Alfred SCHREIBER

Biographie

Alfred Schreiber (*1946, Düsseldorf) studierte in Gießen und Köln Mathematik, Physik und Philosophie. 1975 erschien seine Dissertation „Theorie und Rechtfertigung“ als Buch bei Vieweg. 1971–1980 arbeitete er als Wiss. Assistent am Sem. f. Mathematik der PH Rheinland, habilitierte sich 1981 an der RWTH Aachen und wurde 1986 Professor für Mathematik und ihre Didaktik an der damaligen PH (später Universität) Flensburg. Dort setzte er seine (1983 begonnene) praktische und theoretische Betätigung auf dem Gebiet des rechnergestützten Unterrichts fort (als Software-Entwickler und wiss. Leiter u.a. verantwortlich für zahlreiche Projekte in der betrieblichen Aus- und Weiterbildung, später zunehmend auch im universitären Anwendungsfeld). Bei Springer erschien 1998 seine umfangreiche Monographie „CBT-Anwendungen professionell entwickeln“. – Zu seinen Arbeits- und Forschungsschwerpunkten zählen ferner: Heuristik, Modellierung und Begriffsbildung in der Mathematik; Buchpublikationen dazu: (zusammen mit Peter Bender) „Operative Genese der Geometrie“ (1985) sowie „Begriffsbestimmungen“ (Aufsätze zur Heuristik und Logik, Logos-Verlag, Berlin 2011). – Zuletzt arbeitete er als Übersetzer und Herausgeber an dem fachübergreifenden Projekt einer Gedichtsammlung zur Mathematik, von der zwei Bände bei Vieweg u. Springer erschienen sind: „Die Leier des Pythagoras“ (2010) und „Lob des Fünfecks“ (2012).

On an equational model for self-referential sentences (Summary)

Self-referential structures are widely known as a scientific topic, e.g., in cybernetics (‘feedback’), computer science (‘recursion’), and sociology (‘re-entry’, cf. Luhmann’s theory of social systems). Consequently, in the logical field, attempts gained in interest to understand more thoroughly the circular and sometimes paradoxical nature of self-referential sentences. This paper deals with the idea of interpreting them as equations in a Boolean algebra. Equational models have been used so far in semantics and in studies concerning the effects of forecast by Gutjahr (1995). Lan Wen (2001) showed in detail to what extent equational modelling of self-reference can be viewed as adequate and sound. In the sequel the method is re-established in an abstract Lindenbaum-Tarski algebra; using its Boolean ring operations will then considerably facilitate the analysis of ‘self-referential’ equations. Application to some examples will be given together with a result that provides the set of all solutions in the general case.

Über ein Gleichungsmodell für selbstbezügliche Aussagen

1. *Selbstbezügliche Aussagen als Gleichungen*

Dem Eubulides von Milet (4. Jh. v. Chr.) wird die älteste und aufgrund ihrer Einfachheit schlagkräftigste semantische Paradoxie zugeschrieben. Sie ist als „Lügner" berühmt geworden und lautet:

(1) *Diese Aussage ist falsch.*

In (1) wird das negierte Wahrheitsprädikat auf „Diese Aussage" bezogen, mit der (1) gemeint zu sein scheint. Ist es möglich, Aussage (1) auf ihre Wahrheit zu prüfen? Der Versuch führt auf einen Widerspruch: Wenn sie wahr ist, dann ist das, was sie aussagt, der Fall, d.h. *sie* ist falsch. Ist sie aber falsch, dann ist das, was sie aussagt, nicht der Fall, d.h. *sie* ist wahr. – Das hier (nach dem Doppelpunkt) sechsmal vorkommende „sie" bezeichnet nach Lan Wen (2001) in vier Fällen „Diese Aussage ist falsch" (mithin (1)), hingegen die beiden kursiv geschriebenen Male allein den Ausdruck „Diese Aussage". Im Lichte dieser Beobachtung erscheint (1) nunmehr als eine Referenzrelation:

