# Normalform einer Entscheidungssituation

## Ausgangsdaten

Entscheidungssituationen lassen sich übersichtlich darstellen, wenn man das Produkt der folgenden (endlichen) Mengen in Form einer Kreuz-Tabelle (Matrix) wiedergibt:

| | |
|---|---|
| $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ | Menge der **Alternativen** |
| | (Handlungsalternativen, Aktionen, Strategien, ...) |
| $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ | Menge der **Bedingungen** |
| | (Umweltzustände, Einflussfaktoren, Alternativen der "Gegenseite") |

Die Ausgangsdaten liegen (außer in sehr einfachen Fällen) nicht auf der Hand; sie ergeben sich normalerweise durch eine sorgfältige *Analyse der Sachsituation*.

## Die Konsequenzenmatrix

Wird die Handlung $a_i$ gewählt und tritt die Bedingung $b_j$ ein, so hat dies eine Konsequenz (mit $c_{ij}$ bezeichnet). Die Werte $c_{ij}$ sind Elemente einer Menge $C$: Menge der **Konsequenzen** (Handlungsfolgen).

Die $c_{ij}$ bilden ein rechteckiges Zahlenschema, die sog. **Konsequenzenmatrix**:

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \ldots & \mathbf{b_n} \\ \mathbf{a_1} & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ \mathbf{a_2} & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ . & . & . & \ldots & . \\ \mathbf{a_m} & c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{array}$$

Die Ermittlung der Konsequenzenmatrix ist in vielen Fällen der Praxis eine komplexe und aufwändige Aufgabe. Welche Konsequenzen überhaupt in Betracht kommen, hängt in hohem Maße von den Zielen/Zwecken ab, die mit einer Entscheidung verfolgt werden. Man sollte daher *möglichst früh die Ziele in der Entscheidungssituation präzisieren und festlegen*.

## ■ Die Nutzenmatrix (Entscheidungsmatrix)

Im nächsten Schritt sind die denkbaren Konsequenzen (numerisch) zu bewerten. Dies geschieht durch eine **Nutzenfunktion**:

$u : C \longrightarrow \mathbb{R}$

Wir schreiben: $u_{ij} = u(c_{ij})$ für den Nutzen(wert) der Konsequenz $c_{ij}$.

Wird jede Konsequenz durch ihren Nutzen ersetzt, so erhalten wir die **Nutzenmatrix** $U$ des Entscheidungsproblems (auch **Entscheidungsmatrix** genannt):

| | $b_1$ | $b_2$ | ... | $b_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $u_{11}$ | $u_{12}$ | ... | $u_{1n}$ |
| $a_2$ | $u_{21}$ | $u_{22}$ | ... | $u_{2n}$ |
| . | . | . | ... | . |
| $a_m$ | $u_{m1}$ | $u_{m2}$ | ... | $u_{mn}$ |

## ■ Anmerkungen zur Entscheidungsmatrix

1. In manchen Fällen sind die Konsequenzen von vornherein in *quantitativer* Form (z.B. als Geldbeträge o. dgl.) gegeben. Man kann dann diese Werte zugleich als Nutzenwerte auffassen. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, eine eigene (von der Identität verschiedene) Nutzenfunktion zu verwenden. Ein Beispiel dafür ist die logarithmische Funktion von Bernoulli, die den subjektiven Nutzen monetärer Größen wiedergeben soll.

2. Ist das Entscheidungsproblem in Wahrheit eine *Konfliktsituation* zwischen einem "Spieler" A und einem "Gegenspieler" B, so sind die Rollen der zugehörigen Mengen $A$, $B$ grundsätzlich als gleichberechtigt anzusehen. (Deutet man, wie bei einseitigen Entscheidungssituationen üblich, $B$ als eine Menge von Umweltbedingungen, so ist diese Symmetrie streng genommen nicht gegeben.) In diesem Fall fungieren die Elemente von $A$ und $B$ als *Strategien*, und beide Seiten versuchen, die jeweils für sie besten Strategien zu wählen. In der *Spieltheorie*, die sich mit der Modellierung solcher Konfliktsituationen beschäftigt, heißt die Entscheidungsmatrix gewöhnlich **Auszahlungsmatrix**.

## ■ Präferenzordnung, Lösungsmenge eines Entscheidungsproblems

Man gelangt zu einer Präferenzordnung in $A$ durch eine sog. **Wertfunktion** $w : A \longrightarrow \mathbb{R}$, die jeder Alternative eine reelle Zahl zuordnet. Im allgemeinen gewinnt man eine Wertfunktion aus einer bereits vorliegenden Nutzenfunktion.

Präferenzverhalten und Wertfunktion hängen wie folgt zusammen:

1. $a$ wird genau dann $a'$ präferiert ($a > a'$), wenn $w(a) > w(a')$.
2. Bzgl. $a$, $a'$ herrscht Indifferenz ($a \sim a'$) genau dann, wenn $w(a) = w(a')$.

Der Entscheider wird ein $a$ wählen, das in der Präferenzordnung *maximal* ist, d.h. es gibt keine Alternative $a'$ mit $a' > a$.

Die in diesem Sinne maximalen Handlungsalternativen bilden die **Lösungsmenge** $S(A)$ des Entscheidungsproblems. Man kann sie formal mit Hilfe der Wertfunktion ausdrücken:

$$S(A) := \{a \in A : w(a) \geq w(a') \text{ für alle } a' \in A\}$$

Es gilt: $S(A) \subseteq A$.

Die Lösung eines Entscheidungsproblems ist somit eine *Optimierungsaufgabe*. Sie besteht (abstrakt formuliert) darin, die Maxima der zugrundeliegenden Wertfunktion zu bestimmen.

# Auflagenhöhe für ein Buch

Das folgende kleine Fallbeispiel [vgl. Eisenführ/Weber: *Rationales Entscheiden*, 3. Aufl. Springer-Verlag: Berlin; Heidelberg; New York 1999, S. 36f.] soll demonstrieren, wie man ein Entscheidungsproblem in einer systematischen Schrittfolge aufbauen und lösen kann.

