalitätprinzip sofort die Entscheidungsregel:

$$a > a', \text{ wenn } \mathrm{PV}(c; r) > \mathrm{PV}(c', r)$$

Bei Geldgeschäften geht es oft darum, sich für a (und eine damit verbundene Zahlungsreihe c) zu entscheiden oder in das Geschäft nicht einzuwilligen (Alternative a'). Letzteres zieht eine Folge von Nullzahlungen nach sich, für die in jedem Fall $\mathrm{PV} = 0$ ist.

Aus dieser Sicht erscheint (bei gegebener Zinsrate r) ein Geldgeschäft c als **günstig**, wenn $\mathrm{PV}(c; r) > 0$, andernfalls als **ungünstig** ($\mathrm{PV} < 0$) oder **neutral** ($\mathrm{PV} = 0$).

Bzgl. neutraler Geldgeschäfte besteht somit Indifferenz. Das gilt selbstredend für beide Geschäftspartner, die aus diesem Grund das Geschäft als fair empfinden.

© Prof. Dr. Alfred Schreiber | 2004-05-12

Die Rendite von Geldgeschäften

"*Ich werde ihm ein Angebot machen, das er nicht ablehnen kann*."

Der Pate

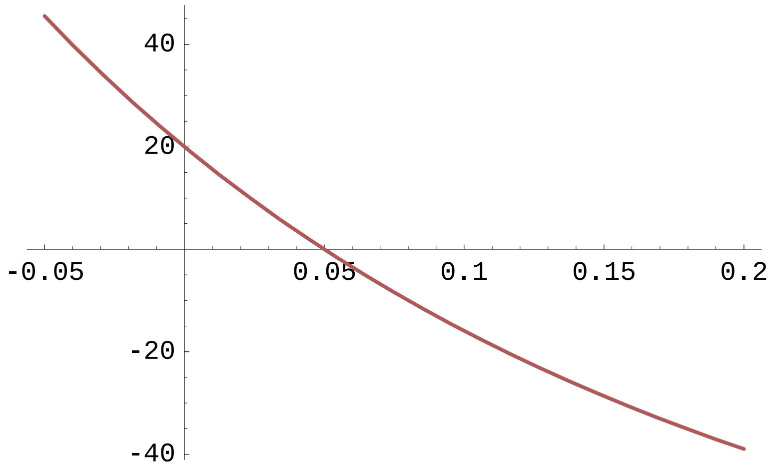
Problemstellung

Die Bewertung von Zahlungsreihen c mit Hilfe der Barwertfunktion PV beruht auf der Annahme eines kalkulatorischen Zinssatzes r für den betrachteten Zeitraum (u.U. für jede Periode einzeln).

Der "typische" Verlauf von PV(c; r) (zu fest vorgegebenem c) zeigt, dass PV als Funktion von r stark variiert. Somit wirkt sich jede Annahme über r unmittelbar auf das zugehörige Entscheidungsproblem aus (vgl. den letzten Abschnitt aus "Der Barwert einer Zahlungsreihe").

■ Demonstrationsbeispiel

```
<< Modellbildung`Diskontierung`
c = {-100, 20, -50, 70, 80};
PvGraph[c, -0.05, 0.2];
```



In diesem Beispiel beginnt der Spielraum für positive PV-Werte bei $r = 0$ und endet bei ca. $r = 0.05$.

■ Vergleich von Zahlungsreihen ohne Zinsvorgaben

Es ist wünschenswert, Zahlungsreihen auch dann bewerten (und vergleichen) zu können, wenn kalkulatorische Zinsraten nicht zur Verfügung stehen. Der Verzicht auf Zinsvorgaben ist aber schon allein deshalb zweckmäßig, weil damit die Lösung des Entscheidungsproblems nur noch von (den Daten) der Zahlungsreihe selbst, nicht jedoch von dem (variablen) Zinsparameter r abhängt.

Werfen wir einen Blick auf das obige Demonstrationsbeispiel und fragen: Wann müsste eine Zahlungsreihe höher bewertet werden als die vorliegende?