(2) $A := A\mathsf{F}$

Hierin steht A für „Diese Aussage" und F für das semantische Prädikat „... ist falsch". Die Referenz := („bezieht sich auf") kann variabel, insbesondere mehr oder weniger stark identifizierend interpretiert werden. Sie ist lediglich einem *Referenzaxiom* unterworfen, das die (bei der Auswertung von (1)) benutzte Regel wiedergibt. Danach ist eine Aussage A, die sich auf einen Sachverhalt S bezieht (symbolisch $A := S$) genau dann *wahr* ($A\mathsf{T}$), wenn S der Fall ist: $A\mathsf{T} \leftrightarrow S$.

An Ideen Kripkes (1975) anknüpfend hat Lan Wen einen formalen Rahmen entwickelt, der es erlaubt, aussagenlogische Referenzbeziehungen nach dem Vorbild algebraischer Gleichungen in einer oder mehreren Unbestimmten aufzufassen. (2) geht dabei in die Gleichung $X = X\mathsf{F}$ über. Die Verwendung eines Platzhalters X (für „Diese Aussage") bringt dabei in geeigneter Weise zum Ausdruck, dass „Diese Aussage" nicht von vornherein auf etwas Gegebenes, sondern zunächst auf ein noch gar nicht spezifiziertes und in seiner Existenz gesichertes Sprachgebilde verweist. Im Fall des „Lügners" ist nun auch formal leicht nachzuvollziehen, dass $X = X\mathsf{F}$ keine Lösung hat: $X\mathsf{F}$ ist äquivalent zu $\sim X\mathsf{T}$ (mit ~ als Negationszeichen). Da sich X auf $X\mathsf{F}$ bezieht, gilt nach dem Referenzaxiom $X\mathsf{T}$ genau dann, wenn $X\mathsf{F}$. Insgesamt ergibt sich hieraus $X\mathsf{F} \leftrightarrow \sim X\mathsf{F}$, was bei jeder Belegung mit Wahrheitswerten zum Widerspruch führt.

Lan Wen beweist ein *Transfertheorem*, demzufolge sich die Lösbarkeit einer Referenzgleichung auf eine mit ihr assoziierte Boolesche Gleichung überträgt. Für den „Lügner" (1) bzw. $X = X\mathsf{F}$ lautet diese: $x = \overline{x}$ (worin der Querstrich über einer Booleschen Variablen deren Negation anzeigt). Diese Gleichung hat keine Lösung. Entsprechendes gilt für andere paradoxale Aussagen. Ein verwandtes, geringfügig komplizierteres Beispiel ist das von P. E. B. Jourdain 1913 entdeckte Zwei-Karten-Paradoxon (das aber schon in einem Sophismus des Johannes Buridanus enthalten ist; vgl. Hughes (1982)): Auf der ersten Karte steht: *Die Aussage auf der zweiten Karte ist wahr.* Auf der zweiten Karte steht: *Die Aussage auf der ersten Karte ist falsch.* Beides beschreiben die Referenzbeziehungen $X = Y\mathsf{T}$ und $Y = X\mathsf{F}$; deren zugehörige Boolesche Gleichungen $x = y,\ y = \overline{x}$ gehen nach Eliminierung von y unmittelbar in den „Lügner“ ($x = \overline{x}$) über. Lan Wen hat ein raffinierteres Drei-Karten-Paradoxon[1] konstruiert, das durch das folgende Boolesche Gleichungssystem mit drei Unbestimmten dargestellt wird:

$$
\begin{aligned}
x &= y \wedge \overline{z}, \\
y &= \overline{x} \vee z, \qquad (3) \\
z &= x \wedge y.
\end{aligned}
$$