## ■ 1. Formulierung des Problems

Ein Verleger will ein neues Buch herausbringen. Den Preis (15 €) hat er bereits festgesetzt. Er fragt sich aber, wie hoch die Auflage sein soll.

## ■ 2. Alternativen und Bedingungen spezifizieren

Für den Verleger kommen (aus bestimmten Gründen) nur Auflagengrößen von 5000, 7000 und 9000 Exemplaren in Frage. Die Nachfrage sieht er irgendwo zwischen 4000 und 9000.

Zweckmäßige Festlegung von $A$ und $B$:

```
A = {5000, 7000, 9000};
B = {4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000};
```

## ■ 3. Ziele präzisieren

Die maßgebliche Zielgröße des Verlegers ist der Gewinn. (Wenn nötig, können später weitere Ziele hinzugefügt werden.)

Außer vom Preis (s.o.) hängt der Gewinn von den (festen) Satzkosten ab (10000 €) sowie von den (variablen) Kosten pro Exemplar (10 €).

Der Gewinn wird als Funktion zweier Variabler ($a$ = Auflage, $b$ = Nachfrage) modelliert:

```
Gewinn[a_, b_] := Min[a, b] * 15 - 10 a - 10000
```

## ■ 4. Konsequenzenmatrix erzeugen

Die Zielgröße "Gewinn" stellt unmittelbar die Konsequenzen dar, die sich aus einer bestimmten Auflage und einer bestimmten Nachfrage ergeben.

Darstellung der Konsequenzen in einer Matrix (Tabelle):

```
KMatrix = Outer[Gewinn, A, B] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 15000 & 15000 & 15000 & 15000 & 15000 \\ -20000 & -5000 & 10000 & 25000 & 25000 & 25000 \\ -40000 & -25000 & -10000 & 5000 & 20000 & 35000 \end{pmatrix}$$

## ■ 5. Eine Nutzenfunktion festlegen

Die Konsequenzen der obigen Matrix sind bereits von ihrer Natur her Geldwerte (Gewinne) und könnten deshalb zugleich als Nutzenwerte genommen werden. (Dies ist nicht zwangsläufig so, aber hier der Einfachheit vertretbar.)

Technisch heißt das für die Nutzenfunktion $u : C \longrightarrow \mathbb{R}$, dass $u(c) = c$ (Identität; hier ist $c$ ein Gewinn).

## ■ 6. Informationen über B sammeln

Was weiß (oder vermutet) der Verleger über die Bedingungen (Nachfrage am Markt)? Üblicherweise werden Wahrscheinlichkeiten zu Grunde gelegt.

Eisenführ/Weber nehmen folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung an:

```
prob = {0.1, 0.15, 0.15, 0.3, 0.2, 0.1};
```

Das heißt z.B.: Bedingung $b_4$ (= Nachfrage von 7000 Exemplaren) ist mit 30 % die wahrscheinlichste.

Da die Bedingungen sich gegenseitig ausschließen (und zudem alle möglichen Fälle abdecken), muss die Summe der Wahrscheinlichkeiten 1 (= 100 %) sein; eben das ist die Bedeutung des Begriffs "Verteilung".

## ■ 7. Eine Wertfunktion festlegen

Hier gibt es eine Reihe unterschiedlicher Möglichkeiten.

Bei vorliegenden Wahrscheinlichkeiten ist es eine gängige Methode, $w(a)$ als das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel der zu $a$ gehörigen Nutzenwerte (hier: Gewinne) zu definieren.

Für $a = 5000$ ergibt sich: $w(5000) = 0.1 * 0 + 0.15 * 15000 + ... + 0.1 * 15000 = 13500$, usw.

## ■ 8. Lösung berechnen

Wir bestimmen alle Werte der Wertfunktion (unter Nr. 7):

```
Table[Dot[prob, KMatrix[[1]][[i]]], {i, 1, 3}]
```

```
{13500., 13750., -250.}
```

Das Maximum wird bei $a = 7000$ angenommen: $w(7000) = 13750$.

Der Verleger könnte sich somit (rational) für eine Auflage von 7000 Exemplaren entscheiden.

# Logarithmischer Nutzen (nach Bernoulli)

## ■ Problemstellung

Die Konsequenzen $c$ eines Entscheidungsproblems seien von vornherein als numerische Größen gegeben, z.B. als Geldwerte.

Es soll eine Nutzenfunktion $u : C \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert werden, die folgende Grundidee zum Ausdruck bringt (nach *Daniel Bernoulli*, 1738):

> Ein bestimmter Geldbetrag (Vermögenszuwachs) hat für eine Person umso größeren Nutzen, je kleiner ihr augenblickliches Vermögen ist:

> $c$ : Vermögen
>
> $\Delta c$ : Vermögenszuwachs
>
> Nutzenzuwachs $\propto \frac{\Delta c}{c}$

## ■ Herleitung einer entsprechenden Nutzenfunktion

Die obige umgekehrte Proportionalität schreiben wir zunächst als Gleichung mit einer Proportionalitätskonstanten $k > 0$:

$$u(c + \Delta c) - u(c) = k \cdot \frac{\Delta c}{c}$$

Hieraus ergibt sich der Differenzenquotient:

$$\frac{u(c+\Delta c)-u(c)}{\Delta c} = k \cdot \frac{1}{c}$$

Wir lassen $\Delta c \to 0$ wandern und erhalten im Grenzübergang die erste Ableitung:

$$u'(c) = k \cdot \frac{1}{c}$$

Die zugehörige Stammfunktion ist bis auf eine additive Konstante (Integrationskonstante) $k_0$ bestimmt und lautet:

$$u(c) = k \cdot \log c + k_0$$

## ■ Diskussion

Offenbar ist die resultierende Funktion $u$ festgelegt bis auf eine lineare Transformation (Skalierung: Streckung mit Faktor $k$ und Verschiebung um $k_0$).

Es ist $u(1) = k_0$, d.h. $k_0$ ist durch den Nutzenwert von 1 Geldeinheit bestimmt. Zum Beispiel ist die Vereinbarung $k_0 = 0$ denkbar.

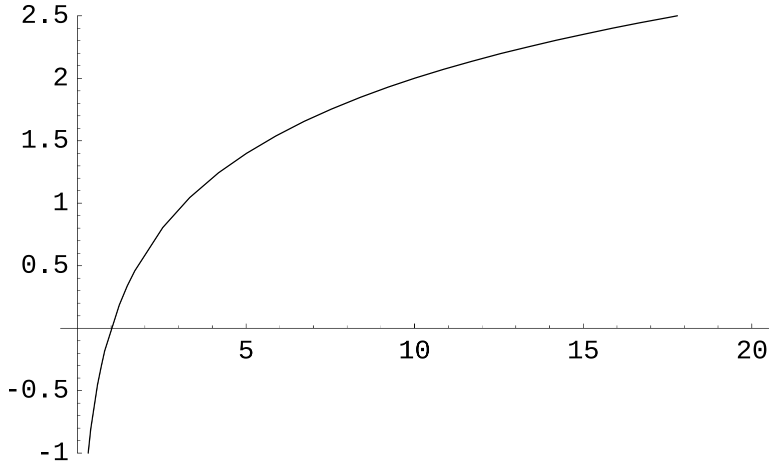
Stellt man den Nutzen eines weiteren Wertes $c$ fest, z.B. $u(10) = 2$, so ist auch $k$ bestimmt, hier durch die Gleichung $2 = k \cdot \log 10$:

```
k = 2 / Log[10] // N
```

```
0.868589
```

Wir zeichnen ein Schaubild:

```
Plot[k * Log[c], {c, 0, 20}, PlotRange → {-1, 2.5}];
```



# Normierung

## Skalen

Für ein Entscheidungsproblem liefert eine Nutzenfunktion häufig eine endliche (in jedem Fall aber beschränkte) Menge $u[C]$ von Werten (ablesbar in der Nutzenmatrix).

### ■ Beispiel: "Der passende Wein"

Die Nutzenmatrix lautet: $U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Der Wertebereich der Nutzenfunktion $u$ besteht somit aus 4 Werten: $u[C] = \{-1, 0, 0.5, 1\}$

Wenn wir die auftretenden Werte der Größe nach ordnen, erhalten wir eine *Skala* der Nutzenwerte. Im Beispiel reicht sie von $-1$ bis $+1$.

### ■ Beispiel: "Logarithmischer Nutzen"

Die Konsequenzenmenge $C = \{1, 2, \ ..., 100\}$ soll mit der logarithmischen Nutzenfunktion $u(c) = 2 \cdot \log c + 1$ bewertet werden.

Die resultierende Nutzenskala reicht in diesem Fall von $u_{\min} = u(1) = 1$ bis $u_{\max} = u(100) = 2 \cdot \log 100 + 1 \approx 10.2$

### ■ Vergleichbarkeit

Maßangaben, die aus verschiedenen Skalen stammen, sind <u>nicht ohne weiteres vergleichbar</u>.

<u>Beispiele:</u> Konfektionsgrößen, Zensuren, Temperaturen, Längenmaße, etc. (jeweils in unterschiedlichen nationalen Systemen)

Eine Temperatur von 20° ist angenehm, wenn es sich um Celsius-Grade handelt. Bei 20° im Fahrenheit-System (die ca. $-6.7\,°\mathrm{C}$ entsprechen) müssen wir uns hingegen warm anziehen.

Entsprechendes gilt für Skalen, die durch Nutzen- bzw. Wertfunktionen geliefert werden.

Um Skalen miteinander vergleichbar zu machen, muss man sie *transformieren* (ineinander umwandeln); am besten bildet man sie auf eine genormte Einheitsskala ab.

## Skalentransformationen

Welche Transformationen (Abbildungen) $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ kommen für die Umwandlung von Skalen in Frage?

Beispiel: Die Umwandlung von Celsius-Graden $x$ in Fahrenheit-Graden $y$ geschieht nach der Vorschrift:

$$y = T(x) = \frac{9}{5}\,x + 32$$

Die Transformation $T$ ist hier eine *lineare Funktion*: Sie verschiebt den Nullpunkt auf 32° (F) und streckt das Wertintervall durch Multiplikation mit dem Faktor 1,8.

### ■ Anmerkung

Eine genauere (theoretische) Erörterung von Skalen zeigt: Durch Anforderungen an die Maßbestimmung sind die resultierenden Funktionen (insbes. auch Nutzen- und Wertfunktionen) *eindeutig festgelegt bis auf lineare Transformationen*. [Vgl. hierfür etwa J. von Neumann & O. Morgenstern: *Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten*, 2. Auflage, Würzburg 1967, S. 15 f.]

### ■ Die allgemeine Skalentransformation

Eine Skalentransformation ist eine lineare Funktion $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ der Bauart:

$$T(x) = \alpha\, x + \beta \text{ mit } \alpha > 0$$

Der Streckfaktor $\alpha$ muss positiv sein, damit die Ordnung der Skalenwerte erhalten bleibt. (N.B.: Ein Anstieg der Temperatur auf der Celsius-Skala ist auch ein Temperaturanstieg auf der Fahrenheit-Skala.)

Folgende Eigenschaft gibt dies in allgemeiner Form wieder:

> $T$ ist streng monoton (wachsend), d.h.
>
> für alle Werte $x_1, x_2$ gilt: wenn $x_1 < x_2$, dann $T(x_1) < T(x_2)$

Beweis: Sei $x_1 < x_2$. Dann ist $\alpha\, x_1 < \alpha\, x_2$ wegen $\alpha > 0$. Nach Addition von $\beta$ auf beiden Seiten ergibt sich die Behauptung. ■

Wichtige Folgerung:

Die Präferenzordnung eines Entscheidungsproblems ändert sich nicht, wenn die Skala der Wertfunktion (d.h. die Menge $w[A]$) einer Skalentransformation unterworfen wird.

## ■ Normierung

Eine Normierung ist eine Skalentransformation $T$, die eine gegebene (häufig endliche) beschränkte Wertemenge ("Skala", etwa in Form eines Intervalls $X = [x_{\min}, x_{\max}]$) in das Einheitsintervall [0,1] abbildet. Dabei wird dem kleinsten Skalenwert 0, dem größten Skalenwert 1 zugeordnet, d.h. es gilt: $T(x_{\min}) = 0$, $T(x_{\max}) = 1$.

Beispiel ("Der passende Wein"):

Die Wertemenge $u[C] = \{-1, 0, 0.5, 1\}$ ist so abzubilden, dass gilt:

$0 = T(-1) = \alpha(-1) + \beta$ (Minimum)

$1 = T(1) = \alpha \cdot 1 + \beta$ (Maximum)

Aus den beiden Gleichungen ergibt sich: $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, d.h. die gesuchte Transformation $T$ lautet:

$$T(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$$

Offenbar ist eine Normierung (zu gegebener Wertemenge) *eindeutig bestimmt.*

Wenden wir diese Abbildung elementweise auf die Nutzenmatrix an, so erhalten wir die *normierte Nutzenmatrix* (bzw. *normierte Entscheidungsmatrix*) $U^{\#} = T(U)$:

$$U^{\#} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Allgemein verläuft das Normierungsverfahren für eine gegebene Skala (Wertemenge) wie folgt:

1. Bestimme den kleinsten und den größten Wert der Skala: $x_{\min}$ bzw. $x_{\max}$.
2. Berechne $\alpha$, $\beta$ aus dem linearen Gleichungssystem:

   $T(x_{\min}) = \alpha\, x_{\min} + \beta = 0$,

   $T(x_{\max}) = \alpha\, x_{\max} + \beta = 1$.
3. Wende die Transformation $T(x) = \alpha\, x + \beta$ auf die gegebene Skala (Matrix) an.

## ■ Normierte Nutzenfunktionen

Eine Nutzenfunktion $u$ heiße normiert auf $C = [c_{\min}, c_{\max}]$, wenn

1. ihre Werte im Einheitsintervall liegen, d.h. $u(c) \in [0, 1]$ für alle $c \in C$
2. $u(c_{\min}) = 0$ und $u(c_{\max}) = 1$.

Ist eine *beliebige* Nutzenfunktion $u$ gegeben, so kann man mit Hilfe einer passenden Skalentransformation ohne weiteres zur *normierten* Nutzenfunktion $u^{\#}$ übergehen:

## ■ Satz und Definition

Sei $C = [c_{\min}, c_{\max}]$ und $u : C \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion mit $u(c_{\min})$ und $u(c_{\max})$ als absolutem Minimum bzw. Maximum; ferner sei $T$ die (eindeutig bestimmte) Normierung der Wertemenge $u[C]$.

Dann ist die durch $u^{\#}(c) := T(u(c))$ $(c_{\min} \leq c \leq c_{\max})$ definierte Funktion normiert auf $C$ (die zu $u$ gehörige normierte Nutzenfunktion).

Beweis: Offenkundig ist $u^{\#}(c) \in [0, 1]$ für alle $c \in C$. Nach Voraussetzung gilt $u^{\#}(c_{\min}) = T(u(c_{\min})) = 0$ und $u^{\#}(c_{\max}) = T(u(c_{\max})) = 1$. ■

Häufig sind die in der Praxis betrachteten Nutzenfunktionen (streng) monoton wachsend auf ihrem Definitionsintervall $C = [c_{\min}, c_{\max}]$. In diesem Fall ist die geforderte Bedingung, wonach $u(c_{\min})$ absolutes Minimum (und entsprechend $u(c_{\max})$ absolutes Maximum) von $u[C]$ ist, per se erfüllt.

Beispiel:

Die Nutzenfunktion aus dem Beispiel "Logarithmischer Nutzen" (s.o.) lautet:

$u(c) = 2 \cdot \log c + 1$, wobei $c \in C = \{1, \ldots, 100\}$.

Aus den (oben) bereits ermittelten Werten $u_{\min} = u(1)$ und $u_{\max} = u(100)$ ergibt sich die Normierung:

$$T(x) = \frac{1}{2 \log 100}\, x - \frac{1}{2 \log 100}$$

Das zu $u$ gehörige $u^{\#}$ lautet damit: $u^{\#}(c) = T(u(c)) = \frac{\log c}{\log 100}$.

In der Tat bestätigt man: $u^{\#}(1) = 0$ und $u^{\#}(100) = 1$.

## ■ Eine allgemeine Formel

Es wurde in einer vorangehenden Anmerkung darauf hingewiesen, dass Nutzenfunktionen bis auf eine (lineare) Skalentransformation eindeutig festgelegt sind. Anstelle einer einzelnen Funktion $f$ haben wir somit folgende 2-parametrige Schar zu betrachten:

$$u(c) = k_0 + k_1 \cdot f(c)$$

mit variablen reellen Parametern $k_0, k_1$.

In diesem Zusammenhang soll $f$ als Typfunktion von $u$ bezeichnet werden. Z.B. ist eine logarithmische Nutzenfunktion eine Nutzenfunktion, die den Logarithmus als Typfunktion hat (s.o.): $k_0 + k_1 \log c$, usw.

Wie im obigen Satz nehmen wir an, dass die Funktion $u$ bei $c = c_{\min}$ ihr absolutes Minimum annimmt, entsprechend bei $c = c_{\max}$ ihr absolutes Maximum (wobei $f(c_{\max}) > f(c_{\min})$). Sei wieder $T$ die Normierung von $u[C] = [u(c_{\min}), u(c_{\max})]$. Dann gilt für die zu $u$ gehörige normierte Nutzenfunktion $u^{\#}$:

$$u^{\#}(c) = \frac{f(c) - f(c_{\min})}{f(c_{\max}) - f(c_{\min})}$$

Beweis: Mit $T(x) = \alpha\, x + \beta$ erhält man aus den Gleichungen $T(u(c_{\min})) = 0$ und $T(u(c_{\max})) = 1$ nach kurzer Rechnung für die Koeffizienten $\alpha$ und $\beta$:

$$\alpha = \frac{1}{k_1(f(c_{\max}) - f(c_{\min}))}, \beta = -\frac{k_0 + k_1\, f(c_{\min})}{k_1(f(c_{\max}) - f(c_{\min}))}$$

Auswertung des Ausdrucks $u^{\#}(c) = T(u(c)) = \alpha\, u(c) + \beta$ liefert dann die Behauptung. ■

Offenbar läuft die Normierung der Nutzenfunktion darauf hinaus, ihre Parameter $k_0$, $k_1$ so festzulegen, dass $u(c_{\min}) = k_0 + k_1\, f(c_{\min}) = 0$ und $u(c_{\max}) = k_0 + k_1\, f(c_{\max}) = 1$. Löst man diese Gleichungen nach $k_0$, $k_1$ auf, so ergeben sich sofort die Werte $k_0 = -\frac{f(c_{\min})}{f(c_{\max}) - f(c_{\min})}$ und $k_1 = \frac{1}{f(c_{\max}) - f(c_{\min})}$ (und damit noch einmal die obige Behauptung).

Die obige Formel ist ein bequemes Mittel, die Normierung einer Nutzenfunktion direkt über deren Typfunktion zu erreichen.

## ■ Automatische Berechnung

Die folgende *Mathematica*-Funktion "Normiere" führt die Normierung bzgl. gegebener Werte $x_{\min}$, $x_{\max}$ für einen einzelnen Wert $x$ durch. Dabei wird eine vorab ermittelte allgemeine Lösung des linearen Glg.-Systems (unter obigem Schritt Nr. 2) verwendet. Der (triviale) Fall, dass Minimum und Maximum übereinstimmen, ist darin berücksichtigt.