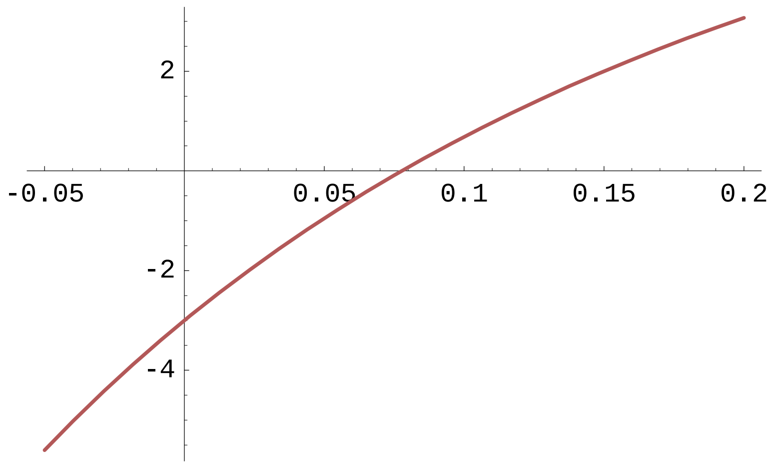
Eine plausible Antwort: Wenn der Spielraum für PV ≥ 0 größer ist (hier: der rechte Endpunkt des Intervalls, über dem PV nichtnegativ ausfällt).

Es liegt daher nahe, eine Zinsrate $r \geq 0$ zu bestimmen, für die $\mathrm{PV}(c;\, r) = 0$.

Im obigen Beispiel ergibt sich $r = 0.0499465\ldots$. Dieser Wert ist zugleich die größte Zinsrate, bei der (noch) $\mathrm{PV}(c;\, r) \geq 0$ gilt. Man kann ihn zur Bewertung der gegebenen Zahlungsreihe heranziehen [ein Vorschlag, der in seiner allgemeinen Form zurückgeht auf K. E. Boulding: Time and Investment. In: Economia 3 (1936), 196-220].

Enthält eine Zahlungsreihe (z.B. bei Kreditgeschäften) am Anfang Auszahlungen und danach lauter Einzahlungen ("Rückzahlungen"), so steigt die PV-Kurve monoton an:

```
PvGraph[{10, -1, -1, -1, -10}, -0.05, 0.2];
```



In diesem Fall würde der Spielraum für günstige Alternativen durch Verschieben der Nullstelle nach links vergrößert.

Der interne Zinssatz einer Zahlungsreihe

■ Definition

Hat die Gleichung $\mathrm{PV}(c;\, r) = 0$ eine einzige nichtnegative reelle Lösung r, so bezeichnet man sie als **interne** (auch: **effektive**) **Zinsrate** r_{int} von c. Der interne Zinssatz von c wird auch **Rendite** des zugehörigen Geldgeschäfts genannt.

Kommt ein Vertrag zweier Partner zustande, der eine Zahlungsreihe mit der Rendite r_{int} nach sich zieht, so ist dies für die Beteiligten ein faires Geschäft, wenn der Zinssatz bekannt ist und ohne Zwang vereinbart wird.

Die Einzahlungen des ersten Partners sind die Auszahlungen des zweiten, und umgekehrt. Bringt man in der Gleichung $\mathrm{PV}(c;\, r) = 0$ die (positiven) Auszahlungsterme auf die linke Seite und die (negativen) Einzahlungsterme auf die rechte Seite, so wird ersichtlich, dass die Gesamtzahlungen beider Partner denselben Barwert haben.

■ Anwendbarkeit

Die Rendite bzw. interne Zinsrate ist eine theoretische Größe, die beschreibt, wann die Ein- und Auszahlungen eines Geschäfts zum Ausgleich kommen. Ihre Bedeutung für Entscheidungen liegt vor allem darin, dass sie den Bereich der günstigen Handlungsalternativen begrenzt.

Ein Investor kann in der Realität allerdings nicht erwarten, dass die ihm zufließenden Auszahlungen sich in der Laufzeit des Vertrags zu immer demselben (internen) Zinssatz wieder anlegen lassen.

N.B.: Nur unter dieser **Wiederanlageprämisse** stellt sich das Geldgeschäft für die beteiligten Partner als neutral (fair) dar (z.B. der Fall bei entsprechenden vertraglichen Bindungen).