Hierin bezeichnen wie üblich $\wedge$ und $\vee$ die Verbandsoperationen *meet* und *join*, welche den aussagenlogischen Verknüpfungen für die Konjunktion („und“) bzw. die Adjunktion („oder“) entsprechen. Auch (3) besitzt keine Lösung; Lan Wen zeigt dies durch Fallunterscheidung, wobei für x, y, z einzig die Werte 0 („falsch“) und 1 („wahr“) in Betracht gezogen werden. Ebensogut (oder besser) würde dies die Elimination von y und z aus (3) bestätigen, die gleichfalls direkt den „Lügner“ nach sich zieht (vgl. Abschn. 3). Lan Wen zielt nicht auf eine Lösungstheorie Boolescher Gleichungen, sondern darauf, ihre Verwendung als Modelle selbstbezüglicher Aussagen durch sorgfältige semantische Analyse zu rechtfertigen.
Diese Rechtfertigung ließe sich nachträglich auch für die früher erschienene Arbeit von Walter J. Gutjahr (1995) geltend machen, in welcher Boolesche Gleichungen *ad hoc* für eine „fixpunkttheoretische Analyse“ u.a. des Vorhersage-Paradoxons von O’Connor (1948) benützt werden. Mit dem „Lügner“ hat es, wie Gutjahr herausstellt, die Form einer *Fixpunktgleichung* gemein[2]:

$$x = \phi(x) \qquad (4)$$

ϕ ist dabei ein Boolescher Ausdruck, der außer von x noch von irgendwelchen Booleschen Parametern abhängen darf. Eine Lösung von (4) ist – wenngleich „in zirkulärer Weise“ gegeben – gleichwohl als durch (4) bestimmt anzusehen. Insoweit ist eine allgemeine Lösungstheorie der Fixpunktgleichung von Interesse, denn sie würde es ermöglichen, paradoxale selbstbezügliche Aussagen als nicht-erfüllbare Gleichungen zu identifizieren. In Gutjahr (1995) findet sich dazu eine substanzielle Skizze, die formal noch weiter zu präzisieren und inhaltlich zu arrondieren ist.[3]

Auf der Grundlage der von Lan Wen entwickelten Transfermethode (umgangssprachliche Fassung $\mapsto$ Referenzbeziehung $\mapsto$ Boolesche Gleichung) soll dieses Vorhaben im Folgenden durchgeführt werden. An die Stelle der zweielementigen Booleschen Algebra tritt dabei die Lindenbaum-Tarski-Algebra der klassischen Aussagenlogik. Ihre Elemente sind Äquivalenzklassen wertverlaufsgleicher Terme, so dass von den in Rede stehenden Aussagen gerade derjenige Teil ihrer Struktur erhalten bleibt, der für das Studium der Fixpunktgleichung (4) relevant ist. Zu (4) wird eine vollständige Lösungstheorie entwikkelt. Diese umfasst das von Gutjahr aufgestellte notwendige und hinreichende Kriterium für die Erfüllbarkeit von (4) und liefert darüberhinaus die Lösungsgesamtheit von (4) in Gestalt eines Zwischenverbands. – Als in technischer Hinsicht vorteilhaft erweist es sich in vielen Fällen, die Rechenoperationen in dem zur Lindenbaum-Tarski-Algebra gehörigen Booleschen Ring durchzuführen.

[1] Karte 1: Die Aussage auf Karte 2 ist wahr und die Aussage auf Karte 3 ist falsch. Karte 2: Die Aussage auf Karte 1 ist falsch oder die Aussage auf Karte 3 ist wahr. Karte 3: Die Aussage auf Karte 1 ist wahr und die Aussage auf Karte 2 ist wahr. – N.B.: Der Vergleich von Karte 1 und 2 erweist das „Oder“ auf Karte 2 als disjunktives „Entweder-Oder“.
[2] Näheres dazu in Abschn. 3. Der von Gutjahr herausgearbeitete Funktionsterm lässt sich sogar in die rechte Seite des „Lügners“ umformen: $\phi(x) = \overline{x}$ (am leichtesten über die Ringoperationen der zu Grunde liegenden Booleschen Algebra).
[3] Gutjahr notiert „Diese Aussage“ als „selbstreferente Aussage“ σ und schreibt dann (4) seltsamerweise als $\phi(\sigma)$. Die in Zeile (14) seiner Arbeit angesetzte Gleichung $\sigma = \Psi(\sigma, p)$ lässt dann freilich offen, welcher Zusammenhang zwischen ϕ und Ψ bestehen soll. Lan Wens spätere Analyse hat gezeigt, dass es gerechtfertigt ist, von vornherein Gleichung (4) zu lösen; die etwas unklare Unterscheidung zwischen ϕ und Ψ wird damit hinfällig.