```
Normiere[x_, xmin_, xmax_] := Module[{alpha, beta},
  {alpha, beta} = Which[
    xmin == xmax, {If[xmin ≠ 0, 1 / xmin, 0], 0},
    xmin < xmax, {1 / (xmax - xmin), -alpha * xmin}];
  alpha * x + beta
 ]
```

Wir berechnen einen Einzelwert:

```
Normiere[0.5, -1, 1]
```

```
0.75
```

Um eine gegebene Wertemenge (Skala, Matrix) $s$ auf einen Schlag normieren zu können, berechnen wir zunächst deren $x_{\min}$ und $x_{\max}$ und reichen diese anschließend an die Funktion "Normiere" weiter:

```
NormiereSkala[s_] := Module[{smin = Min[s], smax = Max[s]},
  Normiere[s, smin, smax]
 ]
```

Die Matrix im Beispiel "Der passende Wein":

```
weinmatrix = {{1, -1, 1}, {0, 1, 1}, {0.5, 0, -1}};
```

Die Funktion "NormiereSkala" macht daraus die normierte Nutzenmatrix:

```
NormiereSkala[weinmatrix]
```

$$\left\{\{1, 0, 1\}, \left\{\frac{1}{2}, 1, 1\right\}, \left\{0.75, \frac{1}{2}, 0\right\}\right\}$$

In Matrixform sieht das Ergebnis übersichtlicher aus:

```
% // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0.75 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

# Entscheidungen bei Unsicherheit

Im Folgenden geht es um Individualentscheidungen bei Unsicherheit (im engeren Sinne).

Allgemeine Voraussetzungen:

$A = \{a_1, ..., a_m\}$ (Alternativen)

$B = \{b_1, ..., b_n\}$ (Bedingungen)

Es liegt eine Nutzenmatrix vor: $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & ... & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & ... & u_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ u_{m1} & u_{m2} & ... & u_{mn} \end{pmatrix}$

## Dominanz

### ■ Definition

Eine Alternative dominiert eine andere, wenn sie unter allen Bedingungen mindestens denselben Nutzen besitzt wie diese und unter wenigstens einer Bedingung einen höheren Nutzen.

Genauer:

$a_k$ dominiert $a_i$ $:\Longleftrightarrow$ 1. für alle $j: u_{kj} \geq u_{ij}$

2. es gibt ein $j: u_{kj} > u_{ij}$

### ■ Prinzip der Dominanz

Nach diesem Prinzip dürfen Handlungsalternativen, die von anderen dominiert werden, aus dem Entscheidungsverfahren genommen werden, d.h. man streicht die zugehörige Zeile in der Entscheidungsmatrix.

Wir betrachten folgende Matrizen:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ (aus dem Beispiel "Der passende Wein")

$$U_2 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$ (aus dem Beispiel "Das Gefangenendilemma")

In $U_1$ gibt es keine Alternative (Zeile), die eine andere dominiert.

In $U_2$ dominiert die zu Zeile 1 gehörige Strategie $a_1$ ( = *gestehen*) die Strategie $a_2$ ( = *leugnen*). Das gilt umgekehrt auch für den Gegenspieler, der dieselbe Matrix besitzt. Somit können sich beide Gefangene rational nur dafür entscheiden, ein Geständnis abzulegen. (N.B.: Die Gefangenen sind nicht in der Lage, zu kooperieren und so gemeinsames Abstreiten der Tat zu verabreden, was sicher die beste Strategie wäre.)

### ■ Definition

Eine Alternative heißt dominant, wenn sie alle übrigen Alternativen dominiert.

Existiert in einer Entscheidungssituation eine dominante Alternative, so können (nach dem Prinzip der Dominanz) alle übrigen Alternativen gestrichen werden. D.h.: eine dominante Alternative ist maximal in der Präferenzordnung und daher (nach dem Optimalitätsprinzip) wählbar!

## Einige klassische Entscheidungsregeln

Die Anwendung aller nachstehenden Regeln wird am Beispiel "Der passende Wein" demonstriert; somit ist $m = n = 3$, und die Nutzenmatrix (s.o.) lautet: $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Eine Entscheidungsregel ist durch Angabe einer Wertfunktion $w : A \longrightarrow \mathbb{R}$ festgelegt. Es genügt daher im Folgenden, die Wertfunktion der jeweiligen Entscheidungsregel zu erklären.

### ■ Maximin-Regel

Die Wertfunktion berechnet zu einer Alternative den garantierten Nutzen (Minimalnutzen):

$$w_{\text{maximin}}(a_i) := \min \{u_{ij} : 1 \leq j \leq n\}$$

Dieser vorsichtigen (pessimistischen) Regel zufolge entscheidet man sich für eine Alternative, die einen größtmöglichen garantierten Nutzen liefert. (Nicht zu verwechseln mit einer Alternative, die einen größtmöglichen Nutzen garantiert!)