■ Anmerkung zu Kreditgeschäften

Die **PangV** (*Preisangabenverordnung*) schreibt vor, den effektiven Zinssatz für Kreditangebote und ähnliche von Banken getätigte Geldgeschäfte allen Vertragspartnern (natürlich insbesondere dem Kunden als Kreditnehmer) offenzulegen.

Bei Effektivzinsangaben zu Kreditgeschäften wird gelegentlich versucht, die PangV mit Verschleierungstaktiken zu unterlaufen. Beliebt ist das Verfahren, den Effektivzins nur für ein Anfangsstück der Zahlungsreihe zu ermitteln. Dadurch ist es einem Kreditnehmer nicht mehr (ohne weiteres) möglich, das Geschäft mit Konkurrenzangeboten zu vergleichen.

In einigen Fällen erfolgt die Darstellung eines "anfänglichen Effektivzinssatzes" explizit und der Situation gehorchend. Wird z.B. eine Immobilie durch einen Bankkredit finanziert und ein Vertrag mit einer Laufzeit von 10 Jahren geschlossen, der keine volle Tilgung der Kreditsumme beinhaltet, so ist die Zahlungsreihe unvollständig. Der Kreditnehmer sollte sich klar machen: Solange kein Plan vorliegt, der beschreibt, wie das Geschäft bis zum Ausgleich sämtlicher Zahlungen abgewickelt werden soll, kann sich der "Effektivzins" auch nur auf das bekannte Anfangsstück der Zahlungsreihe beziehen.

■ Existenz und Eindeutigkeit

Man kann mit Blick auf die Praxis einige grundlegende Typen von Zahlungsreihen unterscheiden:

Investition (Standardfall):	$c_0 < 0, c_1, c_2, ..., c_{N-1} \geq 0$
Darlehen (Kredit):	$c_0 > 0, c_1, c_2, ..., c_{N-1} \leq 0$
Sparen/Versicherung:	$c_0, ..., c_j \leq 0, c_{j+1}, ..., c_{N-1} \geq 0$

Grundsätzlich wird bei einer Zahlungsreihe $c = (c_0, c_1, ..., c_{N-1})$ vorausgesetzt: $c_0 \neq 0$, $c_{N-1} \neq 0$.

Für die drei genannten Typen von Zahlungsreihen gilt (hier ohne Beweis mitgeteilt):

Satz:

1. Es sei $a_0 = c_0, a_1 = c_0 + c_1, \ldots, a_{N-1} = c_0 + c_1 + \ldots + c_{N-1}$ (sog. kumulierte Zahlungsreihe). Wechselt die Folge $a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}$ das Vorzeichen nur einmal, so ist r_{int} definiert und positiv (Norstrømsche Regel).

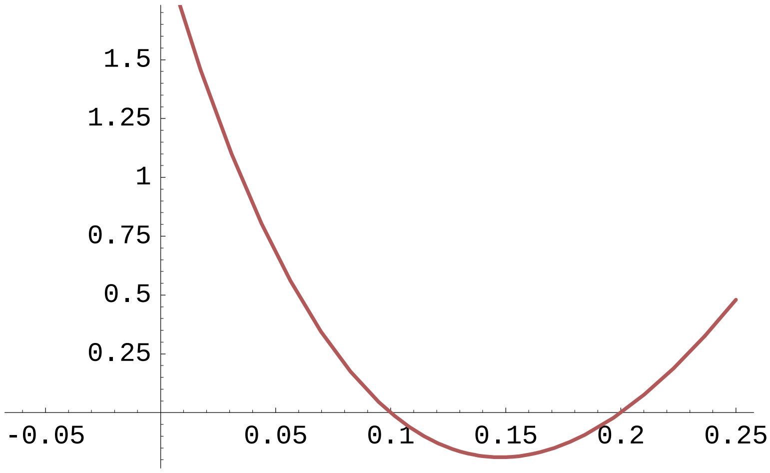
2. Im Standardfall einer Investition ist r_{int} eindeutig bestimmt, und es gilt $r_{\text{int}} > -1$. Ist die Nettosumme $c_0 + c_1 + ... + c_{N-1} > 0$, so gilt $r_{\text{int}} > 0$.