2. *Lösungstheorie der allgemeinen Booleschen Fixpunktgleichung*

2.1 – Als formaler Rahmen werde für alles Weitere die sog. *Lindenbaum-Tarski-Algebra* $\mathfrak{A}$ der klassischen zweiwertigen Aussagenlogik zu Grunde gelegt. $\mathfrak{A}$ entsteht dadurch, dass propositionale Terme (Formeln) der Aussagenlogik, die denselben Wahrheitswertverlauf aufweisen, identifiziert werden. Die logischen Verknüpfungen (Negation, Konjunktion, Adjunktion) lassen sich hierbei als Operationen ($^-$, $\wedge, \vee$) auf $\mathfrak{A}$ „hochziehen". $\mathfrak{A}$ erweist sich damit als (abzählbar-unendliche) atomlose Boolesche Algebra mit den Konstanten 0 (Klasse aller Kontradiktionen) und 1 (Klasse aller Tautologien).[4] In $\mathfrak{A}$ gelten die Rechengesetze eines distributiven und komplementären Verbandes. In üblicher Weise werden auf $\mathfrak{A}$ die Operationen $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ ergänzend eingeführt; sie entsprechen der Subjunktion bzw. der Bisubjunktion von Aussagen:

(5.1) $a \rightarrow b := \overline{a} \vee b$

(5.2) $a \leftrightarrow b := (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$

Ferner lässt sich auf derselben Trägermenge $\mathfrak{A}$ eine Ringstruktur R($\mathfrak{A}$) etablieren, indem man eine dem disjunktiven „Entweder-Oder" nachgebildete Addition + definiert und $\wedge$ als (nicht ausgeschriebene) Multiplikation notiert:

(6.1) $a + b := (a \wedge \overline{b}) \vee (\overline{a} \wedge b)$

(6.2) $a\,b := a \wedge b$

Damit wird R($\mathfrak{A}$) ein Boolescher Ring, d.h. ein kommutativer Ring mit Eins, dessen sämtliche Elemente a idempotent sind: $a^2 = a$. (6.1) liefert speziell: $a + a = (a \wedge \overline{a}) \vee (\overline{a} \wedge a) = 0 \vee 0 = 0$. – Aus den Ringoperationen können die ursprünglich in $\mathfrak{A}$ gegebenen Operationen $^-, \wedge, \vee$ folgendermaßen wieder zurückgewonnen[5] werden:

(7.1) $\overline{a} = a + 1$

(7.2) $a \wedge b = a\,b$

(7.3) $a \vee b = a + b + a\,b$

Für beliebige Elemente $a, b \in \mathfrak{A}$ ist $a \le b$ durch die Gleichung $a\,b = a$ definiert. Damit ist auf $\mathfrak{A}$ eine „natürliche" Halbordnung eingeführt. Es gilt $0 \le a \le 1$; aus $a \le b$ folgt ferner $a\,c \le b\,c$ ($a, b, c \in \mathfrak{A}$ beliebig). Mit b/a wird die Menge aller $x \in \mathfrak{A}$ bezeichnet, für die $a \le x \le b$ gilt. Diese einem Intervall nachgebildete Menge ist ein komplementärer Teilverband von $\mathfrak{A}$ mit a als Null- und b als Einselement (nach Hermes (1955), S. 19 f., *Zwischenverband* genannt).