Beispiel: Die Minima der Zeilen lauten: $w_{\text{maximin}}(a_i) = -1 (i = 1, 2, 3)$. Danach besteht Indifferenz bzgl. der Weinsorte, und jeder Wein ist wählbar.

## ■ Maximax-Regel

Die Wertfunktion berechnet zu einer Alternative den Maximalnutzen:

$$w_{\text{maximax}}(a_i) := \max\{u_{ij} : 1 \le j \le n\}$$

Dieser (extrem optimistischen) Regel zufolge entscheidet man sich für eine Alternative, die einen größtmöglichen Maximalnutzen liefert.

Beispiel: Die Maxima der Zeilen lauten $w_{\text{maximax}}(a_1) = 1$, $w_{\text{maximax}}(a_2) = 1$, $w_{\text{maximax}}(a_3) = 0.5$. Danach besteht bzgl. Weisswein und Rotwein Indifferenz, ferner sind beide einem Rosé vorzuziehen.

## ■ Niehans-Savage-Regel

Um die betreffende Wertfunktion definieren zu können, ermittle man zunächst zu jeder Bedingung $b_j$ den maximalen Nutzen: $u_j^* := \max\{u_{ij} : 1 \le i \le m\}$.

Im Vergleich mit den $u_j^*$ ergeben sich zu jeder Alternative $a_i$ Bedauernswerte: $d_{ij} := u_{ij} - u_j^*$ $(1 \le i \le m, 1 \le j \le n)$. Die $d_{ij}$ sind sämtlich $\le 0$. Je größer ein Bedauernswert dem Absolutbetrage nach ausfällt, desto mehr kann der maximale Nutzen durch den tatsächlich realisierten Nutzen $u_{ij}$ als verfehlt angesehen werden.

Die Wertfunktion zur Niehans-Savage-Regel berechnet den minimalen (negativen) Bedauernwert:

$$w_{\text{Niehans}}(a_i) := \min\{d_{ij} : 1 \le j \le n\}$$

Man entscheidet sich hierbei für eine Alternative, bei der der minimale Bedauernswert am größten ist (d.h. der betragsmäßig größte Bedauernswert ist dann am kleinsten). Das Vorgehen verrät eine (in die Vergangenheit gerichtete) pessimistische Einstellung.

Beispiel: Es ist $u_1^* = u_2^* = u_3^* = 1$. Mithin ergibt sich die **Bedauernsmatrix** $D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -0.5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Die Wertfunktion (nach Niehans) berechnet die Zeilenminima von $D$: $w_{\text{Niehans}}(a_i) = -2$ $(i = 1, 2, 3)$. Infolgedessen besteht Indifferenz bzgl. der Wahl der Weinsorte.

## ■ Laplace-Regel

Die Wertfunktion berechnet zu einer Alternative den mittleren Nutzen, d.h. das arithmetische Mittel der Nutzenwerte unter den vorhandenen Bedingungen:

$$w_{\text{Laplace}}(a_i) := \frac{1}{n}(u_{i1} + u_{i2} + \ldots + u_{in})$$

Dieser Regel zufolge entscheidet man sich für eine Alternative mit größtmöglichem mittleren Nutzen. Bei der Mittelwertbildung geht die Regel stillschweigend davon aus, dass alle Bedingungen gleich wahrscheinlich sind (jeder Nutzenwert geht mit demselben Gewicht $\frac{1}{n}$ in die Summe ein!).

Beispiel: Die mittleren Nutzenwerte lauten

$$w_{\text{Laplace}}(a_1) = \frac{1}{3}\,(1 + (-1) + 1) = \frac{1}{3}$$

$$w_{\text{Laplace}}(a_2) = \frac{0}{3} = 0$$

$$w_{\text{Laplace}}(a_3) = \frac{-0.5}{3} = -\frac{1}{6}$$

Damit ergibt sich die Präferenzordnung $a_1 > a_2 > a_3$, d.h. man entscheidet sich für Weisswein.

## Ergänzungen

### ■ Rationalität der Regeln

Die hier vorgestellten Entscheidungsregeln liefern zwar eine präskriptive Handlungssystematik, spiegeln nichtsdestoweniger aber ein teilweise beträchtliches Ad-hoc-Vorgehen auf der Entscheiderseite.

Am ehesten kommt in der Laplace-Regel ein echtes gegenseitiges Abwägen der Bedingungen zum Vorschein (wobei allerdings die Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit systematisch anfechtbar und aus der Sicht der Praxis unrealistisch ist). Ausgehend von allgemeinen Prinzipien, die in einer axiomatischen Nutzentheorie verankert werden, lässt sich einzig die (hier noch nicht erklärte) Bernoulli-Regel als rational begründen. Sie stellt eine Verallgemeinerung der Laplace-Regel dar und gewichtet die Nutzenwerte mit (nicht von vornherein konstant gleichen) Wahrscheinlichkeiten. Die Bernoulli-Regel gehört in den Zusammenhang der Entscheidungen unter Risiko.

Für eine kritische Diskussion der hier nur angedeuteten Rationalitätsprobleme vgl. [Werner Krabs: *Mathematische Modellbildung*. Teubner-Verlag: Stuttgart 1997, S. 35f.] sowie [Helmut Laux: *Entscheidungstheorie*. 4. Aufl., Springer-Verlag: Berlin; Heidelberg; New York 1998, S. 104f.]

### ■ Automatische Berechnung von Lösunsgmengen

Das *Mathematica*-Notebook Entscheidungsregeln.nb enthält eine Reihe von Funktionen, die mit den oben definierten Wertfunktionen zu vorgegebener Nutzenmatrix $U$ direkt die Lösungsmenge des Entscheidungsproblems berechnen.

Einen Überblick über die implementierten Befehle erhalten Sie am besten, wenn Sie die Notebook-Datei laden und anschauen.

Anmerkung: Die Untersuchung auf Dominanz ist in der vorliegenden Fassung noch nicht enthalten.