Grundsätzlich sind Zahlungsreihen mit beliebigen Zahlungen c_j und Vorzeichenwechseln denkbar. Unter dem Gesichtspunkt der Anwendung sind aber nur Zahlungsreihen von Interesse, die real mögliche Konsequenzen wirtschaftlicher Entscheidungen modellieren.

Auch im allgemeinen Fall lässt sich der Begriff "interner Zinssatz" sinnvoll definieren (allerdings mit mehr begrifflichem und mathematischem Aufwand). Vgl. dazu die sorgfältigen Analysen in [Peter Bender: Die Begrifflichkeit des Bezugsfachs in der angewandten Mathematik und ihrer Didaktik – diskutiert am Beispiel des internen Zinssatzes von Investitionen. In: Journal f. Mathematik-Didaktik 9 (1988) 2/3, S. 205-224]. Bei Bender [Der interne Zinssatz bei beliebigen Investitionen (Preprint Uni Paderborn, 1990)] finden sich Resultate, welche die in dem obigen Satz gemachten Aussagen beträchtlich verallgemeinern.

Wir betrachten als Beispiel einer Zahlungsreihe mit zwei Vorzeichenwechseln $c_B = (100, -230, 132)$, deren Barwertgleichung $\text{PV}(c_B; r) = 0$ zwei positive reelle Lösungen besitzt: $r_1 = 0.1$ und $r_2 = 0.2$ (vgl. Bender, a.a.O., S. 215).

```
cB = {100, -230, 132};
PvGraph[cB, -0.06, 0.25];
```



Welche der beiden Lösungen kommt als interne Zinsrate in Frage?

Von einer "vernünftigen" Nutzen- bzw. Wertfunktion wird man erwarten, dass sie eine vorteilhaftere Alternative höher bewertet. Wird in c_B zu Beginn z.B. der etwas größere Betrag 100.1 ausgezahlt, so vergrößert sich $r_1(=0.115\ldots)$, während sich $r_2(=0.183\ldots)$ verringert. Insofern kann nur die kleinere Lösung r_1 als interner Zinssatz gedeutet werden.

Numerische Berechnung von r_{int}

Die Gleichung $\text{PV}(c;\,r)=0$ kann im allgemeinen nicht mit einfachen Schulmethoden (wie sie z.B. für quadratische Gleichungen bekannt sind) aufgelöst werden. Elementare Näherungsverfahren führen aber in vielen Fällen schnell zum Ziel. Bequem ist eine auf Computer-Algebra gestützte Berechnung.

■ Manuelle Berechnung

Eine einfache Vorgehensweise wird am Beispiel $c=(-100,\,20,\,-50,\,70,\,80)$ demonstriert (s.o.). Die zugehörige Gleichung $\text{PV}=0$ kann nach r oder (oft einfacher) zunächst nach $q\,(=1+r)$ aufgelöst werden:

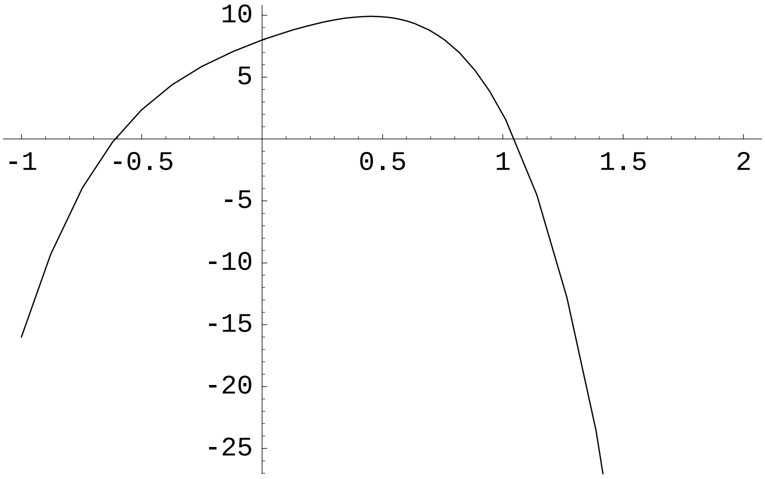
$$-100+\frac{20}{q}-\frac{50}{q^2}+\frac{70}{q^3}+\frac{80}{q^4}=0$$