2.2. – Die in (5.1-2), (6.1-2) und (7.1-3) links und rechts neben dem Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke sind Beispiele propositionaler Terme; ihre Werte liegen sämtlich in der Trägermenge $\mathfrak{A}$. Im Folgenden soll für derartige Ausdrücke daher die Bezeichnung *Boolescher Term* oder kurz: $\mathfrak{A}$-*Term* verwendet werden. Konstanten $0, 1, a, b, c, \ldots \in \mathfrak{A}$ und ihre Platzhalter (Variablen) $x, y, z, \ldots$ sind (primitive) $\mathfrak{A}$-Terme. Mit ϕ und ψ sind auch $\overline{\phi}$ sowie $\phi * \psi$ $\mathfrak{A}$-Terme, wobei $*$ für irgendeine der bisher betrachteten zweistelligen Operationen auf $\mathfrak{A}$ steht. Das Vorkommen einer Variablen x in ϕ werde wie

[4] Zu näheren Einzelheiten vgl. man Hermes (1955), S. 144 ff., oder Sikorski (1969), S. 194 ff.

[5] (7.1-3) ergibt sich aufgrund einfacher Umformungen. Wie üblich hat bei der Termauswertung die Multiplikation Vorrang vor der Addition. – Es besteht eine umkehrbar eindeutige Korrespondenz zwischen Booleschen Algebren und ihren Booleschen Ringen. Vgl. dazu etwa Hermes (1955), S. 114-118.

üblich durch $\phi(x)$ angezeigt (oder durch $\phi(x,...)$ angedeutet, sofern noch andere relevante Termvorkommen in ϕ eine Rolle spielen). – Nach dem *Booleschen Fundamentaltheorem* (vgl. Bauer/Wirsing (1991), S. 34) kann ein $\mathfrak{A}$-Term ϕ stets in einer disjunktiven Form dargestellt werden[6]:

(8) $$\phi(x) = (p \wedge x) \vee (q \wedge \overline{x}) = p\,x + q\,\overline{x}\,.$$

Hierbei sind $p = \phi(1)$ und $q = \phi(0)$ (bei Gutjahr (1995) als „Proklusion" bzw. „Kontraklusion" bezeichnet). Eine einfache Umformung in R($\mathfrak{A}$) mittels (7.1) zeigt, dass man die negierte Variable in (8) unterdrücken kann:

(8') $$\phi(x) = q + (p+q)x$$

2.3. – Mit dem in 2.1 und 2.2 zusammengestellten Rüstzeug lässt sich nun eine vollständige Lösungstheorie der Fixpunktgleichung (4) entwickeln. Es bezeichne $\mathrm{Fix}(\phi) := \{x \in \mathfrak{A} \mid x = \phi(x)\}$ die gesuchte Lösungsgesamtheit. Aus der Fixpunkteigenschaft ergibt sich unmittelbar $\mathrm{Fix}(\phi) \subseteq \phi[\mathfrak{A}]$. Das bereits von Gutjahr formulierte hinreichende und notwendige Kriterium für die Lösbarkeit von (4) ist dann in folgendem Satz enthalten:

(9) $\mathrm{Fix}(\phi) \neq \varnothing$ genau dann, wenn $q \leq p$.

Beweis: 1. Für eine beliebige Lösung $x = \phi(x)$ gilt auch $\phi(x) = \phi(\phi(x))$ und unter Benutzung von (8'): $q + (p+q)x = q + (p+q)\phi(x) = q + (p+q)(q + p\,x + q\,x)$. Wertet man den zuletzt erhaltenen Term in R($\mathfrak{A}$) aus, so ergibt sich nach kurzer Rechnung $p\,q + (p+q)x$, die Fixpunktgleichung liefert somit $q = p\,q$, d.h. $q \leq p$. – 2. Umgekehrt folgt aus $q \leq p$ in R($\mathfrak{A}$): $q = q\,p = q\,p + q + q = q\,p + q^2 + q = q(p+q+1)$. Offensichtlich ist $x = q$ eine spezielle Lösung der Fixpunktgleichung, die sich mittels (8') auch in der Form $(p+q+1)x = q$ schreiben lässt. –|