**Vorbereitung zum Gebrauch des Pakets**:

Legen Sie im *Mathematica*-Ordner "AddOns\ExtraPackages" den Unterordner "Modellbildung" an und kopieren Sie das Package Entscheidungsregeln.m in den Pfad "AddOns\ExtraPackages\Modellbildung".

Laden Sie dann das Paket durch folgende Input-Zeile:

```
<< Modellbildung`Entscheidungsregeln`
```

Als Testdatum möge wiederum die Entscheidungsmatrix aus dem Beispiel "Der passende Wein" dienen, hier als Liste ihrer Zeilen(vektoren):

```
weinmatrix = {{1, -1, 1}, {0, 1, -1}, {0.5, 0, -1}};
```

Wir entscheiden zum Vergleich mit allen vier Regeln:

```
Maximin[weinmatrix]
Maximax[weinmatrix]
NiehansSavage[weinmatrix]
Laplace[weinmatrix]
```

```
{1, 2, 3}
```

```
{1, 2}
```

```
{1, 2, 3}
```

```
{1}
```

## Entscheidungen bei Sicherheit

Wenn Sicherheit darüber besteht, welche der möglichen Bedingungen bei ausgeführter Handlungsalternative $a_i$ ($i$ = 1, 2, ..., $m$) eintritt, reduziert sich die Matrix

| | $b_1$ | $b_2$ | ... | $b_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $c_{11}$ | $c_{12}$ | ... | $c_{1n}$ |
| $a_2$ | $c_{21}$ | $c_{22}$ | ... | $c_{2n}$ |
| . | . | . | ... | . |
| $a_m$ | $c_{m1}$ | $c_{m2}$ | ... | $c_{mn}$ |

auf eine einzige Spalte von Konsequenzen ($b$ ist dabei die sicher eintretende Bedingung):

| | $b$ |
|---|---|
| $a_1$ | $c_1$ |
| $a_2$ | $c_2$ |
| . | . |
| $a_m$ | $c_m$ |

Bei vorliegender Nutzenfunktion $u : C \longrightarrow \mathbb{R}$ liegt es nahe, die von ihr gelieferten Werte $u(c_i)$ auch für die Wertfunktion $w : A \longrightarrow \mathbb{R}$ zu übernehmen, d.h. der Nutzen einer (mit Sicherheit eintretenden) Konsequenz $c_i$ ist zugleich als Wert der zugehörigen Alternative $a_i$ anzusehen.

Das damit ausgesprochene *Prinzip von der Übernahme des Nutzenwertes* ist eher technischer Natur und lässt sich durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$w(a_i) = u(c_i) \ (1 \leq i \leq m)$$

In gewohnter Weise kann nun die zur Wertfunktion $w$ gehörige Lösungsmenge $S_w(A)$ berechnet werden. Nach dem Optimalitätsprinzip besteht sie aus allen $a_i$ $(1 \leq i \leq m)$, für die $w(a_i)$ maximal ist.

Soweit wir uns in diesem allgemein gelassenen Rahmen bewegen, scheinen Entscheidungsprobleme bei Sicherheit nicht sonderlich interessant zu sein. Doch dieser Eindruck täuscht: Die Modellierung der Entscheidungssituation verlangt, dass man eine geeignete Nutzenfunktion $u : C \longrightarrow \mathbb{R}$ effektiv konstruiert.

Das ist keineswegs immer "trivial", wie Entscheidungsprobleme zeigen, bei denen mehrere Ziele verfolgt werden (vgl. in diesem Zusammenhang auch die Behandlung des sog. Diskontierungsmodells).

# Probleme mit mehreren Zielen

Das Folgende kann grundsätzlich auf alle Typen von Entscheidungssituationen angewendet werden (Sicherheit, Unsicherheit, Risisiko).

## ■ Entscheidungssituationen mit mehreren Zielen

In der Praxis verfolgt man häufig mehr als nur ein Ziel. Auf diese Weise ergeben sich zu der gewählten Alternative entsprechend viele Teil-Konsequenzen.

Beispiele:

‣ **Auflagenhöhe**

Der Verleger (aus dem Beispiel "Auflagenhöhe für ein Buch") könnte außer am Gewinn auch daran interessiert sein, möglichst wenige seiner künftigen Leser zu enttäuschen. Diesen nunmehr 2 Zielen entsprechend bestünde eine Konsequenz $c$ dann auch aus 2 eigenständigen Komponenten:

Gewinn

Nachfrageüberhang

Die erste Zielgröße soll maximiert werden, gleichzeitig soll die zweite Zielgröße minimiert werden.

‣ **Urlaubsplanung**

Eine mit Ferienplanung beschäftigte Familie wird eine Reihe von Zielgrößen (und entsprechende Teil-Konsequenzen) im Auge behalten:

die Kosten,

die Qualität der Unterbringung,

die Wetteraussichten,

die Bedürfnisse der Eltern,

die Bedürfnisse der Kinder, etc.

‣ **Berufswahl**

Mögliche Gesichtspunkte/Ziele/Kriterien:

Gehalt,

Arbeitszeit,

Anzahl der Urlaubstage,

Sicherheit,

Altersversorgung,

Prestige,

Flexibilität, etc.

Das Aufstellen von Zielen ist nicht selten eine aufwändige und schwierige Aufgabe. Es genügt nicht, ein paar beiläufig sich aufdrängende Gesichtspunkte zu sammeln. Vielmehr müssen die Ziele einzeln und in ihrem Zusammenhang bestimmten Anforderungen genügen.

Ein Ziel sollte u.a. sein:

klar und präzise (hinsichtlich Inhalt und Form),

wesentlich (nämlich die Interessenlage widerspiegelnd),

fundamental (d.h. kein bloßes Hilfs- oder Zwischenziel auf dem Weg zu anderen Zielen),

unabhängig von den übrigen Zielen (hinsichtlich seiner Wünschbarkeit),

objektiv messbar (hinsichtlich seines Erfülltheitsgrades).