Multiplikation mit dem Nenner der höchsten Potenz liefert:

$$-10\,q^4+2\,q^3-5\,q^2+7\,q+8=0$$

Es ist zweckmäßig, den Funktionsgraphen des Polynoms auf der linken Seite zu zeichnen, um die Lage der Nullstellen auszumachen:

```
Plot[-10 q^4 + 2 q^3 - 5 q^2 + 7 q + 8, {q, -1, 2}];
```



Von Interesse ist hier nur die Nullstelle zwischen 1.0 und 1.1. Sie lässt sich durch wiederholte Halbierung des Intervalls beliebig genau einschachteln (wenn man das Intervall immer in der Hälfte erneut teilt, in der das Polynom einen Vorzeichenwechsel erleidet). [Zur Halbierungsmethode und zu weiteren Verfahren vgl. den Abschnitt "Nullstellenbestimmung".]

Die erforderlichen Rechnungen sollten mit einem Taschenrechner durchgeführt werden:

$$1.0 \longrightarrow 1.025 \longrightarrow 1.0375 \longrightarrow 1.04375 \longrightarrow 1.046875 \longrightarrow ...$$

Die Nullstelle liegt knapp links vom ersten Halbierungspunkt 1.05 und wird nach einigen Iterationsschritten gut angenähert: $q = 1.0499465 ...$ Hieraus ergibt sich $r_{\text{int}} = 4.99\,\%$.

■ Automatische Berechnung

Das *Mathematica*-Paket "Diskontierung" ist zu laden:

```
<< Modellbildung`Diskontierung`
```

Das eingangs dargestellte Demonstrationsbeispiel zeigt, wie die Zahlungsreihe c definiert und der PV-Funktionsgraph (in Abhängigkeit von der Zinsrate r) zu zeichnen ist.

Das zugehörige Polynom in r kann man sich interessehalber wie folgt verschaffen:

```
ZinsratePolynom[c, r]
```

$$-10\,(-2 + 37\,r + 59\,r^2 + 38\,r^3 + 10\,r^4)$$

Die Berechnung der Rendite erfolgt mit dem Befehl:

```
Rendite[c, 0]
```

```
{r → 0.0499465}
```

Der zweite Parameter ist der Startwert bei der numerischen Nullstellenbestimmung (nach dem Newton-Verfahren). In vielen Fällen kommt man mit 0 zum Ziel. Bei mehreren Nullstellen (am Funktionsgraphen ersichtlich) wählt man geeignete Startwerte in deren Umgebung.

Alternativ zum Rendite-Befehl kann man versuchen, die Menge aller (komplexen) Nullstellen des Zinsrate-Polynoms zu berechnen:

```
NullstellenZinsratePolynom[c]
```

```
{{r → -1.61127}, {r → -1.11934 - 1.11007 ⅈ},
 {r → -1.11934 + 1.11007 ⅈ}, {r → 0.0499465}}
```

Der ursprünglich berechnete Rendite-Wert ist hier die einzige positive reelle Lösung.

© Prof. Dr. Alfred Schreiber | 2003-04-22

Festverzinsliche Wertpapiere

Festverzinsliche Anleihen sind mit einem Nominal-Zinssatz (sog. *Kupon*) ausgestattet, mit dem der Nominalwert (Nennwert: 100) während der Laufzeit des Papiers verzinst wird. Die Verzinsung kann kumulierend erfolgen ("Zinssammler") oder einfach.

An der Wertpapierbörse sind diese Anleihen handelbar und können gegen Zahlung eines Preises (*Kurs* des Wertpapiers) den Besitzer wechseln.

Die Berechnung von Kurs und Rendite festverzinslicher Wertpapiere ergibt sich als eine naheliegende Anwendung des Begriffs der internen Zinsrate bzw. der Barwertfunktion.

■ Kumulierende Verzinsung

Ein Investor kaufe eine Zinssammler-Anleihe mit einem Kupon von $p\,\% = \frac{p}{100} = r$ zum Kurs K (für den Nennwert 100) für eine Laufzeit von (vollen) n Jahren.