Für alles Weitere werde nun $q \leq p$ vorausgesetzt. Aus (8') gewinnt man damit $\phi(x) = p\,x + q + p\,q\,x$, was mit (7.3) $\phi(x) = p\,x \vee q$ ergibt. Hieraus ist die Monotonie von ϕ zu erkennen, denn $x \leq y$ impliziert $p\,x \leq p\,y$ und damit auch $\phi(x) = p\,x \vee q \leq p\,y \vee q = \phi(y)$. Nun überblickt man leicht die Wirkung von ϕ auf ganz $\mathfrak{A}$. Der Zwischenverband $q/0$ wird auf q abgebildet: aus $0 \leq u \leq q$ folgt nämlich wegen der Monotonie $q = \phi(0) \leq \phi(u) \leq \phi(q) = q$. In völlig entsprechender Weise ist zu sehen, dass $1/p$ auf p und p/q auf p/q abgebildet werden.

Insgesamt resultiert hieraus: $\phi[\mathfrak{A}] = p/q$, also auch $\mathrm{Fix}(\phi) \subseteq p/q$. Darüberhinaus lässt sich sogar zeigen:

(10) $\mathrm{Fix}(\phi) = p/q$.

Beweis: Es bleibt lediglich noch nachzuweisen, dass jedes $x \in p/q$ Fixpunkt von ϕ ist. Sei daher $q \leq x \leq p$ angenommen. Dann gilt $\phi(x) = p\,x \vee q = p\,x \vee p\,q = p(x \vee q)$. Nun hat man unter Beachtung von $q \leq x$ nach (7.3): $x \vee q = x + q + x\,q = x + q + q = x$ und wegen $x \leq p$ schließlich $\phi(x) = p\,x = x$. –|

[6] Man beweist dies durch Induktion über den Aufbau des Terms. Den Induktionsanfang bilden die Konstanten und Variablen. Für den Induktionsschritt genügt es, neben der Negation nur *eine* zweistellige Verknüpfung (z.B. Adjunktion) zu behandeln.

(9) und (10) bilden zusammen das Hauptresultat, mit dem zu jedem beliebigen Booleschen Term ϕ die Lösbarkeit der Fixpunktgleichung (4) entschieden und ggfs. die Lösungsgesamtheit angegeben werden kann.[7]

3. *Anwendung auf Beispiele selbstbezüglicher Aussagen*

Die im Folgenden skizzierten Anwendungsbeispiele legen die Vermutung nahe, dass paradoxale selbstbezügliche Aussagen durchweg auf die Fixpunktform des „Lügners" äquivalent reduzierbar sind. Für jedes Beispiel wird der Boolesche Term ϕ der zugehörigen Fixpunktgleichung angegeben und die Lösung (mittels (9) und (10)) diskutiert.

3.1. Das Drei-Karten-Paradoxon (Lan Wen 2001):
Das eingangs aufgestellte Gleichungsmodell (3) enthält drei Variablen; es sind y und z zu eliminieren, um eine Fixpunktgestalt zu erzielen. Am einfachsten erweisen sich wieder Umformungen im Ring R($\mathfrak{A}$). Wird die dritte Gleichung von (3) in die erste und zweite Gleichung eingesetzt, so ergibt sich: $x = y(1+x\,y) = y + x\,y$ und $y = (1+x) + z + (1+x)z = 1 + x + x^2 y = 1 + x + x\,y$. Elimination von y führt dann direkt auf die Form des „Lügners": $x = (1+x+x\,y) + x\,y = 1 + x = \overline{x} =: \phi(x)$. Die Werte $q = 1$ und $p = 0$ zeigen, dass kein Fixpunkt existiert.