Für eine detaillierte Behandlung dieser Fragen vgl. [Eisenführ/Weber: *Rationales Entscheiden*. Springer-Verlag: Berlin; Heidelberg; New York 1999, S. 53f.].

## ■ Ein additives Modell

Das Auftreten mehrerer Ziele und die sich damit ergebende Aufgabe, eine Nutzenfunktion für komplexe Konsequenzen zu konstruieren (einen *Gesamtnutzen*), soll zunächst allgemein beschrieben werden:

Das System der Ziele notieren wir wie folgt:

$Z_0, Z_1, \ldots, Z_{N-1}$.

Wird eine Alternative $a$ gewählt, so bewirkt dies im Hinblick auf das Ziel $Z_j$ eine (Teil-)Konsequenz $c_j$. Man erhält somit $N$ auf Einzelziele bezogene Konsequenzen. Diese bilden eine zusammengesetzte Konsequenz $c$, die wir als $N$-Tupel schreiben:

$c = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$.

Die Ziele sind i.a. unterschiedlicher Natur. Daher ist damit zu rechnen, dass die $c_j$ aus spezifischen Konsequenzenmengen ($C_j$) stammen und infolgedessen durch eine Nutzenfunktion $u_j$ zu bewerten sind, die "zuständig" ist für die Elemente von $C_j$ (jedoch nicht notwendig auch für die Elemente anderer Konsequenzenmengen).

Fazit: Wir wollen annehmen, dass dank verfügbarer Nutzenfunktionen $u_j$ die Nutzenwerte der Teilkonsequenzen $c_j$ sämtlich bekannt sind: $u_j(c_j)$ ($j = 0, 1, \ldots N-1$). Ohne Einschränkung werden die $u_j$ als normiert vorausgesetzt.

Problem:

> Wie gewinnt man aus den $N$ Funktionen $u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}$ eine (normierte) Nutzenfunktion $u$, mit der sich die zusammengesetzten Konsequenzen $c = (c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$ bewerten lassen?

Man könnte zunächst versuchen, den Gesamtnutzen als Summe der Teilnutzenwerte zu definieren (und durch $N$ zu dividieren, um Normiertheit zu erreichen):

$$\frac{1}{N}\,(u_0(c_0) + u_1(c_1) + \ldots + u_{N-1}(c_{N-1}))$$

Daran ist zumindest richtig, dass der Nutzenwert jedes Einzelziels seinen Teil zum Gesamtnutzen beisteuert.

Allerdings wird bei der arithmetischen Mittelwertbildung stillschweigend (und im allgemeinen fälschlicherweise) angenommen, dass alle Ziele mit demselben Anteil zu berücksichtigen sind. Es ist realistischer, für jedes Ziel individuell festzulegen, mit welchem Anteil (Gewicht) es in die Berechnung des Mittelwerts eingeht:

> Für jedes Ziel $Z_j$ ist eine positive Gewichtszahl $\gamma_j$ festzulegen, die seine Bedeutung im vorliegenden Entscheidungsprozess widerspiegelt.
>
> Es muss gelten: $\gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{N-1} = 1$.

Der Gesamtnutzen $u(c)$ einer komplexen Konsequenz $c = (c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_{N-1})$ lässt sich dann wie folgt definieren:

$$u(c) := \gamma_0\, u_0(c_0) + \gamma_1\, u_1(c_1) + \ldots + \gamma_{N-1}\, u_{N-1}(c_{N-1})$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass die so definierte Nutzenfunktion $u$ normiert ist (Übung).

## ■ Anwendbarkeit

Wann ist man berechtigt (wann ist es rational), dieses additive Modell vom Gesamtnutzen anzuwenden?

Die maßgebliche Voraussetzung ist die der Präferenzunabhängigkeit.

Beispiel:

Bei einem Bauvorhaben wünscht man sich:

kurze Bauzeit ($Z_0$),

niedrige Kosten ($Z_1$),

hohe Qualität ($Z_2$).

Hier ist jedes Ziel (bzw. die mit ihm verbundene Konsequenz) *präferenzunabhängig*, d.h. hinsichtlich seiner Wünschbarkeit nicht von dem Grad beeinflusst, in dem sich die übrigen Ziele erfüllen. So behält eine um 1 Monat verkürzte Bauzeit ihren Nutzenwert unabhängig davon, welches Niveau bei den Kosten oder der Qualität erreicht werden.

Zu weiteren Beispielen sowie eingehender Diskussion vgl. [Eisenführ/Weber, a.a.O., S. 119f.].

## ■ Zur Ermittlung von Teilnutzen und Gewichten

Im Folgenden wird ein vereinfachtes Verfahren (*Nutzwertanalyse*) dargestellt, mit dem sich (innerhalb eines tabellarischen Datenschemas) Teilnutzen und Gewichte bestimmen lassen.

1. Teilnutzen $u_j(c_j)$:

Man bewerte eine (Teil-)Konsequenz mit einer Punktzahl $B_j$, z.B. zwischen 0 und 10 ( $= B_{\max}$). Die Punktzahl soll den Erfüllungsgrad des Einzelziels messen.

Die Punktzahl 0 steht für: "$c_j$ verfehlt das Ziel $Z_j$". Die maximale Punktzahl 10 bedeutet: "Das Ziel ist bestens erfüllt".

Der Messvorgang ist soweit wie möglich zu objektivieren.

Damit bietet sich als einfaches Maß für den Teilnutzen an:

$$u_j(c_j) := \frac{B_j}{B_{\max}}$$

2. Gewichte $\gamma_j$:

Man vereinbart Punktzahlen, welche die Bedeutung eines Ziels im Entscheidungsprozess bewerten. Die Skala könnte z.B. von 1 = *geringe Bedeutung* bis 5 = *größtmögliche Bedeutung* reichen.

Bezeichnet $G_j$ die Punktzahl für Ziel $Z_j$, so ergeben sich die Gewichte wie folgt:

$$\gamma_j := \frac{G_j}{G_0+G_1+\ldots+G_{N-1}}$$

Das hier geschilderte Verfahren lässt sich bequem in einer Tabelle durchführen (vgl. zum Beispiel die Anwendung "Betriebliche Weiterbildung: CBT oder Seminar?").