Wir stellen (als Modell dieses Geschäfts) die zugehörige Zahlungsreihe auf:

$$c = \left(-K,\ \underbrace{0,\ \ldots,\ 0}_{(n-1)},\ 100 \cdot (1+r)^n\right)$$

Zu Beginn wird der Preis für die Anleihe eingezahlt. Danach wird über $n-1$ Perioden nichts ein- oder ausgezahlt. Nach n Jahren erscheint der endfällige Auszahlungsbetrag. Anleihen dieses Typs heißen auch *Zerobonds* (wegen der Nullzahlungen zwischen Anfang und Ende).

Wir bestimmen die Rendite r_{int} dieses Geschäfts direkt aus der Gleichung $\text{PV}(c;\, r_{\text{int}}) = 0$, d.h. $-K + \frac{100 \cdot (1+r)^n}{(1+r_{\text{int}})^n}$, und erhalten:

$$r_{\text{int}} = (1+r)\sqrt[n]{\frac{100}{K}} - 1$$

Dieser Gleichung entnimmt man unmittelbar die Reziprozität von Kurs und Rendite. Qualitativ ausgedrückt: Steigt der Kurs, so fällt die Rendite (und umgekehrt).

Rechenbeispiel:

Kurs: 100.6, Kupon: 6 %, Laufzeit: 5 Jahre $\Longrightarrow$ Rendite: $r_{\text{int}} = 1.06\sqrt[5]{\frac{100}{100.6}} - 1 = 0.0587\ldots$

Beispiel aus der Praxis:

Bundesschatzbriefe vom Typ B mit einer Laufzeit von 7 Jahren (und i.a. monotoner Folge von Zinssätzen).

■ Einfache Verzinsung

Häufig werden Anleihen einfach verzinst, d.h. die Zinsen werden am Ende jeder Periode ausgeschüttet. Das liefert die folgende Zahlungsreihe:

$$c = \left(-K,\ \underbrace{100\,r,\ \ldots,\ 100\,r}_{(n-1)},\ 100\cdot(1+r)\right)$$

Anstelle der Nullzahlungen bei Zinssammlern wird Jahr für Jahr der Betrag $100\,r$ ausgezahlt. Am Ende der letzten Periode kommt der Nominalwert 100 noch hinzu.

In diesem Fall gestaltet sich die Auflösung der Gleichung $\mathrm{PV}(c;\,r_{\mathrm{int}}) = 0$ erheblich schwieriger:

$$-K + \frac{100\,r}{1+r_{\mathrm{int}}} + \ldots + \frac{100\,r}{(1+r_{\mathrm{int}})^{n-1}} + \frac{100\,(1+r)}{(1+r_{\mathrm{int}})^{n}} = 0$$

Diese Gleichung wird zweckmäßigerweise wie folgt umgeformt: Man multipliziert mit $(1+r_{\mathrm{int}})^n$ und fasst die hinter dem ersten Summanden stehenden Glieder zusammen:

$$-K(1+r_{\mathrm{int}})^n + 100\,r\ \{\,1 + (1+r_{\mathrm{int}}) + \ldots + (1+r_{\mathrm{int}})^{n-1}\,\} + 100 = 0$$

In den geschweiften Klammern steht eine geometrische Reihe, sodass sich aufsummiert ergibt:

$$-K(1+r_{\mathrm{int}})^n + 100\,r\,\frac{(1+r_{\mathrm{int}})^n-1}{r_{\mathrm{int}}} + 100 = 0$$

Dieses Ergebnis ist im wesentlichen identisch mit der finanzmathematischen Grundgleichung.

(Dabei ist wie folgt zu spezialisieren: $b = 100\,r$, $x_0 = -K$, $x_n = -100$. Man mache sich übungshalber die Bedeutung dieser Wertentsprechungen klar!)

Rechenbeispiel:

Kurs: 100.6, Kupon: 6 %, Laufzeit: 5 Jahre $\Longrightarrow$ Rendite: $r_{\mathrm{int}} = 0.0586\ldots$(geringfügig niedriger als im Fall einer kumulierenden Anleihe).

Da eine geschlossene Auflösungsformel für r_{int} nicht verfügbar ist, erfolgt die Berechnung gemäß den Hinweisen aus "Die Rendite eines Geldgeschäfts".

Beispiel aus der Praxis:

Bundesschatzbriefe vom Typ A mit einer Laufzeit von 6 Jahren (und i.a. monotoner Folge von Zinssätzen).