3.2. Eine Paradoxie für Sancho Pansa:
Cervantes beschreibt im „Don Quixote" (Buch II, Kap. 51), wie man den schlichten Knappen des Titelhelden nach seiner (nur vorgespielten) Ernennung zum Gouverneur einer Insel mit einer paradoxen Situation verwirren will: Sagt jemand, der die Insel betritt, die Unwahrheit, so wird er – einer Gesetzesvorschrift zufolge – gehängt, anderenfalls wird er nicht gehängt. Hier ist ein Mann, der behauptet, er werde gehängt. Was soll mit ihm geschehen? – Es ist eine Gesamtaussage zu bilden, welche die beiden Fälle „Unwahrheit $\to$ Gehängtwerden", „Wahrheit $\to$ Nicht-Gehängtwerden" mit der Aussage a des „Gehängtwerdens" verbindet. Geeignet ist dazu der Boolesche Term $\phi(x,a) := (\overline{x} \to a) \wedge (x \to \overline{a}) \wedge a$. Er lässt sich mit wenigen Rechenschritten in R($\mathfrak{A}$) zur „Lügner"-Variante $a\,\overline{x}$ umformen. Es ist $q = a$, $p = 0$. Eine Lösung (nämlich: 0) gibt es infolgedessen nur für $a = 0$, d.h. wenn „Gehängtwerden" niemals stattfindet.

3.3. Das Vorhersageparadoxon von O'Connor (1948):
Jemand kündigt ein Ereignis für die Zukunft an, dessen tatsächliches Eintreten überraschend (d.h. nicht vorhersagbar) stattfinden werde. – Das Paradoxe darin kommt am besten zum Vorschein, wenn man (ohne Einschränkung!) nur zwei mögliche Zeitpunkte annimmt, zu denen das Ereignis eintreten kann. Tritt es zum Zeitpunkt 1 nicht ein, *muss* es zum Zeitpunkt 2 eintreten, wäre dann aber vorhersagbar und könnte deswegen gerade *nicht* eintreten. Damit lässt es sich für den Zeitpunkt 1 vorhersagen und kann insgesamt überhaupt nicht stattfinden. – Es sei auf die detaillierte Analyse bei Gutjahr (1995), S. 54-57, verwiesen, die auf den Booleschen Term $\phi(x,a) := ((x \to a) \leftrightarrow (x \to \overline{a})) \wedge a$ führt, worin a für das angekündigte Ereignis steht. Wie bei 3.2 liefert die Auflösung von ϕ via Ringoperationen die „Lügner"-Variante $a\,\overline{x}$. Demnach existiert für $a \neq 0$ kein Fixpunkt und es liegt „tatsächlich ein *circulus vitiosus*" vor (Gutjahr, S. 55).

[7] Gutjahr (1995) drückt (9) in seinem Hauptergebnis (d.i. Satz 3.1, S. 60) durch die Formulierung aus, wonach „aus der Kontraklusion die Proklusion logisch folgt". Die (echt) zwischen q und p liegenden Lösungen werden dabei ausgelassen. Sinngemäß handelt es sich dabei um alle Folgerungen aus der Kontraklusion, welche ihrerseits die Proklusion nach sich ziehen. In der zweielementigen Booleschen Algebra werden diese Zwischenwerte leicht übersehen.

3.4. Das Paradoxon von Löb (1955):
Sei *A* eine beliebige Aussage und *B* die Aussage: „Wenn diese Aussage wahr ist, dann *A*“. – Es besagt also *B*: Wenn *B* wahr ist, dann *A*. Angenommen *B* ist wahr; dann auch *A*. Dies beweist: Wenn *B* wahr ist, dann *A*. Daher ist *B*, das ja gerade dies behauptet, tatsächlich wahr, und also ist *A* wahr. Das ist ein Widerspruch, da *A* beliebig (somit auch beliebig falsch) vorgegeben sein kann. – Die Analyse bei Lan Wen (2001), S. 46, führt auf die Referenzgleichung $X = (X \to A)$. Deren assoziierte Boolesche Gleichung lautet daher $x = \phi(x,a) := x \to a$. Sie besitzt eine Lösung genau dann, wenn $q = 1 \le p = a$, d.h. $a = 1$ gilt. Das bedeutet aber gerade: Die vorgegebene Aussage *A* kann nicht wirklich beliebig sein, sondern muss wahr sein. Die Fixpunktgleichung $x = \phi(x,a)$ lässt sich in $\mathrm{R}(\mathfrak{A})$ umformen zu $\overline{x} = \overline{a}\,x$. Diese „Lügner“-Variante ist lösbar für $\overline{a} = 0$ (in Übereinstimmung mit dem zuvor ermittelten $a = 1$).[8]

3.5. Ipsofaktische Wahrheit (Selbstbewahrheitung):
Die Aussage *A*: „Dieses Buch ist ein Mängelexemplar“ wird zum Beleg ihrer durch sich selbst erzeugten Wahrheit, sobald sie einem Buch auf den Schnitt gestempelt wird. Auch die bekannten Beispiele einer „self-fulfilling prophecy“ gehören in diese Kategorie selbstbezüglicher sich selbst bewahrheitender Aussagen. Ein Widerspruch entsteht hierdurch nicht. Demnach müsste ein Boolescher Term $\phi(x,a)$, der ipsofaktische Wahrheit modelliert, einen oder mehrere Fixpunkte haben. – ϕ lässt sich in ähnlicher Weise gewinnen wie in 3.4. *B* sei die Aussage: „Wenn diese Aussage *A* impliziert, dann *A*“. Hieraus resultiert $\phi(x,a) = (x \to a) \to a = x + a\,\overline{x}$. Somit ist $q = a$ und $p = 1$, d.h. alle *x* mit $a \le x \le 1$ sind Fixpunkte. Ein solches *x* könnte z.B. die Aussage sein: „Dieses Buch hat einen ermäßigten Preis“, nämlich: als Folge der Tatsache (Kontraklusion *a*), dass es ein Mängelexemplar ist.

Schrifttum

Bauer, F. L. & M. Wirsing (1991): Elementare Aussagenlogik. Springer-Verlag: Berlin/Heidelberg/ New York, 1991.
O’Connor, D. J. (1948): Pragmatic Paradoxes. Mind (Juli 1948).
Gutjahr, W. J. (1995): Paradoxien der Prognose und der Evaluation. Eine fixpunkttheoretische Analyse. Collegium Logicum. Annals of the Kurt-Gödel-Society, vol. 1; Springer-Verlag: Wien/New York, 1995, 54–66.
Hermes, H. (1955): Einführung in die Verbandstheorie. Springer-Verlag: Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1955.
Hughes, G. E. (1982): John Buridan on Self-Reference. Cambridge University Press: Cambridge, 1982.
Kripke, S. (1975): Outline of a Theory of Truth. The Journal of Philosophy 72 (1975), 690–716.
Lan Wen (2001): Semantic Paradoxes as Equations. The Math. Intelligencer 23/1 (2001), 43–48.
Löb, M. H. (1955): Solution of a Problem of Leon Henkin. The Journal of Symbolic Logic 20 (1955), 115–118.
Sikorski, R. (1969): Boolean Algebras. 3rd ed. Springer-Verlag: Berlin/Heidelberg/New York, 1969.
Visser, A. (1994): Semantics and the Liar Paradox. D. Gabbay & F. Guenthner (eds.): Handbook of Philosophical Logic, vol. IV; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994, 617–706.

[8] Gutjahr (1995) hat die Löb-Paradoxie für die prognostische Proklusion *A*: „Der Dollarkurs wird morgen fallen“ untersucht und dazu treffend angemerkt: „Sätze, die mit vermeintlichen Leerfloskeln wie ’Wenn ich mit dem, was ich sage, recht habe …’ beginnen, dürften zu den unauffälligsten Neuauflagen des Epimenides-Paradoxons [d.i. der „Lügner“ (1), A.S.] im modernen deutschen Idiom zählen.“ (Anm. 6, S. 61).